

Problema di Waring, somme di potenze, e applicazioni (perché i telefoni cellulari hanno bisogno della geometria algebrica?)

Ada Boralevi

ada.boralevi@polito.it

January 11, 2021



Somme di potenze di numeri interi: somme di quadrati

■ $2 = 1^2 + 1^2$

■ $3 =$

■ $4 =$

■ $5 =$

■ $6 =$

■ $7 =$

■ $8 =$

...e in generale?

Un numero primo p maggiore di 2 è somma di **due** quadrati se e solo se p ha resto 1 nella divisione per 4.



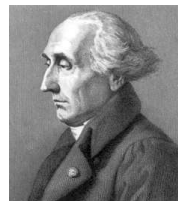
Pierre de Fermat,
1601-1665

Un intero positivo n che ha resto 7 nella divisione per 8 non può essere scritto come somma di meno di **tre** quadrati.



Carl Friedrich Gauss,
1777-1855

Ogni numero intero positivo è somma di al più **quattro** quadrati di numeri interi.



Giuseppe Luigi Lagrange,
1736-1813

Somme di cubi e quarte potenze



Edward Waring,
1736-1798

In *Meditationes Algebraicae* (1770) Waring scrive, **senza dimostrarlo**, che “ogni intero è somma di al più 9 cubi e al più 19 quarte potenze”.

■ $8 = 2^3$

■ $9 =$

⋮

■ $15 =$

■ $16 = 2^3 + 2^3$

⋮

■ $23 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$

... e in generale?

Il problema di Waring

Sempre senza dimostrazione, Waring aggiunge che:

preso un qualunque intero $k \geq 2$, esiste un numero $N(k)$ tale che ogni numero intero è somma di al più $N(k)$ potenze k -esime.

Per esempio:

- $N(2) = 4$,
- $N(3) = 9$,
- $N(4) = 19$.

Nel 1909 David Hilbert dimostra finalmente che $N(k)$ esiste, senza però trovare una formula per calcolarlo.



David Hilbert,
1862-1943

Non è stata ancora trovata una formula per calcolare $N(k)$ per ogni valore di k .

In seguito al lavoro di molti matematici però si è arrivati alla formula:

$$N(k) = 2^k + [(3/2)^k] - 2$$

che è vera per valori di k tali che $2^k \{(3/2)^k\} + [(3/2)^k] \leq 2^k$ (dove $[x]$ e $\{x\}$ denotano, rispettivamente, la parte intera e la parte frazionaria di x).

Si ritiene che tale valore di $N(k)$ sia quello giusto: negli ultimi anni è stata raccolta un'enorme quantità di "computational evidence" a supporto di tale tesi, ma ancora nessuna dimostrazione.

Generalizzazioni del problema di Waring

Come abbiamo fatto per i numeri interi, possiamo porci la stessa domanda per altri insiemi, purché gli elementi si possano sommare e moltiplicare tra loro.

Lo facciamo per i **polinomi in più variabili**: infatti sull'insieme dei polinomi nelle variabili (o indeterminate) $x_1, x_2, \dots, x_n$ (a coefficienti in un campo numerico fissato) possiamo definire una somma e un prodotto.

Ci interessano in particolare i polinomi ottenuti sommando monomi tutti di uno stesso grado d , detti **polinomi omogenei** o **forme di grado d** .

Per esempio, in grado 2 e in 2 variabili x_1, x_2 :

$$ix_1^2 - 126x_1x_2 + x_2^2,$$

$$5x_1^2 + 16x_1x_2 + \sqrt{3}.$$

Polinomi omogenei come somme di potenze

Dato un qualsiasi polinomio omogeneo F di grado d , è vero che esiste sempre un intero k tale che

$$F = L_1^d + \cdots + L_k^d$$

con $L_1, \dots, L_k$ forme lineari (cioè polinomi omogenei di grado 1)?

Il minimo numero intero k come sopra è detto **rango del polinomio F** .

Esempi in 2 variabili:

■ $F = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 \Rightarrow k = 1$

■ $G = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (2x_1 + x_2)^2 \Rightarrow k = 2$

Rango e rango di bordo (border rank)

Un polinomio omogeneo di grado 3 in 2 variabili, a coefficienti in $\mathbb{C}$, è somma di al più 3 cubi di forme lineari (rango ≤ 3).

