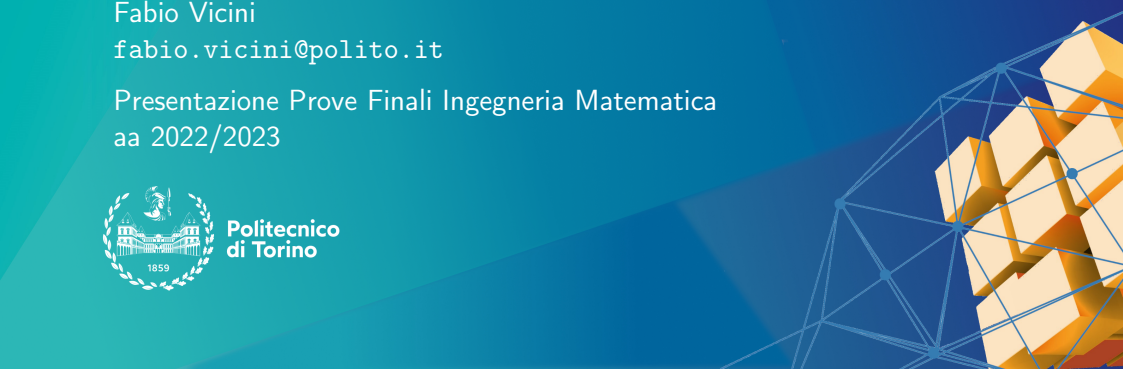
DISMA Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange

Prove Finali - Analisi Numerica

Fabio Vicini
fabio.vicini@polito.it

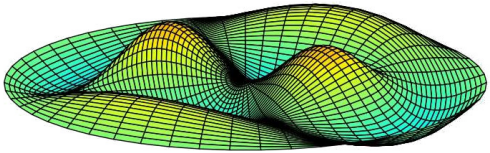
Presentazione Prove Finali Ingegneria Matematica
aa 2022/2023

Politecnico di Torino



Metodi numerici per equazioni differenziali con valori al bordo

1. Metodi agli elementi finiti: utilizzo di funzioni polinomiali a tratti per la soluzione di equazioni differenziali su domini monodimensionali.
2. Metodi alle differenze finite per la simulazione delle vibrazioni di una membrana elastica bidimensionale.



Riferimenti: Dott. Andrea Borio
andrea.borio@polito.it

Equazioni non lineari (1)

Metodi numerici per la risoluzione di sistemi di n equazioni in n incognite

Uno dei metodi più usati per la risoluzione di sistemi di equazioni nonlineari "quadrati" è il metodo di Newton:

- Vantaggi: velocità di convergenza (quadratica, sotto opportune ipotesi)
- Svantaggi: Costo computazionale (alto per n grande!) e condizioni per convergenza (difficoltà a trovare un "buon" punto iniziale)

Riferimenti: Prof.ssa Sandra Pieraccini
sandra.pieraccini@polito.it

Equazioni non lineari (2)

Esistono diverse varianti che mirano a migliorare l'efficienza del metodo:

- Metodi che puntano a ridurre il costo computazionale di ogni iterazione:
  1. Metodi Quasi Newton: calcolo a basso costo della matrice Jacobiana (differenze finite, metodi di Broyden...)
  2. Metodi Newton Inesatti: calcolo a basso costo della direzione di movimento
  3. ...
- Metodi che puntano a migliorare la convergenza:
  4. Metodi di Newton con line search
  5. Metodi di Newton con trust-region

Focalizzandosi su una variante, possibili proposte di prova finale riguardano:

- **studio, implementazione e sperimentazione numerica della metodologia in esame**;
- in alternativa, **applicazione della metodologia in contesti specifici**.

Riferimenti: Prof.ssa Sandra Pieraccini
DISMA sandra.pieraccini@polito.it

Equazioni non lineari (3)

Metodi numerici per la risoluzione di sistemi sovra-determinati

Il problema viene riformulato come problema ai minimi quadrati non lineare. Una ulteriore proposta di prova finale riguarda **studio, implementazione e sperimentazione numerica del**

1. Metodo di Levenberg-Marquardt

oppure la sua **applicazione in contesti specifici**.

