

Proposte di prova finale Analisi Matematica

Alessio Martini
29 febbraio 2024



**Politecnico
di Torino**



Usare l'Analisi Matematica per...

- ottimizzare l'uso di risorse
(ottimizzazione)
- modellare fenomeni fisici con equazioni differenziali
(equazioni alle derivate parziali)
- comprendere il mondo subatomico con l'analisi in dimensione infinita
(meccanica quantistica e teoria degli operatori)
- analizzare ed elaborare segnali che variano nel tempo
(analisi di Fourier e tempo-frequenza)
- studiare oggetti discreti o di dimensione frazionaria
(grafi e frattali)

Analisi Matematica e ottimizzazione

- Come racchiudere la massima area possibile con una corda di una data lunghezza?
Che forma deve avere un tamburo affinché la frequenza di oscillazione fondamentale della sua membrana sia minima?

Proposta tesi: **Problemi isoperimetrici** (Dovetta & Tentarelli)

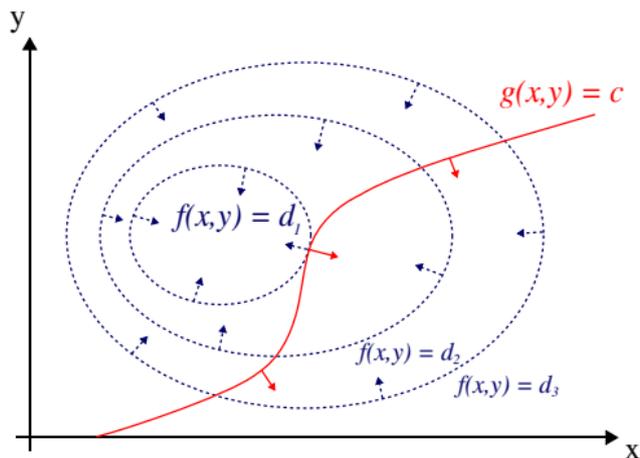


fonte: mitchtestone.blogspot.com/2012/08/roman-carthage.html

Analisi Matematica e ottimizzazione

- Come trovare massimi e minimi di una funzione in presenza di vincoli?

Proposta tesi: **Ottimizzazione vincolata** (Morandotti)

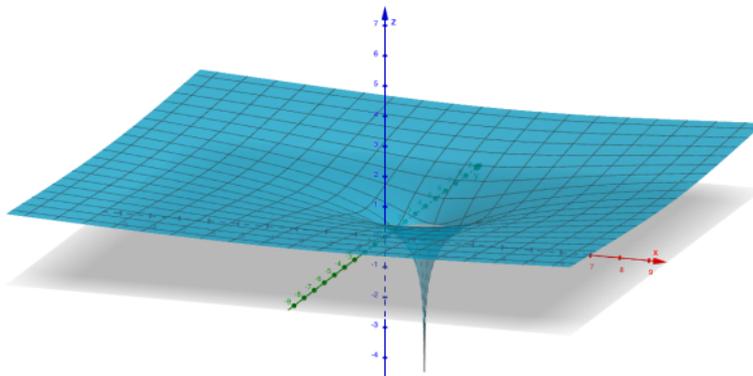


fonte: Wikipedia - Lagrange multipliers

Analisi Matematica e equazioni differenziali

- Che proprietà hanno le funzioni che descrivono stati stazionari della temperatura, potenziali elettrici e potenziali gravitazionali?

Proposta tesi: **Funzioni armoniche (Morandotti)**

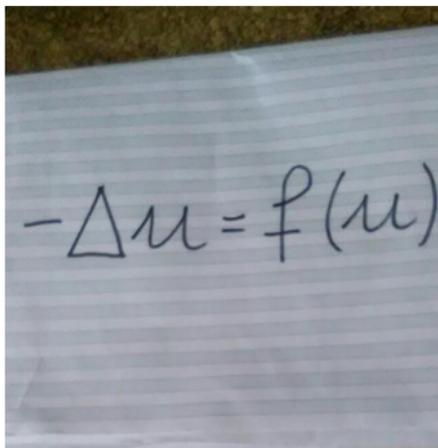


fonte: gentile concessione prof. M. Morandotti

Analisi Matematica e equazioni differenziali

- Come modellare fenomeni fisici complessi che presentano effetti nonlineari?