In realtà “quasi tutti” i polinomi di questo tipo hanno rango 2; invece

$$P(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_1^2x_2$$

non si può scrivere come somma di 2 cubi. Se però definiamo

$$P_t(x_1, x_2) = \frac{t-1}{t} x_1^3 + \frac{1}{t} (x_1 + tx_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3tx_1x_2^2 + t^2x_2^3,$$

abbiamo che $\lim_{t \rightarrow 0} P_t(x_1, x_2) = P(x_1, x_2)$, cioè P è **limite** di polinomi di rango 2, pur avendo rango 3: si dice che **P ha rango di bordo 2**.

Problema di Waring per i polinomi

Fissato il grado d e il numero n di variabili, esiste un numero minimo $r = r(d, n)$ tale che "quasi tutti" i polinomi di grado d in n variabili sono somma di r potenze d -esime di forme lineari, oppure limite di polinomi di questo tipo?

In altre parole, esiste il minimo intero $r = r(d, n)$ tale che ogni polinomio di grado d in n variabili ha rango di bordo $\leq r$?

Perché rango di bordo? Perché i polinomi di border rank limitato formano una **varietà algebrica**, ossia si possono descrivere tramite equazioni, e possono quindi essere studiati dalla **geometria algebrica**.

Porsi la stessa domanda per il rango è molto più difficile, perché viene a mancare l'interpretazione geometrica: ad oggi esistono solo risposte parziali.

Grazie all'interpretazione geometrica, negli anni '90 del secolo scorso il problema di Waring per il rango di bordo dei polinomi è stato risolto.

Teorema di Alexander-Hirschowitz (1995): il valore cercato è

$$r(d, n) = \left\lceil \frac{\binom{n+d-1}{d}}{n} \right\rceil$$

a meno di alcune eccezioni tutte classificate:

- $r(2, n)$ polinomi di grado 2 in n variabili, $n > 2$,
- $r(3, 5)$ polinomi di grado 3 in 5 variabili,
- $r(4, 3), r(4, 4), r(4, 5)$ polinomi di grado 4 in 3,4,5 variabili.



André Hirschowitz



James Alexander

Tensori

“A cosa serve” il Teorema di Alexander-Hirschowitz? che applicazioni può avere?

Per rispondere a questa domanda, osserviamo che i polinomi omogenei sono casi speciali di tensori, detti tensori simmetrici.

Cosa è un tensore?

Scegliamo un intero positivo d , e d interi positivi $n_1, \dots, n_d$; un tensore di dimensione d e tipo $n_1 \times \dots \times n_d$ è una funzione

$$T : \{1, \dots, n_1\} \times \{1, \dots, n_2\} \times \dots \times \{1, \dots, n_d\} \rightarrow \mathbb{K}.$$

Quindi un tensore è un insieme di numeri indicizzati da d -uple del tipo $(i_1, \dots, i_d)$, con $1 \leq i_j \leq n_j$.

Facciamo subito degli esempi (su $\mathbb{R}$):

■ **dimensione 1, tipo 3:** $T : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, i \mapsto T_i \rightsquigarrow (T_1 \ T_2 \ T_3)$

■ **dimensione 2, tipo 3×2 :**

$$T : \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, (i, j) \mapsto T_{ij} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \\ T_{31} & T_{32} \end{pmatrix}$$

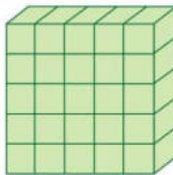
■ **dimensione 3, tipo $2 \times 2 \times 2$:**

$$T : \{1, 2\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, (i, j, k) \mapsto T_{ijk} \rightsquigarrow \begin{array}{ccccc} & & T_{112} & \text{---} & T_{122} \\ & \swarrow & | & \swarrow & | \\ T_{111} & \text{---} & T_{121} & & \\ | & & | & & | \\ & \swarrow & T_{212} & \text{---} & T_{222} \\ | & & | & & | \\ T_{211} & \text{---} & T_{221} & & \end{array}$$

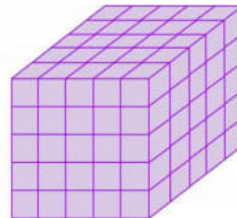
In generale, possiamo visualizzare i tensori nel modo seguente:



vector



matrix



3-D Tensor

... etc, in dimensione maggiore.