Riferimenti: Prof.ssa Sandra Pieraccini
sandra.pieraccini@polito.it

Tre equazioni *storiche* della matematica (1)

Equazione di Van der Pol

L'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

prende il nome dal fisico e ingegnere olandese Balthasar Van der Pol (1889 - 1959).

- Applicazioni: oscillatori periodici non lineari con smorzamento, studio del battito cardiaco;
- Questioni correlate: metodi numerici per ODE, problemi stiff.

Riferimenti: Prof. Letizia Scuderi `letizia.scuderi@polito.it` Prof. Silvia Falletta `silvia.falletta@polito.it`

Tre equazioni *storiche* della matematica (2)

Equazione di Love

L'equazione integrale

$$f(y) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{c}{(x-y)^2 + c^2} f(x)dx = 1, \quad |y| \leq 1, c > 0$$

prende il nome dal fisico matematico inglese August Love (1863 - 1940).

- Applicazioni: problemi di elettrostatica, fisica classica e quantistica;
- Questioni correlate: metodi numerici per equazioni integrali, formule di quadratura per integrali non regolari.

Riferimenti: Prof. Letizia Scuderi `letizia.scuderi@polito.it` Prof. Silvia Falletta `silvia.falletta@polito.it`

Tre equazioni *storiche* della matematica (3)

Equazione di Burgers

L'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

prende il nome dal fisico olandese Johannes Martinus Burgers (1895 - 1981).

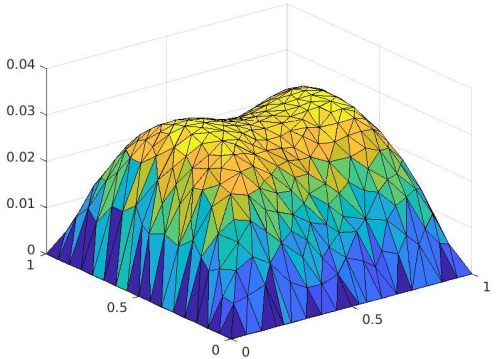
- Applicazioni: meccanica dei fluidi, gasdinamica e flusso del traffico;
- Questioni correlate: metodi numerici per equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari, stabilità numerica.

Riferimenti: Prof. Letizia Scuderi `letizia.scuderi@polito.it` Prof. Silvia Falletta `silvia.falletta@polito.it`

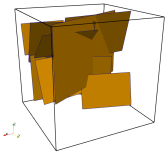
Generazione, raffinamento e operazioni su mesh

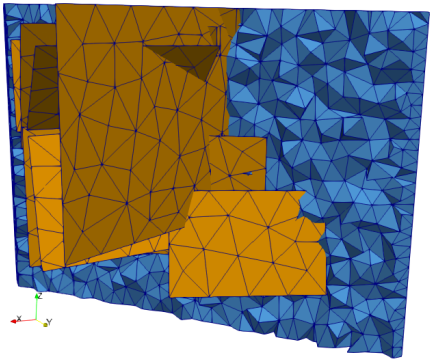
Premessa

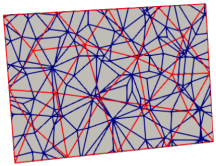
$$\begin{cases} -\Delta y = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ y = y_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$



Ma...





