DISMA Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange

Prove Finali - Analisi Numerica

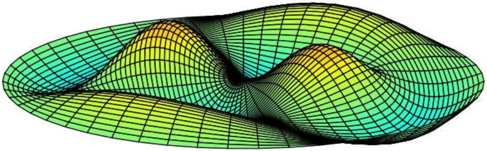
Adriano Festa adriano.festa@polito.it

Presentazione Prove Finali Ingegneria Matematica
aa 2023/2024

Politecnico di Torino

Metodi numerici per equazioni differenziali con valori al bordo

1. Metodi agli elementi finiti: utilizzo di funzioni polinomiali a tratti per la soluzione di equazioni differenziali su domini monodimensionali.
2. Metodi alle differenze finite per la simulazione delle vibrazioni di una membrana elastica bidimensionale.



Riferimenti: Dott. Andrea Borio
`andrea.borio@polito.it`

Equazioni non lineari (1)

Metodi numerici per la risoluzione di sistemi di n equazioni in n incognite

Uno dei metodi più usati per la risoluzione di sistemi di equazioni nonlineari "quadrati" è il metodo di Newton:

- Vantaggi: velocità di convergenza (quadratica, sotto opportune ipotesi)
- Svantaggi: Costo computazionale (alto per n grande!) e condizioni per convergenza (difficoltà a trovare un "buon" punto iniziale)

Riferimenti: Prof.ssa Sandra Pieraccini
`sandra.pieraccini@polito.it`

Equazioni non lineari (2)

Esistono diverse varianti che mirano a migliorare l'efficienza del metodo:

- Metodi che puntano a ridurre il costo computazionale di ogni iterazione:
  1. Metodi Quasi Newton: calcolo a basso costo della matrice Jacobiana (differenze finite, metodi di Broyden...)
  2. Metodi Newton Inesatti: calcolo a basso costo della direzione di movimento
  3. ...
- Metodi che puntano a migliorare la convergenza:
  4. Metodi di Newton con line search
  5. Metodi di Newton con trust-region

Focalizzandosi su una variante, possibili proposte di prova finale riguardano:

- **studio, implementazione e sperimentazione numerica della metodologia in esame**;
- in alternativa, **applicazione della metodologia in contesti specifici**.

Riferimenti: Prof.ssa Sandra Pieraccini

`sandra.pieraccini@polito.it`

Equazioni non lineari (3)

Metodi numerici per la risoluzione di sistemi sovra-determinati

Il problema viene riformulato come problema ai minimi quadrati non lineare. Una ulteriore proposta di prova finale riguarda **studio, implementazione e sperimentazione numerica del**

1. Metodo di Levenberg-Marquardt

oppure la sua **applicazione in contesti specifici**.

Riferimenti: Prof.ssa Sandra Pieraccini
sandra.pieraccini@polito.it

EQUAZIONI INTEGRALI

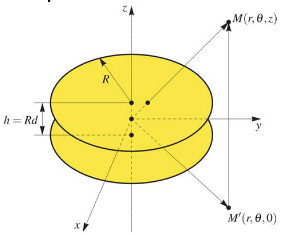
$$a f(\mathbf{x}) + \int_\Gamma K(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, d\Gamma_\mathbf{y} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

$a \in \mathbb{R}$, K, g funzioni note, f funzione incognita.

Applicazioni: modellizzazione di problemi fisici. Esempio: equazione di Love

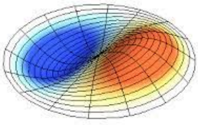
$$f(x) + \frac{s}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{d}{d^2 + (x-y)^2} f(y)\, dy = g(x), \quad s = \pm 1$$

Il caso più semplice con $g(x) = 1$ è apparso in un problema elettrostatico analizzato per la prima volta da Eric Russell Love.



Sistema elettrostatico di due piatti paralleli

Risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali mediante metodi di elementi al contorno. Esempio: equazione della membrana elastica



$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in D \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Gamma = \partial D \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_\Gamma \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \varphi(\mathbf{y}) \, d\Gamma_{\mathbf{y}} = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_\Gamma \log(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \varphi(\mathbf{y}) \, d\Gamma_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in D$$

Metodi numerici

- Collocazione
- Galerkin
- Quadratura o Nyström

Questioni correlate

- Approssimazione di funzioni
- Formule di quadratura efficienti per integrali con nuclei non regolari
- Risoluzione efficiente di sistemi lineari

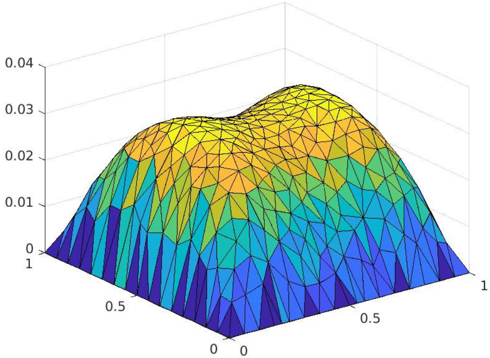
Riferimenti

Silvia Falletta, Letizia Scuderi
silvia.falletta@polito.it, letizia.scuderi@polito.it