Dai polinomi omogenei ai tensori

Un polinomio omogeneo di grado 2 in 2 variabili generale, si può scrivere così:

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = t_{11}x_1x_1 + t_{12}x_1x_2 + t_{21}x_2x_1 + t_{22}x_2x_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

Ad esempio, $5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Analogamente, in 3 variabili:

$$6x_1^2 + 2x_1x_2 + \sqrt{3}x_1x_3 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 - \pi x_3^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

In generale, si ha una corrispondenza:

polinomio omog. di **grado 2** in **n variabili** $\rightsquigarrow$ tensore di **dimensione 2** e **tipo $n \times n$** .

E per un polinomio di grado 3? Ad esempio in 2 variabili avremmo:

$$\begin{array}{cccc}
 ax_1^3 & + & bx_1^2x_2 & + & cx_1x_2^2 & + & dx_2^3 \\
 t_{111} & & t_{112} & & t_{122} & & t_{333} \\
 & & t_{121} & & t_{212} & & \\
 & & t_{221} & & t_{221} & &
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 \begin{array}{ccccc}
 & & t_{112} & \text{---} & t_{122} \\
 & \swarrow & | & \swarrow & | \\
 t_{111} & \text{---} & & t_{121} & | \\
 & | & & | & | \\
 & & t_{212} & \text{---} & t_{222} \\
 & \swarrow & | & \swarrow & | \\
 t_{211} & \text{---} & & t_{221} &
 \end{array}$$

Scrivere $F = L_1^d + \dots + L_r^d$ significa **decomporre il tensore** (simmetrico) associato in “pezzi più semplici”, che poi sono quelli di rango minimo.

Possiamo fare ragionamenti simili, e quindi cercare una **decomposizione**, anche per tensori qualsiasi, anche se non avremo più il legame con i polinomi omogenei.

Decomposizione di tensori

In generale, il problema della **decomposizione dei tensori** è ancora aperto, e al giorno d'oggi tanti matematici se ne occupano, non solo geometri algebrici.

Per esempio, non è stato ancora trovato un risultato corrispondente al Teorema di Alexander-Hirschowitz per tensori non simmetrici!

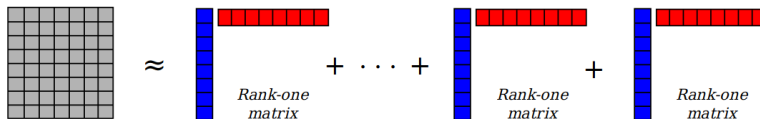
Anche nei casi in cui si sa calcolare una decomposizione, si cercano **algoritmi** per una decomposizione esplicita che il computer possa fare più velocemente possibile.

È anche molto importante capire per quali tensori la decomposizione è **unica** (problema dell'**identificabilità**).

Campi di ricerca che utilizzano la decomposizione dei tensori

Le applicazioni della decomposizione tensoriale appaiono ogni volta che si devono analizzare dei dati, cercando di isolarne certe caratteristiche essenziali:

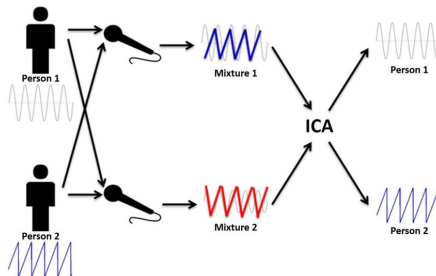
i ricercatori organizzano i dati in una “tabella multi-dimensionale” (un tensore), la cui decomposizione in somma di tensori di rango 1 corrisponde esattamente ad estrapolare le caratteristiche cercate.



Come primi esempi citiamo [signal processing](#) e [blind source separation](#), che in particolare hanno applicazioni sulle telecomunicazioni.

