Numeri immaginari, quaternioni, meccanica quantistica e grafica 3D

Vincenzo Recupero
vincenzo.recupero@polito.it

Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino

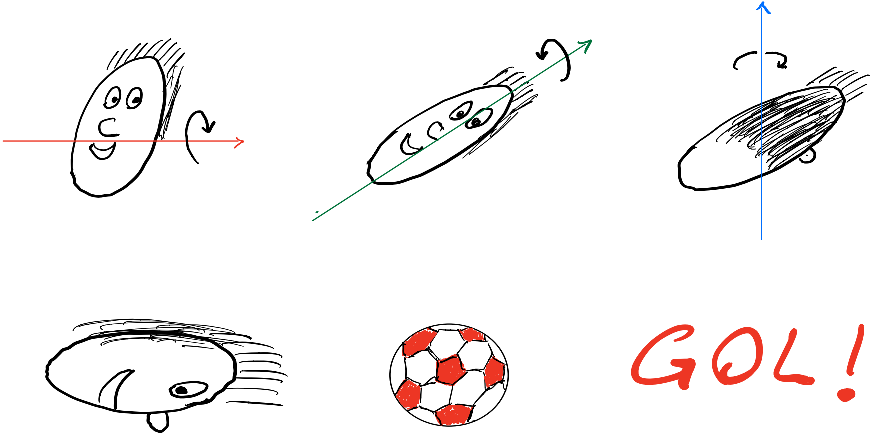
Cominciamo con un video

“Most realistic graphics ever...“

Link: https://www.reddit.com/r/FIFA/comments/9gms3n/most_realistic_graphics_ever_in_fifa_history/

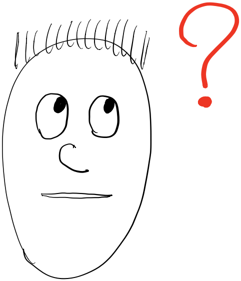
Ogni spostamento di un corpo con un punto che rimane fisso può essere descritto da una sequenza di 3 rotazioni attorno agli assi coordinati:

Ogni spostamento di un corpo con un punto che rimane fisso può essere descritto da una sequenza di 3 rotazioni attorno agli assi coordinati:

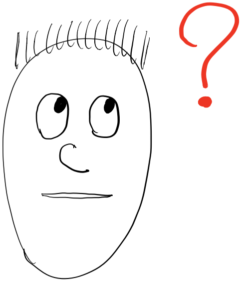


ma per la grafica 3D il risultato non sempre è quello desiderato...

Cè un rimedio?



Cè un rimedio?



Facciamo un passo indietro nel tempo.

Per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ?$$

Per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ?$$

Per

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

purché

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0,$$

Per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ?$$

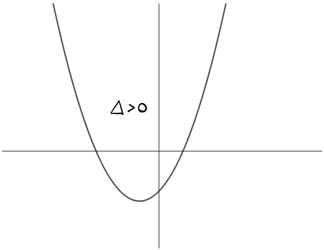
Per

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

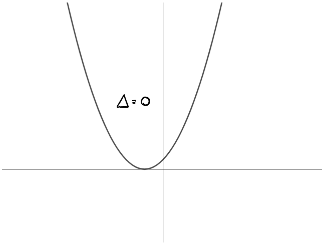
purché

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0,$$

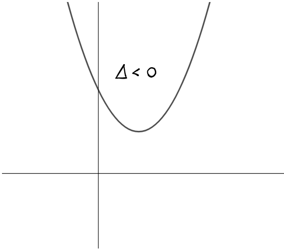
altrimenti non ci sono soluzioni $x \in \mathbb{R}$.



$$\Delta > 0$$



$$\Delta = 0$$



$$\Delta < 0$$

Le formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

fu trovata da un matematico indiano, Brahmagupta, nel 628.

Le formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

fu trovata da un matematico indiano, Brahmagupta, nel 628.

Ma alcuni equazioni di grado 2 furono risolte già nel 2000 AC in Babilonia.

Le formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

fu trovata da un matematico indiano, Brahmagupta, nel 628.