Proposta tesi: **Metodi dell'analisi nonlineare per le equazioni differenziali**
(Dovetta & Tentarelli)



A photograph of a piece of white lined paper with the equation $-\Delta u = f(u)$ written in blue ink. The paper is slightly wrinkled and has some faint smudges.

fonte: gentile concessione prof. E. Serra

Analisi Matematica e equazioni differenziali

- Si possono risolvere equazioni alle derivate parziali come se fossero equazioni ordinarie?
Ha senso considerare “funzioni di un operatore”?

Proposta tesi: **Calcolo funzionale per operatori autoaggiunti e teorema spettrale** (Martini)

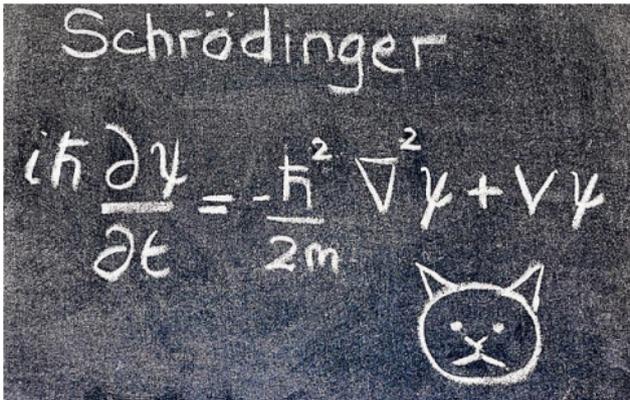
$$\frac{df}{dt} = af \Rightarrow f(t) = e^{ta} f(0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \Rightarrow u = e^{t\Delta} u_0 \quad ???$$

fonte: gentile concessione prof. A. Martini

Analisi Matematica e **meccanica quantistica e teoria degli operatori**

- Che ruolo giocano gli operatori lineari nella descrizione degli osservabili di un sistema quantistico? Come descriverne l'evoluzione temporale?

Proposta tesi: **Operatori autoaggiunti e loro proprietà: uno strumento per la meccanica quantistica** (Dovetta & Tentarelli)



Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi$$

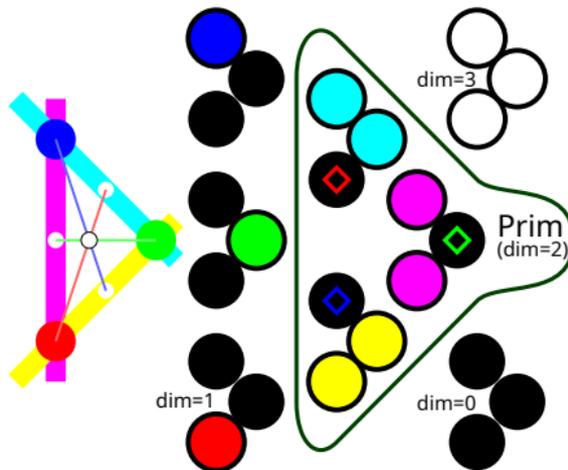
A simple line drawing of a cat's face is drawn in the bottom right corner of the chalkboard.

fonte: geoffneilsen.wordpress.com/2012/08/03/erwin-schrodinger-1887-1961/

Analisi Matematica e meccanica quantistica e teoria degli operatori

- Che cosa hanno in comune lo spazio degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert e lo spazio delle funzioni continue su un compatto?

Proposta tesi: C^* -algebre e teoria degli operatori (Wahlberg)

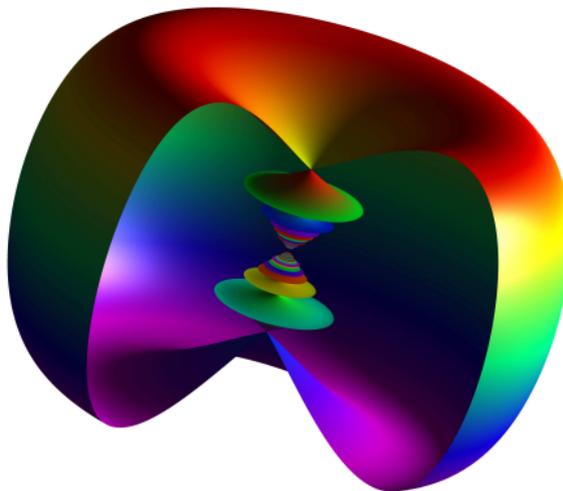


fonte: Wikipedia - Spectrum of a C^* -algebra

Analisi Matematica e **meccanica quantistica e teoria degli operatori**

- Perché non si possono misurare con precisione arbitraria posizione e quantità di moto di una particella? Che cosa ha a che fare con le simmetrie del sistema quantistico?

