

L'universo è geometria: la relatività generale in 15 minuti

Luca Lussardi
luca.lussardi@polito.it
Torino
19 Maggio 2020



**POLITECNICO
DI TORINO**



L'aria che Einstein respirava ai primi del Novecento

- 1887: Michelson e Morley dimostrano sperimentalmente che l'etere luminifero non esiste e di conseguenza la luce si propaga nel vuoto alla stessa velocità in tutte le direzioni.
- Le leggi della meccanica newtoniana sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali (invarianza galileiana).
- Le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni galileiane: le leggi dell'elettromagnetismo non sono quindi le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Einstein ha davanti due strade:

- Mantenere la meccanica newtoniana e modificare le leggi dell'elettromagnetismo;
- Cambiare la meccanica newtoniana e mantenere le equazioni di Maxwell.

Le trasformazioni di Lorentz

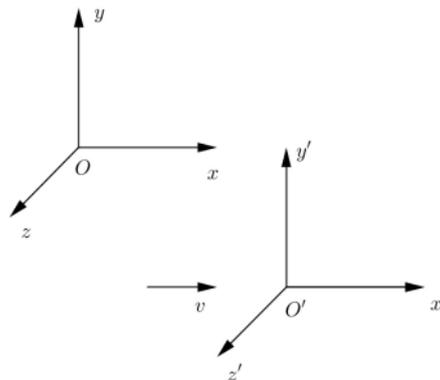


Le prime ipotesi sulla contrazione dei corpi in movimento suggeriscono ad Einstein la formulazione della teoria della relatività speciale (1905):

- Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
- La luce si propaga nel vuoto a velocità costante c indipendentemente dallo stato di moto della sorgente o dell'osservatore.



Le trasformazioni di Lorentz



- Per Galileo: $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$ e $t' = t$.
- Per Einstein (Lorentz-Poincaré):

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Lo spazio-tempo

Utilizzando le trasformazioni di Lorentz si ha:

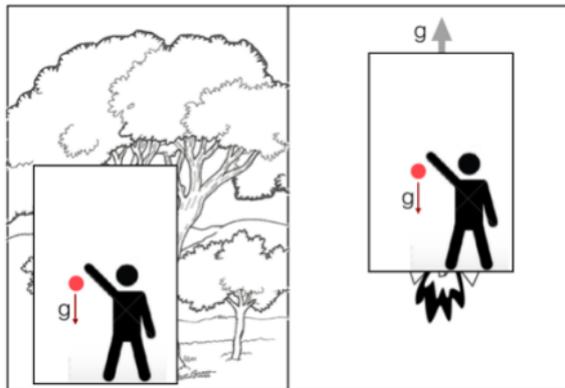
$$\begin{aligned}(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2 &= \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2\gamma^2\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)^2 \\ &= \frac{c^2}{c^2 - v^2}(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2\frac{c^2}{c^2 - v^2}\frac{(tc^2 - vx)^2}{c^4} \\ &= \frac{c^2x^2 - 2c^2xvt + c^2v^2t^2}{c^2 - v^2} + y^2 + z^2 - \frac{t^2c^4 - 2tc^2vx + v^2x^2}{c^2 - v^2} \\ &= \frac{x^2(c^2 - v^2)}{c^2 - v^2} + y^2 + z^2 - \frac{c^2t^2(c^2 - v^2)}{c^2 - v^2} = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.\end{aligned}$$

Quindi:

$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ non dipende dal sistema di riferimento.

Il problema della gravità: il principio di equivalenza

Einstein vuole introdurre la forza di gravità e arrivare ad una teoria della relatività generale.



L'accelerazione gravitazionale è equivalente ad un sistema di riferimento non inerziale: le leggi della fisica hanno la stessa “forma” in tutti i sistemi di riferimento.

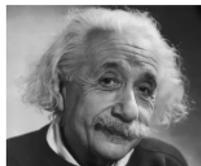
La gravità esce di scena: resta solo la geometria

A 

B 

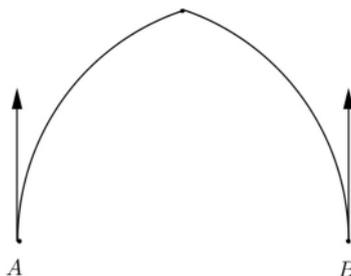


Tra A e B non c'è alcuna forza.

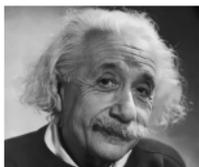


A e B si muovono su un piano seguendo le linee più convenienti obbedendo al principio di inerzia.

La gravità esce di scena: resta solo la geometria



Tra A e B c'è una forza di attrazione.



A e B si muovono in uno spazio curvo seguendo le linee più convenienti obbedendo al principio di inerzia.

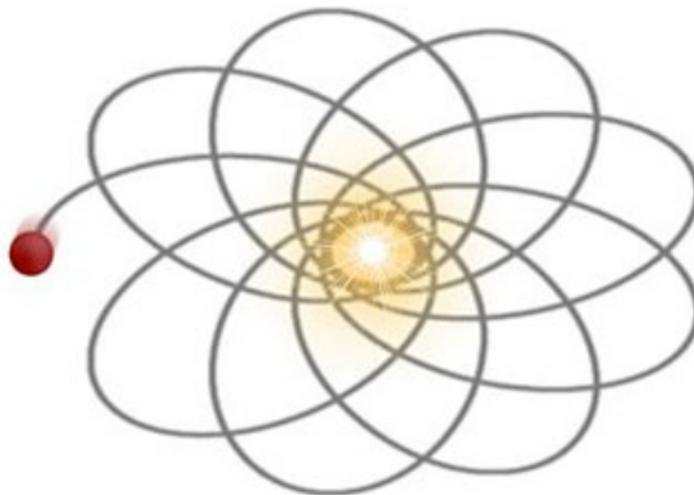
La geometria dello spazio-tempo: le varietà lorentziane