Ma alcuni equazioni di grado 2 furono risolte già nel 2000 AC in Babilonia.

A che servono?

Qual è il rettangolo di area A e perimetro P ?

Qual è il rettangolo di area A e perimetro P ?

Cioè, qual è il rettangolo di lati x e y per cui $\begin{cases} 2x + 2y = P \\ xy = A \end{cases}$?

Qual è il rettangolo di area A e perimetro P ?

Cioè, qual è il rettangolo di lati x e y per cui $\begin{cases} 2x + 2y = P \\ xy = A \end{cases}$?

$$\begin{cases} 2x + 2y = P \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases}$$

Qual è il rettangolo di area A e perimetro P ?

Cioè, qual è il rettangolo di lati x e y per cui $\begin{cases} 2x + 2y = P \\ xy = A \end{cases}$?

$$\begin{cases} 2x + 2y = P \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2\dfrac{A}{x} = P \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases}$$

Qual è il rettangolo di area A e perimetro P ?

Cioè, qual è il rettangolo di lati x e y per cui $\begin{cases} 2x + 2y = P \\ xy = A \end{cases}$?

$$\begin{cases} 2x + 2y = P \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2\dfrac{A}{x} = P \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 + 2A = Px \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases}$$

Qual è il rettangolo di area A e perimetro P ?

Cioè, qual è il rettangolo di lati x e y per cui $\begin{cases} 2x + 2y = P \\ xy = A \end{cases}$?

$$\begin{cases} 2x + 2y = P \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2\dfrac{A}{x} = P \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 + 2A = Px \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - Px + 2A = 0 \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases}$$

Qual è il rettangolo di area A e perimetro P ?

Cioè, qual è il rettangolo di lati x e y per cui $\begin{cases} 2x+2y=P \\ xy=A \end{cases}$?

$$\begin{cases} 2x+2y=P \\ y=\dfrac{A}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+2\dfrac{A}{x}=P \\ y=\dfrac{A}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2+2A=Px \\ y=\dfrac{A}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2-Px+2A=0 \\ y=\dfrac{A}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{P\pm\sqrt{P^2-16A}}{4} \\ y=\dfrac{A}{x} \end{cases}$$

Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange
ECCELLENZA 2018 · 2022

Qual è il rettangolo di area A e perimetro P ?

Cioè, qual è il rettangolo di lati x e y per cui $\begin{cases} 2x + 2y = P \\ xy = A \end{cases}$?

$$\begin{cases} 2x + 2y = P \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2\dfrac{A}{x} = P \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 + 2A = Px \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - Px + 2A = 0 \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{P \pm \sqrt{P^2 - 16A}}{4} \\ y = A\dfrac{4}{P \pm \sqrt{P^2 - 16A}} \end{cases}$$

Qual è il rettangolo di area A e perimetro P ?

Cioè, qual è il rettangolo di lati x e y per cui $\begin{cases} 2x + 2y = P \\ xy = A \end{cases}$?

$$\begin{cases} 2x + 2y = P \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 2\dfrac{A}{x} = P \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 + 2A = Px \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - Px + 2A = 0 \\ y = \dfrac{A}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{P + \sqrt{P^2 - 16A}}{4} \\ y = A\dfrac{4}{P + \sqrt{P^2 - 16A}} \end{cases}$$

Per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad ?$$

Per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad ?$$

Questo problema impegnò un gruppo di matematici italiani del 16$^{\text{o}}$ secolo:

Scipione del Ferro
Nicolò Tartaglia
Girolamo Cardano
Ludovico Ferrari
Raffaele Bombelli
...

Per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad ?$$

Questo problema impegnò un gruppo di matematici italiani del 16° secolo:

Scipione del Ferro
Nicolò Tartaglia
Girolamo Cardano
Ludovico Ferrari
Raffaele Bombelli
...

$$x = \quad ???$$

Per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad ?$$

Questo problema impegnò un gruppo di matematici italiani del 16^{o} secolo:

Scipione del Ferro
Nicolò Tartaglia
Girolamo Cardano
Ludovico Ferrari
Raffaele Bombelli
...

$$x = \quad ???$$

Motivazioni puramente speculative!