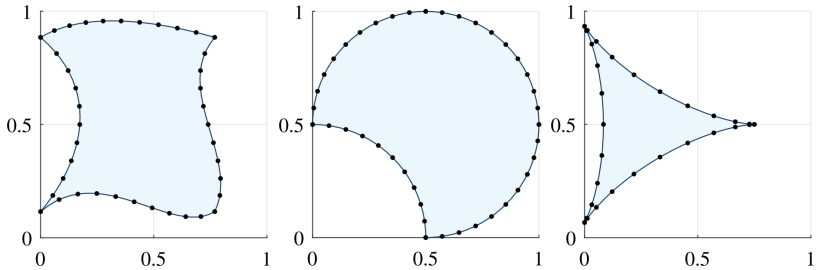


Generazione, raffinamento e operazioni su mesh

1. Raffinamento adattativo di mesh triangolari con conservazione della qualità
2. Conservazione della qualità nel raffinamento di mesh poligonali
3. Date due mesh $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ su uno stesso dominio, implementazione efficiente di proiezioni L_2 su $\mathcal{M}_2$ di funzioni definite a tratti su $\mathcal{M}_1$; caso di mesh triangolari/tetraedriche e possibile estensione a mesh poligonali/poliedriche.
4. Tecniche di smoothing per mesh poliedriche.

Riferimenti: Prof. Stefano Berrone `stefano.berrone@polito.it` Dott. Andrea Borio `andrea.borio@polito.it`

Integrazione Numerica su superfici planari con curvature



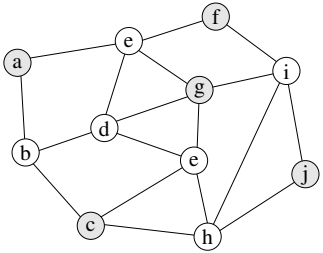
1. Quadratura numerica per funzioni non regolari su poligoni/poliedri
2. Integrazione tramite mexfile di codice C++ in ambiente Matlab

Riferimenti: Prof. Stefano Scialo' `stefano.scialo@polito.it`
Dott. Fabio Vicini `fabio.vicini@polito.it`

DISMA

Calcolo Parallelo ed applicazione a problemi su grafi

Introduzione ai principi fondamentali del calcolo parallelo. Rappresentazione numerica di grafi, introduzione ai problemi più comuni (Minimum spanning tree, Shortest path, Maximal independent set, etc.). Implementazione sequenziale e parallela.



{a, d, i, h} is an independent set

{a, c, j, f, g} is a maximal independent set

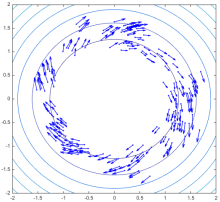
{a, d, h, f} is a maximal independent set

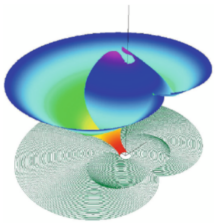
Keywords: *Prim's Algorithm, Dijekstra's and Floyd's Algorithm.*

Riferimenti: Prof. Adriano Festa
adriano.festa@polito.it

Giochi dinamici multi-agente

Giochi a somma nulla (non cooperativi) continui nel tempo. Interazioni tra giocatori basate su equilibri di Nash. Possibili applicazioni in ambito economico, modellistico e sportivo.



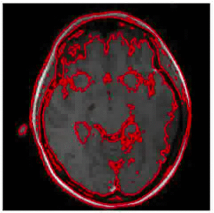


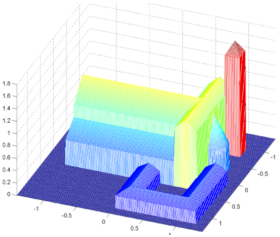
Keywords: *Equazione di Isaacs, Mean-Field Games.*

Riferimenti: Prof. Adriano Festa
adriano.festa@polito.it

EDP per problemi di trattamento delle immagini

Problemi di filtraggio di immagini per la riduzione del rumore, segmentazione (via Level-Sets methods), shape-from-shading.





Keywords: *Equazione eikonale* $\partial_t V(x,t) + c(x,t)|\nabla V(x,t)| = 1$

Riferimenti: Prof. Adriano Festa
adriano.festa@polito.it

Predizione di tempeste solari estreme

- Sviluppo di tecniche di interpolazione di dati sparsi (polinomi, splines e kernels).
- Allenamento di reti neurali con possibili applicazioni alla fisica solare.

Figure: I dati sono forniti da Solar Orbiter, missione congiunta di NASA ed ESA.

- Keywords: Intelligenza artificiale, interpolazione.

Riferimenti: Dott.ssa Emma Perracchione
emma.perracchione@polito.it

Thank you for your attention

Politecnico
di Torino