- L'invarianza formale delle espressioni differenziali rispetto ai cambiamenti di coordinate suggerisce a Einstein che le leggi fisiche vanno scritte come relazioni *tensoriali*: l'universo è descritto da sistemi di riferimento e le leggi fisiche devono essere le stesse in ogni sistema di riferimento, proprio come gli spazi geometrici sono descritti da sistemi di coordinate, e le espressioni tensoriali hanno la stessa forma in ogni sistema di coordinate.
- Il *tensore metrico* permette di ricostruire l'intera geometria (lorentziana) dello spazio, siccome permette di misurare le distanze. L'universo curvo della mente di Einstein prende la forma desiderata: le masse in esso presenti permettono di determinare la metrica attraverso le equazioni di Einstein

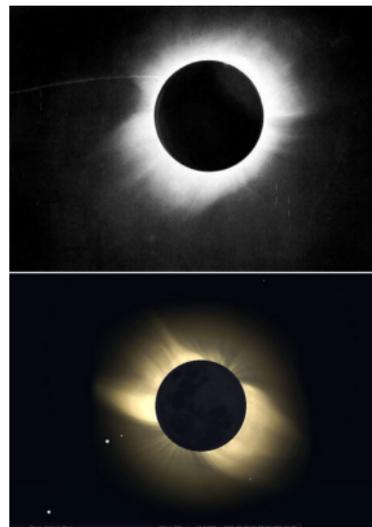
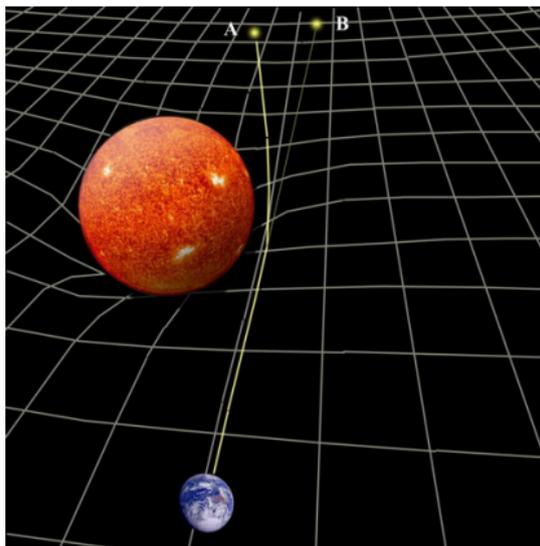
$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

e lo studio geometrico dello spazio così individuato permette di determinare i moti dei corpi che in esso si muovono.

Relatività generale e esperimenti: l'orbita di Mercurio

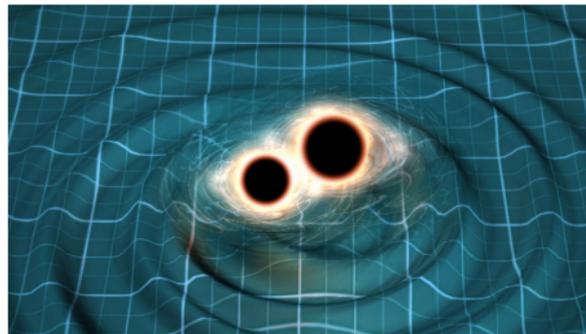


Relatività generale e esperimenti: la deviazione della luce



(L'immagine dell'eclissi solare è tratta da
<https://www.media.inaf.it/2019/05/29/eclisse-di-einstein>)

Relatività generale e esperimenti: le onde gravitazionali



Relatività generale e vita quotidiana: il GPS



- 24 satelliti in orbita a 20.000 km di altezza.
- Ogni satellite ha un orologio atomico al cesio con precisione di 10^{-14} .

Relatività generale e vita quotidiana: il GPS

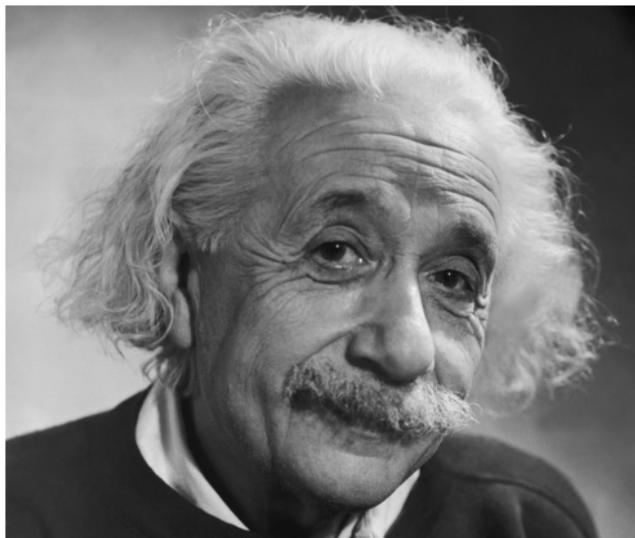
Tenendo conto della relatività:

- Gli orologi dei satelliti van più piano (relatività speciale).
- La gravità cambia la velocità degli orologi e la propagazione delle onde radio (relatività generale).

E senza le correzioni relativistiche?

- Senza la correzione di relatività speciale l'errore è di circa 2.2 km.
- Senza la correzione di relatività generale l'errore è di circa 15 km.





*La cosa più incomprensibile al mondo
è il fatto che l'universo sia comprensibile*
Albert Einstein (1879-1955)

