Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange

ECCELLENZA 2018 · 2022

Schegge di matematica in WhatsApp...

Sandra Pieraccini
sandra.pieraccini@polito.it

24 Febbraio 2021

POLITECNICO DI TORINO

"C'è più matematica in cielo e in terra, Orazio, di quanta tu ne possa immaginare"

[Libero adattamento da *Amleto*, W. Shakespeare]

POLITECNICO DI TORINO

"C'è più matematica in cielo e in terra, Orazio, di quanta tu ne possa immaginare"

[Libero adattamento da *Amleto*, W. Shakespeare]

Vi sarà forse capitato di ricevere immagini tramite WhatsApp...

"C'è più matematica in cielo e in terra, Orazio, di quanta tu ne possa immaginare"

[Libero adattamento da *Amleto*, W. Shakespeare]

Vi sarà forse capitato di ricevere immagini tramite WhatsApp...

Un velocissimo ripasso

Unità di misura della quantità di dati memorizzata (o trasferita) su un device elettronico (PC, smartphone, tablet...) è il **byte**

1 byte = 8 bit = sequenza di 8 cifre binarie

Un velocissimo ripasso

Unità di misura della quantità di dati memorizzata (o trasferita) su un device elettronico (PC, smartphone, tablet...) è il **byte**

$$1 \text{ byte} = 8 \text{ bit} = \text{sequenza di 8 cifre binarie}$$

- 1 MB (megabyte) $= 10^6$ byte
- 1 GB (gigabyte) $= 10^9$ byte
- 1 TB (terabyte) $= 10^{12}$ byte

Un velocissimo ripasso

Unità di misura della quantità di dati memorizzata (o trasferita) su un device elettronico (PC, smartphone, tablet...) è il **byte**

$$1 \text{ byte} = 8 \text{ bit} = \text{sequenza di 8 cifre binarie}$$

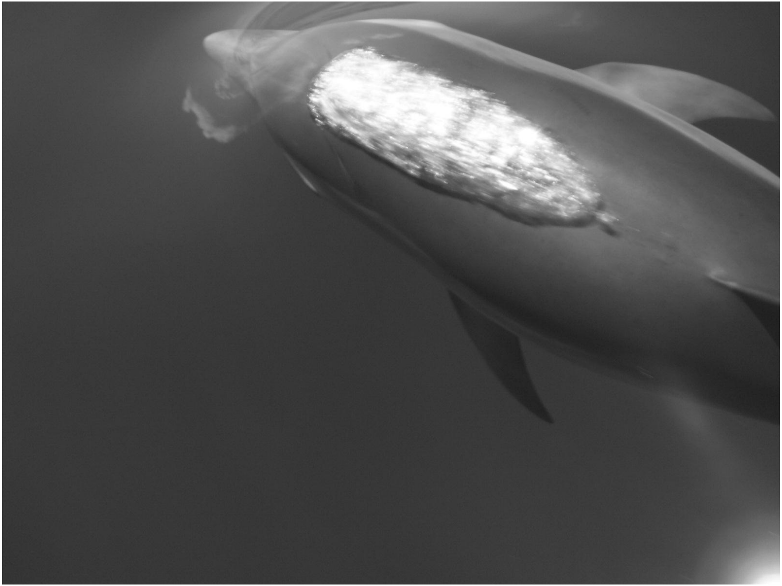
- 1 MB (megabyte) $= 10^6$ byte
- 1 GB (gigabyte) $= 10^9$ byte
- 1 TB (terabyte) $= 10^{12}$ byte