Proposta tesi: **Il gruppo di Heisenberg (Martini)**

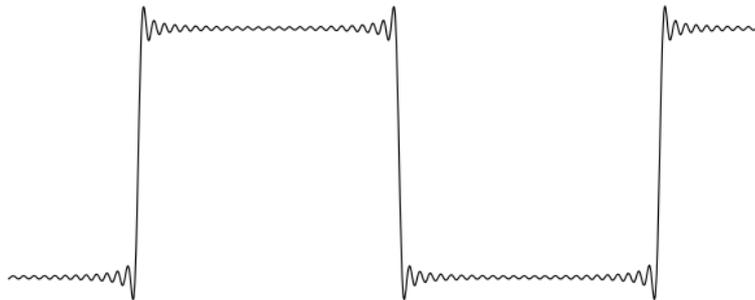


fonte: gentile concessione prof. A. Martini

Analisi Matematica e analisi di Fourier e tempo-frequenza

- In che senso e con quale precisione possiamo rappresentare ogni segnale periodico come sovrapposizione di sinusoidi?

Proposta tesi: **Convergenza delle serie di Fourier (Martini)**

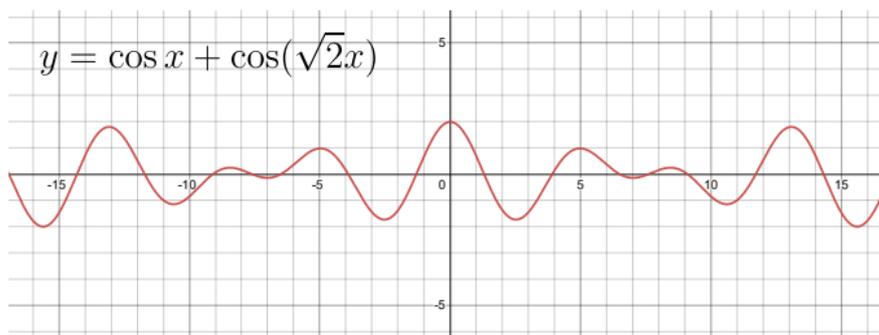


fonte: Wikipedia - Gibbs phenomenon

Analisi Matematica e analisi di Fourier e tempo-frequenza

- Come studiare sovrapposizioni di segnali con frequenze incommensurabili?

Proposta tesi: **Funzioni quasi-periodiche (Wahlberg)**

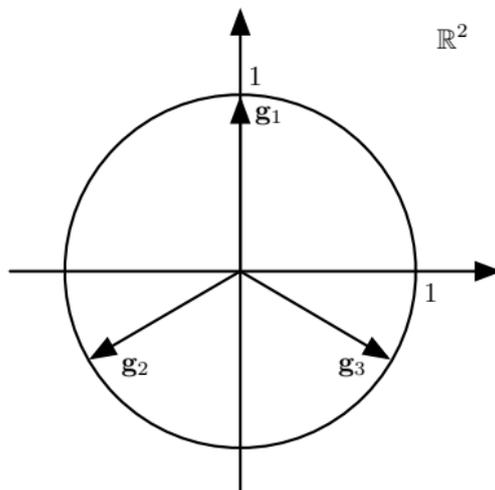


fonte: gentile concessione prof. A. Martini

Analisi Matematica e analisi di Fourier e tempo-frequenza

- Come rappresentare segnali in maniera resistente al rumore e alle perturbazioni?

Proposta tesi: **Teoria dei frame in spazi di Hilbert (Wahlberg)**

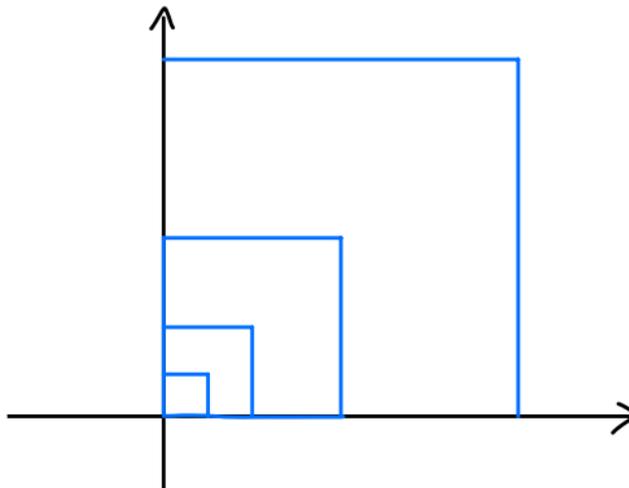


fonte: V. I. Morgenshtern, H. Bölcskei, A Short Course on Frame Theory,
arXiv:1104.4300