Limitiamoci a considerare il caso particolare di equazioni del tipo

$$x^3 + px + q = 0$$

alle quali ci si può ricondurre con un cambio di variabile.

Limitiamoci a considerare il caso particolare di equazioni del tipo

$$x^3 + px + q = 0$$

alle quali ci si può ricondurre con un cambio di variabile.

Osserviamo poi che è sufficiente trovare una sola soluzione x_0, infatti:

$$x^3 + px + q = (x - x_0)(x^2 + \alpha x + \beta)$$

e poi si risolve $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ con la ben nota formula vista in precedenza.

Problema: trovare un $x \in \mathbb{R}$ per cui

$$x^3 + px + q = 0$$

Problema: trovare un $x \in \mathbb{R}$ per cui

$$x^3 + px + q = 0$$

Cardano nel 1545 trovò la formula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

se

$$\Delta_3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$$

Problema: trovare un $x \in \mathbb{R}$ per cui

$$x^3 + px + q = 0$$

Cardano nel 1545 trovò la formula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

se

$$\Delta_3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$$

E se

$$\Delta_3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0 \quad ?????$$

Problema: trovare un $x \in \mathbb{R}$ per cui

$$x^3 + px + q = 0$$

Cardano nel 1545 trovò la formula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

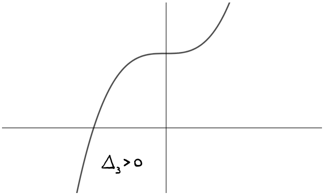
se

$$\Delta_3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$$

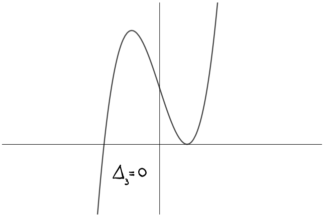
E se

$$\Delta_3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0 \quad ?????$$

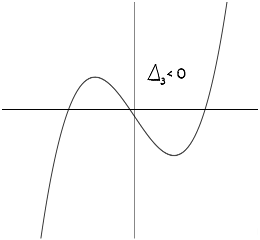
Cardano aveva capito che anche in questo caso c'erano soluzioni $x \in \mathbb{R}$!!



$\Delta_3 > 0$



$\Delta_3 = 0$



$\Delta_3 < 0$

Esempio: $x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad (p = -15,\ q = -4).$

$$\Delta_3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -121 < 0$$

Esempio: $x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad (p = -15,\ q = -4)$.

$$\Delta_3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -121 < 0$$

e la formula di Cardano:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Esempio: $x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad (p = -15,\ q = -4).$

$$\Delta_3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -121 < 0$$

e la formula di Cardano diventa:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Esempio: $x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad (p = -15,\ q = -4)$.

$$\Delta_3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -121 < 0$$

e la formula di Cardano diventa:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Esempio: $x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad (p = -15,\ q = -4)$.

$$\Delta_3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -121 < 0$$

e la formula di Cardano diventa:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Esempio: $x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad (p = -15,\ q = -4)$.

$$\Delta_3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -121 < 0$$

e la formula di Cardano diventa:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} \\ &= \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \end{aligned}$$

dove

i è il numero *immaginario* $\sqrt{-1}$ per cui $i^2 = -1$.

Esempio: $x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad (p = -15,\ q = -4)$.

$$\Delta_3 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -121 < 0$$

e la formula di Cardano diventa:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} \end{aligned}$$

dove

i è il numero *immaginario* $\sqrt{-1}$ per cui $i^2 = -1$.

Però l'equazione ha come soluzioni $x = 4$, $x = -2 - \sqrt{3}$, $x = -2 + \sqrt{3}$

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

Cos'è $\sqrt[3]{2+11i}$?