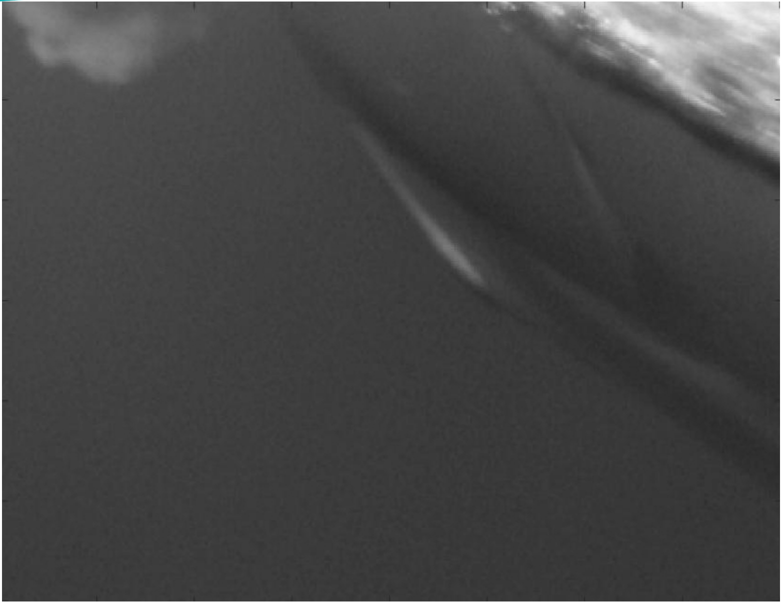
Attualmente la capienza degli hard disk si misura in TB.
Il traffico dati mensile su un dispositivo mobile è tipicamente dell'ordine di qualche GB.

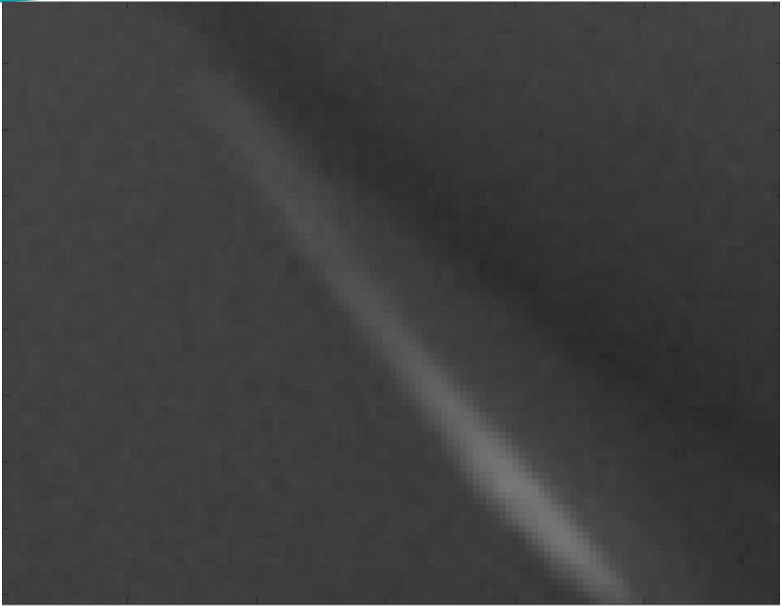
- La dimensione di una foto digitale è misurata in pixel (pixel è la contrazione di *picture element*).

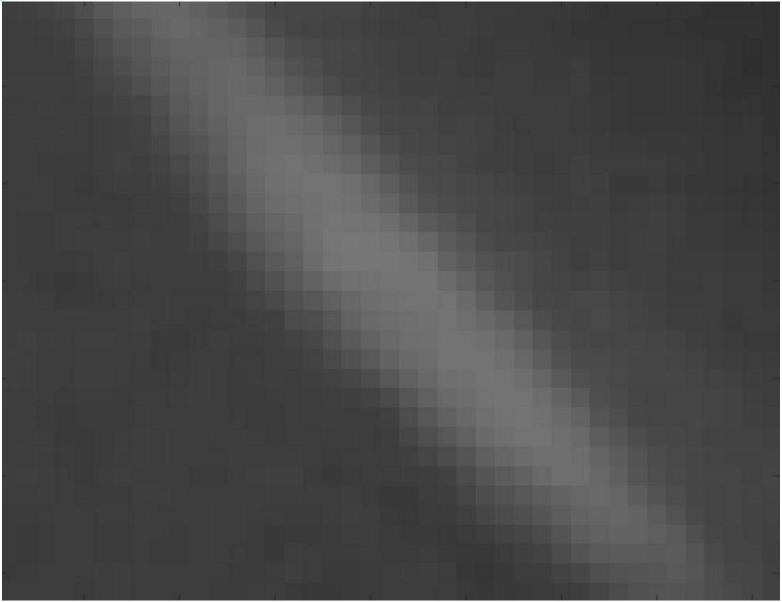
- La dimensione di una foto digitale è misurata in pixel (pixel è la contrazione di *picture element*).
- I pixel sono organizzati su una griglia fissa rettangolare. In un foto in bianco e nero, ogni pixel è memorizzato come un numero compreso fra 0 e 255 che rappresenta il dosaggio di bianco e nero ($0 =$ nero; $255 =$ bianco).