Analisi Matematica e analisi di Fourier e tempo-frequenza

- Che informazioni possiamo dedurre su un segnale conoscendone le medie su scale diverse?
Come scrivere un segnale come sovrapposizione di funzioni costanti a tratti?

Proposta tesi: **Insiemi diadici** (Vallarino)

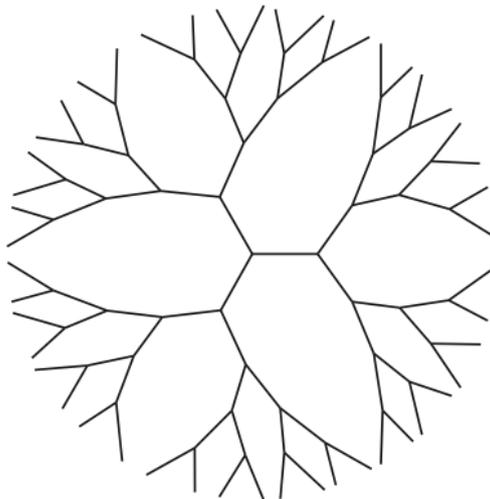


fonte: gentile concessione prof. M. Vallarino

Analisi Matematica e **grafi e frattali**

- Come studiare modelli discreti della diffusione del calore e della propagazione ondosa?
Si possono “derivare” e “integrare” funzioni definite su un grafo o un reticolo?

Proposta tesi: **Analisi su alberi (Vallarino)**

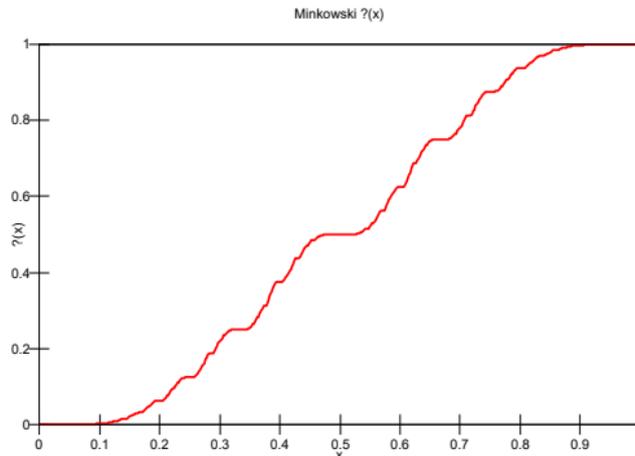


fonte: gentile concessione prof. M. Vallarino

Analisi Matematica e grafi e frattali

- Ha senso parlare di lunghezza della costa di un'isola o una penisola?
Come misurare insiemi di dimensione frazionaria o frattali?

Proposta tesi: **Curve di de Rham (Morandotti)**



fonte: Wikipedia - Minkowski τ function

- Simone Dovetta (simone.dovetta@polito.it),
Lorenzo Tentarelli (lorenzo.tentarelli@polito.it)
 - *Metodi dell'analisi nonlineare per le equazioni differenziali*
 - *Problemi isoperimetrici*
 - *Operatori autoaggiunti e loro proprietà: uno strumento per la meccanica quantistica*
- Alessio Martini (alessio.martini@polito.it)
 - *Calcolo funzionale per operatori autoaggiunti e teorema spettrale*
 - *Convergenza delle serie di Fourier*
 - *Il gruppo di Heisenberg*
- Marco Morandotti (marco.morandotti@polito.it)
 - *Curve di de Rham*
 - *Funzioni armoniche*
 - *Ottimizzazione vincolata*
- Maria Vallarino (maria.vallarino@polito.it)
 - *Analisi su alberi*
 - *Insiemi diadici*
- Patrik Wahlberg (patrik.wahlberg@polito.it)
 - *C^* -algebre e teoria degli operatori*
 - *Funzioni quasi-periodiche*
 - *Teoria dei frame in spazi di Hilbert*



Thank you for your attention



Politecnico
di Torino