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

Cos'è $\sqrt[3]{2+11i}$? Bombelli osservò che se $i^2 = -1$ allora

$$(2+i)^3$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

Cos'è $\sqrt[3]{2+11i}$? Bombelli osservò che se $i^2 = -1$ allora

$$(2+i)^3 = (2+i)^2(2+i)$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

Cos'è $\sqrt[3]{2+11i}$? Bombelli osservò che se $i^2 = -1$ allora

$$(2+i)^3 \quad = \quad (2+i)^2(2+i) = (4+4i+i^2)(2+i)$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

Cos'è $\sqrt[3]{2+11i}$? Bombelli osservò che se $i^2 = -1$ allora

$$(2+i)^3 \;\; = \;\; (2+i)^2(2+i) = (4+4i+i^2)(2+i) = (4+4i-1)(2+i)$$

Politecnico di Torino 1859

Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange DISMA ECCELLENZA 2018 · 2022

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

Cos'è $\sqrt[3]{2+11i}$? Bombelli osservò che se $i^2 = -1$ allora

$$\begin{aligned} (2+i)^3 &= (2+i)^2(2+i) = (4+4i+i^2)(2+i) = (4+4i-1)(2+i) \\ &= 8+8i-2+4i+4i^2-i \end{aligned}$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

Cos'è $\sqrt[3]{2+11i}$? Bombelli osservò che se $i^2 = -1$ allora

$$\begin{aligned}(2+i)^3 &= (2+i)^2(2+i) = (4+4i+i^2)(2+i) = (4+4i-1)(2+i)\\ &= 8+8i-2+4i+4i^2-i = 8+8i-2+4i-4-i\end{aligned}$$

Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange
ECCELLENZA 2018 · 2022

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

Cos'è $\sqrt[3]{2+11i}$? Bombelli osservò che se $i^2 = -1$ allora

$$\begin{aligned}
(2+i)^3 &= (2+i)^2(2+i) = (4+4i+i^2)(2+i) = (4+4i-1)(2+i) \\
&= 8+8i-2+4i+4i^2-i = 8+8i-2+4i-4-i \\
&= 2+11i
\end{aligned}$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

Cos'è $\sqrt[3]{2+11i}$? Bombelli osservò che se $i^2 = -1$ allora

$$\begin{aligned}
(2+i)^3 &= (2+i)^2(2+i) = (4+4i+i^2)(2+i) = (4+4i-1)(2+i) \\
&= 8+8i-2+4i+4i^2-i = 8+8i-2+4i-4-i \\
&= 2+11i
\end{aligned}$$

quindi
$$2+i = \sqrt[3]{2+11i}$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

Cos'è $\sqrt[3]{2+11i}$? Bombelli osservò che se $i^2 = -1$ allora

$$\begin{aligned}
(2+i)^3 &= (2+i)^2(2+i) = (4+4i+i^2)(2+i) = (4+4i-1)(2+i) \\
&= 8+8i-2+4i+4i^2-i = 8+8i-2+4i-4-i \\
&= 2+11i
\end{aligned}$$

quindi $\qquad 2+i = \sqrt[3]{2+11i}$

Analogamente $\qquad 2-i = \sqrt[3]{2-11i}$

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

Cos'è $\sqrt[3]{2+11i}$? Bombelli osservò che se $i^2 = -1$ allora

$$\begin{aligned}
(2+i)^3 &= (2+i)^2(2+i) = (4+4i+i^2)(2+i) = (4+4i-1)(2+i) \\
&= 8+8i-2+4i+4i^2-i = 8+8i-2+4i-4-i \\
&= 2+11i
\end{aligned}$$

quindi $\qquad 2+i = \sqrt[3]{2+11i}$

Analogamente $\qquad 2-i = \sqrt[3]{2-11i}$

Allora

$$\sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

Cos'è $\sqrt[3]{2+11i}$? Bombelli osservò che se $i^2 = -1$ allora

$$\begin{aligned}(2+i)^3 &= (2+i)^2(2+i) = (4+4i+i^2)(2+i) = (4+4i-1)(2+i)\\ &= 8+8i-2+4i+4i^2-i = 8+8i-2+4i-4-i\\ &= 2+11i\end{aligned}$$

quindi $2+i = \sqrt[3]{2+11i}$

Analogamente $2-i = \sqrt[3]{2-11i}$

Allora

$$\sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} = (2+i)+(2-i)$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \qquad ?? \;\; x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \;\; ??$$