- La dimensione di una foto digitale è misurata in pixel (pixel è la contrazione di *picture element*).
- I pixel sono organizzati su una griglia fissa rettangolare. In un foto in bianco e nero, ogni pixel è memorizzato come un numero compreso fra 0 e 255 che rappresenta il dosaggio di bianco e nero (0 = nero; 255 = bianco).
- In una foto a colori per ogni pixel ci sono 3 interi che rappresentano il dosaggio dei 3 colori primari nella codifica RGB (Red, Green, Blue)









62	64	67	71	78	87	94	100	102	102	97	91	84	77	71	69	69	68	68	66	64	61	59	60	60	59	59	58
61	62	63	66	72	81	89	93	100	104	101	97	92	84	74	69	68	67	66	64	62	61	62	61	61	59	58	58
60	60	61	62	68	76	84	88	95	100	100	100	99	92	84	76	73	70	69	67	65	63	62	62	60	58	59	59
61	61	61	61	65	72	78	85	91	97	99	102	103	98	91	82	77	71	68	67	65	63	62	64	59	58	61	61
62	62	62	62	63	68	72	79	86	93	98	102	104	102	96	89	82	75	70	68	66	64	64	64	61	60	61	61
61	61	62	61	61	64	67	70	79	89	95	101	105	106	104	99	93	85	78	72	68	67	68	63	63	63	61	61
60	61	61	61	60	62	64	66	75	84	91	97	104	108	109	106	102	94	86	77	71	69	69	65	66	65	62	60
60	60	61	60	60	62	64	65	71	79	85	93	101	107	110	110	107	101	94	85	76	71	70	68	67	65	63	61
60	60	59	59	59	62	65	63	67	73	80	89	100	108	112	114	111	107	102	93	84	76	73	72	67	64	64	62
60	61	60	59	58	60	62	62	64	68	76	85	95	104	111	113	115	115	111	103	93	83	75	74	71	69	67	64
60	60	60	59	59	59	59	60	61	64	71	80	90	100	107	110	113	115	113	107	100	89	80	76	73	71	70	67
60	59	59	61	61	60	59	61	61	62	67	75	84	95	101	105	112	117	116	114	109	100	90	84	78	71	69	67
60	59	59	61	62	62	61	63	62	62	65	70	78	88	96	101	110	118	119	118	116	110	102	92	84	75	71	70
61	59	59	59	60	62	63	62	62	62	62	64	70	80	89	96	107	116	118	118	118	116	112	98	90	82	78	75
61	60	58	57	58	60	61	60	61	61	61	61	65	74	81	89	98	107	112	114	116	116	116	107	98	87	80	75
62	61	60	58	58	59	60	61	61	60	60	60	63	68	73	81	87	96	104	109	112	114	115	114	106	95	85	77
62	61	61	61	61	61	61	63	61	60	59	60	60	63	65	75	78	87	98	106	109	111	113	115	110	104	97	87
62	64	62	61	63	63	61	62	58	58	60	62	61	61	63	66	71	80	89	98	105	110	111	116	115	111	105	96
63	63	61	61	62	62	61	60	58	59	61	61	60	60	63	63	67	73	81	89	98	106	109	115	115	115	111	103
63	62	60	60	62	62	60	59	59	60	62	61	59	60	62	61	63	66	71	77	87	97	104	111	113	116	115	110
62	61	60	59	60	60	59	60	60	61	62	61	59	59	60	61	62	63	64	67	74	86	96	105	109	114	115	114
61	61	59	58	59	59	59	61	60	60	61	61	60	59	59	61	62	62	61	61	65	77	87	97	104	111	115	116
61	61	60	58	58	59	60	62	61	60	60	61	61	60	59	60	60	61	61	60	62	70	78	87	96	106	111	115
61	62	61	59	58	59	61	62	61	60	60	60	61	62	62	62	60	59	60	60	61	64	69	75	85	95	102	107
62	63	62	60	58	60	63	61	61	61	59	59	61	63	64	64	59	57	59	61	60	61	62	65	75	85	91	97
61	61	62	60	59	59	59	62	62	61	60	60	60	61	62	62	61	61	62	59	56	56	60	62	69	77	82	87
59	59	60	61	61	60	60	61	60	60	60	61	61	60	60	59	59	61	63	62	58	57	59	59	64	70	75	79
59	58	59	60	60	59	59	60	60	59	60	61	61	59	57	58	58	59	62	62	59	58	58	57	59	62	67	70
59	58	59	60	60	59	59	60	59	59	60	61	60	59	57	62	60	59	59	60	59	59	60	58	56	56	60	64
58	59	60	60	60	61	62	60	60	60	60	60	59	59	60	63	60	58	58	59	60	61	62	60	55	54	57	60
60	60	60	60	59	60	61	60	60	60	60	59	59	60	61	58	57	57	58	59	60	60	60	61	57	55	57	58