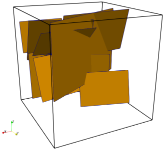
Generazione, raffinamento e operazioni su mesh

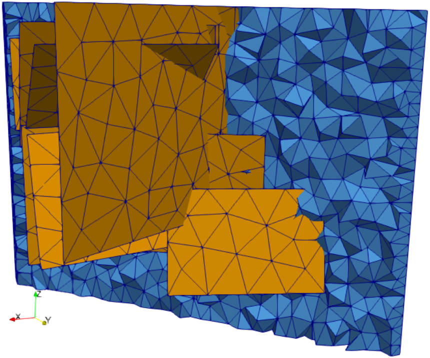
Premessa

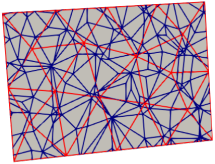
$$\begin{cases} -\Delta y = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ y = y_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$



Ma...







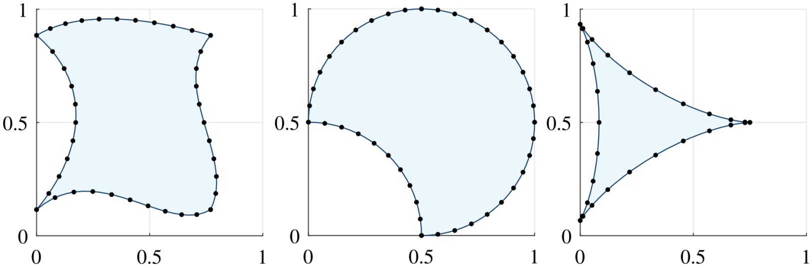
Generazione, raffinamento e operazioni su mesh

1. Raffinamento adattativo di mesh triangolari con conservazione della qualità
2. Conservazione della qualità nel raffinamento di mesh poligonali
3. Date due mesh $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ su uno stesso dominio, implementazione efficiente di proiezioni L_2 su $\mathcal{M}_2$ di funzioni definite a tratti su $\mathcal{M}_1$; caso di mesh triangolari/tetraedriche e possibile estensione a mesh poligonali/poliedriche.
4. Tecniche di smoothing per mesh poliedriche.

Riferimenti: Prof. Stefano Berrone `stefano.berrone@polito.it` Dott. Andrea Borio `andrea.borio@polito.it`

Politecnico di Torino

Integrazione Numerica su superfici planari con curvature



1. Quadratura numerica per funzioni non regolari su poligoni/poliedri
2. Integrazione tramite mexfile di codice C++ in ambiente Matlab

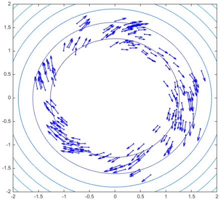
Riferimenti: Prof. Stefano Scialo' Dott. Fabio Vicini

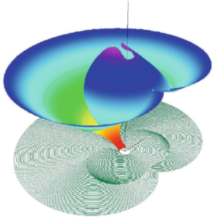
stefano.scialo@polito.it fabio.vicini@polito.it

DISMA

Giochi dinamici multi-agente

Giochi a somma nulla (non cooperativi) continui nel tempo. Interazioni tra giocatori basate su equilibri di Nash. Possibili applicazioni in ambito economico, modellistico e sportivo.





Keywords: *Equazione di Isaacs, Mean-Field Games.*

Riferimenti: Prof. Adriano Festa

`adriano.festa@polito.it`

Predizione di tempeste solari estreme

- Sviluppo di tecniche di interpolazione di dati sparsi (polinomi, splines e kernels).
- Allenamento di reti neurali con possibili applicazioni alla fisica solare.

Figure: I dati sono forninti da Solar Orbiter, missione congiunta di NASA ed ESA.

- Keywords: Intelligenza artificiale, interpolazione.

Riferimenti: Dott.ssa Emma Perracchione

`emma.perracchione@polito.it`

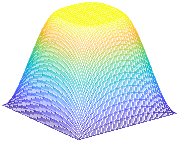
Quantificazione dell'incertezza e metodi iterativi

In numerose applicazioni, è fondamentale studiare come l'incertezza, intrisica o dovuta ad una limitata conoscenza, influenzi determinate quantità di interesse.

- Stime di parametri di ODE con metodi deterministici e/o Bayesiani.
- Algoritmi per stimare il prezzo di opzioni finanziarie.

È anche necessario sviluppare algoritmi veloci per risolvere sistemi lineari.

- Algoritmi multigriglia per il problema dell'ostacolo.



Riferimenti: Dott. Tommaso Vanzan

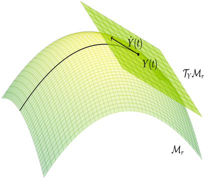
`tommaso.vanzan@polito.it`

Metodi numerici che sfruttano la geometria

"*They throw geometry out the door, and it comes back through the window.*" (H.G. Forder)

Esempi di tesi:

- Algoritmi di ottimizzazione su varietà differenziabili.
- Modelli ridotti basati sulla Dynamical Low Rank Approximation.
- Integratori simplettici per ODEs.



Riferimenti: Dott. Tommaso Vanzan
`tommaso.vanzan@polito.it`

Thank you for your attention

Politecnico
di Torino

1859