Campi di ricerca che utilizzano la decomposizione dei tensori

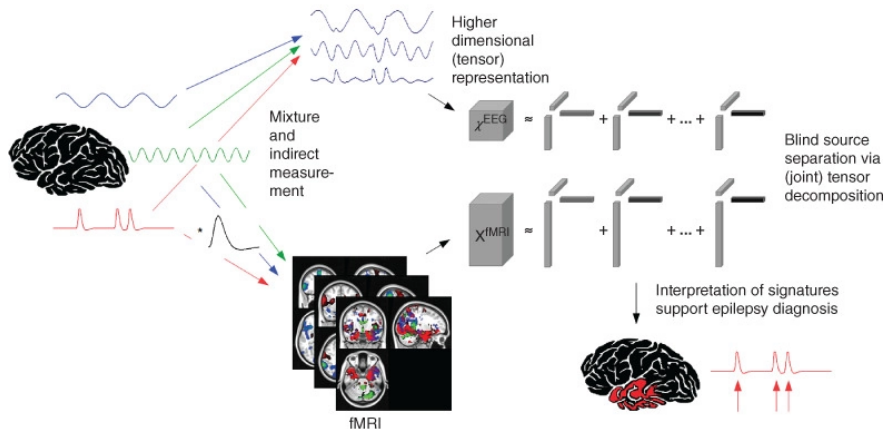
Una primo esempio di BSS è il cosiddetto “cocktail party problem”: ad una festa ci sono tante persone che parlano contemporaneamente, e musica di sottofondo.



Per seguire ciò che ogni persona ha detto, si mettono dei registratori in punti diversi della stanza, e si cerca poi di separare le diverse sorgenti in queste registrazioni, cioè si cerca di **decomporre i tensori** associati!

Campi di ricerca che utilizzano la decomposizione dei tensori

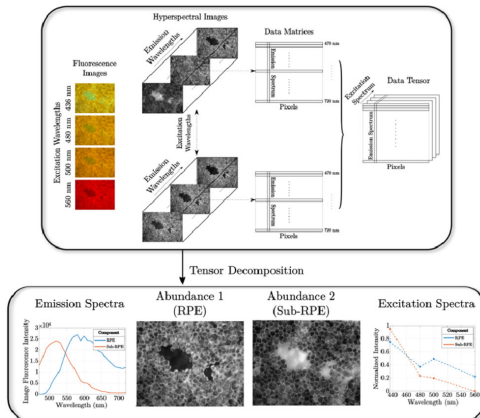
La decomposizione dei tensori si usa anche per le **risonanze magnetiche** e per localizzare l'area del cervello che causa crisi epilettiche. . .



Campi di ricerca che utilizzano la decomposizione dei tensori

... in chimica per determinare i componenti di una soluzione con la **spettroscopia di fluorescenza**, in **machine learning**, **hyperspectral imaging**... e altri ancora!

Multi-excitation Wavelength Hyperspectral Imaging and Tensorization



Bibliografia & sitografia

- *Ideals of Powers and Powers of Ideals - Intersecting Algebra, Geometry, and Combinatorics*, E. Carlini, H. Tàì Hà, B. Harbourne, A. Van Tuyl
- *Tensors: a Brief Introduction*, IEEE Signal Processing Magazine, P. Comon.
- *Tensors: Geometry and Applications*, Graduate Studies in Mathematics, J. M. Landsberg
- Ritratti dei matematici: Wikipedia
- Figura tensor decomposition:
<https://medium.com/@mohammadbashiri93/tensor-decomposition-in-python-f1aa2f9adbf4>
- Figura cocktail party: D. Lubo-Robles
- Figura risonanza magnetica: *Tensor decompositions and data fusion in epileptic electroencephalography and functional magnetic resonance imaging data*, B. Hunyadi, P. Dupont, W. Van Paesschen, S. Van Huffel
- Figura hyperspectral imaging: *Tensor decomposition of hyperspectral images to study autofluorescence in age-related macular degeneration*, N. Dey, S. Hong, T. Ach, Y. Koutalos, C. A. Curcio, R. T. Smith, G. Gerig