- Nella foto del delfino si sono usati 1200x1600 pixel $\simeq 2 \cdot 10^6$ pixel

- Nella foto del delfino si sono usati 1200x1600 pixel $\simeq 2 \cdot 10^6$ pixel
- Poiché per memorizzare un numero intero compreso tra 0 e 255 occorre 1 byte, la foto occuperebbe
  - 2 MB nella versione B & N
  - 6 MB nella versione a colori

- Nella foto del delfino si sono usati 1200x1600 pixel $\simeq 2 \cdot 10^6$ pixel
- Poiché per memorizzare un numero intero compreso tra 0 e 255 occorre 1 byte, la foto occuperebbe
  - 2 MB nella versione B & N
  - 6 MB nella versione a colori
- In realtà l'immagine occupa molto meno: 83 kB la versione B & N, 363 kB la versione a colori: le immagini sono sempre salvate in un formato compresso

- Nella foto del delfino si sono usati 1200x1600 pixel $\simeq 2 \cdot 10^6$ pixel
- Poiché per memorizzare un numero intero compreso tra 0 e 255 occorre 1 byte, la foto occuperebbe
  - 2 MB nella versione B & N
  - 6 MB nella versione a colori
- In realtà l'immagine occupa molto meno: 83 kB la versione B & N, 363 kB la versione a colori: le immagini sono sempre salvate in un formato compresso
- La compressione consiste nel tralasciare delle informazioni nel salvataggio; l'immagine viene poi ricostruita a partire dalle sole informazioni salvate
- A seconda del livello di compressione, la qualità dell'immagine è ovviamente diversa

Esistono diverse tecniche di compressione d'immagini molto sofisticate. Qui ne vediamo una che sfrutta solo proprietà delle matrici.

Esistono diverse tecniche di compressione d'immagini molto sofisticate. Qui ne vediamo una che sfrutta solo proprietà delle matrici.

Disclaimer: Scopo di questo incontro non è fornire lo stato dell'arte sui metodi per la compressione d'immagini, ma rendere l'idea di come la matematica pervada anche aspetti del nostro quotidiano che forse non sospettavamo.

Una brevissima introduzione alle matrici e al loro rango

Le matrici sono tabelle ordinate di numeri, con un fissato numero di righe e colonne; il numero di righe e di colonne danno la dimensione della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad (\text{matrice} \quad \underbrace{3 \times 4}_{\textit{dimensione}} \quad)$$

Una brevissima introduzione alle matrici e al loro rango

Le matrici sono tabelle ordinate di numeri, con un fissato numero di righe e colonne; il numero di righe e di colonne danno la dimensione della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad (\text{matrice } \underbrace{3 \times 4}_{\textit{dimensione}})$$

Sono "oggetti" matematici su cui vengono definite operazioni:

- somma o sottrazione tra matrici con stesso numero di righe e colonne;
- moltiplicazione per un numero;
- moltiplicazione fra matrici (sotto opportune condizioni sulle dimensioni);
- ...

- Consideriamo la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- Se guardiamo le righe, sono tutte uguali.
- In pratica l'informazione rilevante si trova su una sola riga, che viene ripetuta. Una matrice con queste caratteristiche viene chiamata una matrice di rango 1.

- Consideriamo la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 \end{pmatrix}$$

- Se guardiamo le righe, **non** sono tutte uguali, ma ci accorgiamo che la seconda è ottenuta moltiplicando tutti gli elementi della prima riga per 2; la terza è ottenuta moltiplicando tutti gli elementi della prima per 4.
- L'informazione rilevante continua quindi a trovarsi su una sola riga, e poi viene ripetuta semplicemente moltiplicando, ogni volta, tutta la riga per uno stesso numero.
- Una matrice con queste caratteristiche è ancora una matrice di rango 1.

- Se sappiamo a priori che una matrice ha le caratteristiche degli esempi precedenti, possiamo pensare di memorizzarla su un device limitando lo spazio di occupazione di memoria, memorizzando solo la riga che si ripete, e per quale numero viene moltiplicata su ogni riga. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Questo consente di preservare molto spazio di memoria, nella memorizzazione della matrice: in generale in una matrice di m righe e n colonne, basta memorizzare $n + m$ elementi anziché $m \times n$.

Caso particolare di moltiplicazione tra matrici

Per ricostruire la matrice è sufficiente moltiplicare tra loro gli elementi memorizzati:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(quindi u matrice di una sola colonna, v matrice di una sola riga) definiamo

$$u \cdot v := \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & \dots & 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & \dots & 2 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 & \dots & 4 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

che sarà una matrice di rango 1.

Caso particolare di moltiplicazione tra matrici

Per ricostruire la matrice è sufficiente moltiplicare tra loro gli elementi memorizzati:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

(quindi u matrice di una sola colonna, v matrice di una sola riga) definiamo

$$u \cdot v := \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_n \end{pmatrix}$$

che sarà una matrice di rango 1.

- Ovviamente non esistono solo matrici di rango 1: possono esserci matrici di rango 2 se l'informazione rilevante è su due righe (o colonne) soltanto, e sulle altre righe è in qualche modo ripetuta. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- In questo caso la prima e la seconda riga si dicono linearmente indipendenti, ma la terza riga si ottiene sommando ordinatamente gli elementi delle prime due. Questa è una matrice di rango 2.

- Ovviamente non esistono solo matrici di rango 1: possono esserci matrici di rango 2 se l'informazione rilevante è su due righe (o colonne) soltanto, e sulle altre righe è in qualche modo ripetuta. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- In questo caso la prima e la seconda riga si dicono linearmente indipendenti, ma la terza riga si ottiene sommando ordinatamente gli elementi delle prime due. Questa è una matrice di rango 2.
- Anche in situazioni del genere si potrebbe risparmiare sull'allocazione di memoria pensando ad esempio che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Ovviamente non esistono solo matrici di rango 1: possono esserci matrici di rango 2 se l'informazione rilevante è su due righe (o colonne) soltanto, e sulle altre righe è in qualche modo ripetuta. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- In questo caso la prima e la seconda riga si dicono linearmente indipendenti, ma la terza riga si ottiene sommando ordinatamente gli elementi delle prime due. Questa è una matrice di rango 2.
- Anche in situazioni del genere si potrebbe risparmiare sull'allocazione di memoria pensando ad esempio che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nel caso generale, bastano $2 \cdot (m+n)$ elementi anzichè $n \cdot m$

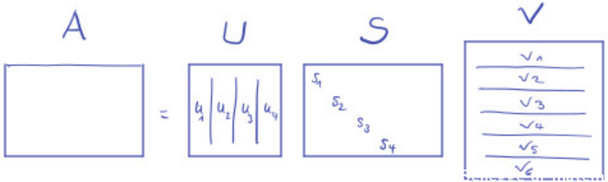
- Ovviamente una matrice può anche avere tutte le sue righe (o colonne) linearmente indipendenti.
- In quel caso avremo una matrice di rango massimo (che non sarà comunque mai più grande della dimensione minima della matrice)

Decomposizione ai valori singolari

Teorema (Decomposizione ai valori singolari - SVD)

Data una qualunque matrice A con un numero qualunque di righe (m) e colonne (n), esistono tre matrici U, V, S tali che :

- U ha m righe e m colonne
- S ha le stesse dimensioni di A (m righe, n colonne); ha tutti elementi uguali a 0 tranne che sulla "diagonale"; gli elementi non nulli sono tutti positivi e in ordine decrescente (valori singolari)
- V ha n righe e n colonne
- Si ha $A = U \cdot S \cdot V$

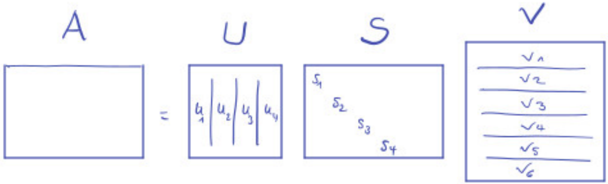


Teorema (Proprietà della Decomposizione ai valori singolari)

Data una qualunque matrice A con m righe e n colonne, siano U, S, V le matrici che costituiscono la sua decomposizione SVD. Allora:

- Il rango r della matrice è uguale al numero di valori singolari di A diversi da 0
- A può essere scritta come somma di r matrici di rango 1 ottenute a partire dai valori singolari di A e dalle prime colonne di U e dalle prime righe di V:

$$A = s_1 \cdot (u_1 \cdot v_1) + s_2 \cdot (u_2 \cdot v_2) + \ldots + s_r \cdot (u_r \cdot v_r)$$



Applicazioni della SVD

La SVD è uno strumento matematico usato in molti contesti applicativi estremamente attuali:

- trattamento di grandi moli di dati (*Data Science*);
- alcune tecniche numeriche per l'Intelligenza Ariticiale.

Per chi è interessato a questi argomenti, nel corso di Matematica per l'Ingegneria del Politecnico di Torino:

- durante la Laurea di primo livello si apprendono questi strumenti in alcuni corsi di base;
- in un insegnamento opzionale del terzo anno (*Matematica per l'Intelligenza Artificiale*) si mostra come queste tecniche siano il cardine di molti metodi numerici legati all'Intelligenza Artificiale.

Applicazione alla compressione di immagini

- Sia A una matrice che rappresenta la gradazione di grigio dei pixel di una immagine in B & N.
- Costruiamo la decomposizione SVD di A e decidiamo di approssimare A arrestando la sommatoria prima di r:

$$A = s_1 \cdot (u_1 \cdot v_1) + s_2 \cdot (u_2 \cdot v_2) + \dots s_r \cdot (u_r \cdot v_r)$$

$$A \simeq s_1 \cdot (u_1 \cdot v_1) + s_2 \cdot (u_2 \cdot v_2) + \dots s_p \cdot (u_p \cdot v_p)$$

con $p < r$.

- Per memorizzare l'immagine, o trasmetterla, sarà sufficiente memorizzare/trasmettere i p valori singolari, le prime p colonne di U e le prime p righe di $V \rightsquigarrow p + p \cdot n + p \cdot m$ valori anzichè $m \cdot n$.

- Maggiori sono m, n e minore è p, maggiore sarà il risparmio.
- Ovviamente se p è troppo piccolo l'immagine sarà estremamente deteriorata. A volte con p non troppo grande si ottengono già ottime approssimazioni.
- Su una app come WhatsApp, potremmo per esempio pensare di trasmettere subito un solo valore singolare, una sola colonna di u e una sola colonna di v, e lasciare che il resto sia scaricato quando l'utente lo desidera.

Thank you for the attention

POLITECNICO
DI TORINO