Cos'è $\sqrt[3]{2+11i}$? Bombelli osservò che se $i^2 = -1$ allora

$$\begin{aligned}(2+i)^3 &= (2+i)^2(2+i) = (4+4i+i^2)(2+i) = (4+4i-1)(2+i)\\ &= 8+8i-2+4i+4i^2-i = 8+8i-2+4i-4-i\\ &= 2+11i\end{aligned}$$

quindi $\qquad 2+i = \sqrt[3]{2+11i}$

Analogamente $\qquad 2-i = \sqrt[3]{2-11i}$

Allora

$$\sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} = (2+i) + (2-i) = 4$$

che è proprio una soluzione di $x^3 - 15x - 4 = 0$!

È così che sono nati i numeri *immaginari*: i, $11i$, $-11i$, ...

È così che sono nati i numeri *immaginari*: i, $11i$, $-11i$, ...

e quindi i numeri del tipo $2+11i$, $2-11i$, ...

È così che sono nati i numeri *immaginari*: i, $11i$, $-11i$, ...

e quindi i numeri del tipo $2+11i$, $2-11i$, ... detti

numeri complessi

È così che sono nati i numeri *immaginari*: i, $11i$, $-11i$, ...
e quindi i numeri del tipo $2 + 11i$, $2 - 11i$, ... detti

numeri complessi

cioè i numeri del tipo

$$a + bi$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ e la regola moltiplicativa

$$i^2 = -1$$

L'insieme di tutti i numeri complessi $a+bi$ si indica col simbolo $\mathbb{C}$

Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange

ECCELLENZA 2018 · 2022

[1] vedi nota al termine delle slide

L'insieme di tutti i numeri complessi $a + bi$ si indica col simbolo $\mathbb{C}$

Ed è vero il seguente celebre *Teorema Fondamentale dell'Algebra*:

Ogni equazione $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ ha soluzioni complesse.

[1] vedi nota al termine delle slide

L'insieme di tutti i numeri complessi $a + bi$ si indica col simbolo $\mathbb{C}$

Ed è vero il seguente celebre *Teorema Fondamentale dell'Algebra*:

Ogni equazione $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ ha soluzioni complesse.

Ad esempio $x^2 + 1 = 0$ ha le due soluzioni complesse $x_1 = i$ e $x_2 = -i$.

[1] vedi nota al termine delle slide

L'insieme di tutti i numeri complessi $a+bi$ si indica col simbolo $\mathbb{C}$

Ed è vero il seguente celebre *Teorema Fondamentale dell'Algebra*:

Ogni equazione $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ ha soluzioni complesse.

Ad esempio $x^2+1=0$ ha le due soluzioni complesse $x_1 = i$ e $x_2 = -i$.

Si possono estrarre radici quadrate di numeri negativi e la formula Cardano

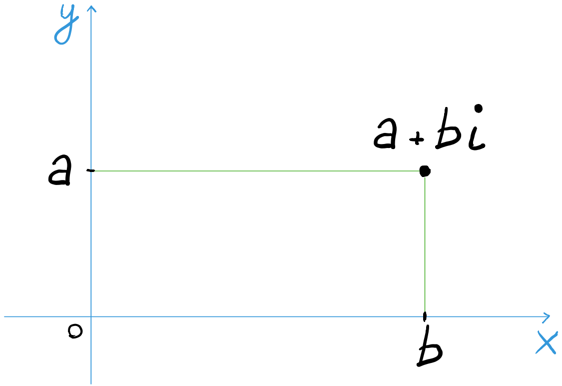
$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ha senso in $\mathbb{C}$ e ci restituisce la soluzioni dell'equazione di grado 3 !!! [1]

DISMA Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange
ECCELLENZA 2018 · 2022

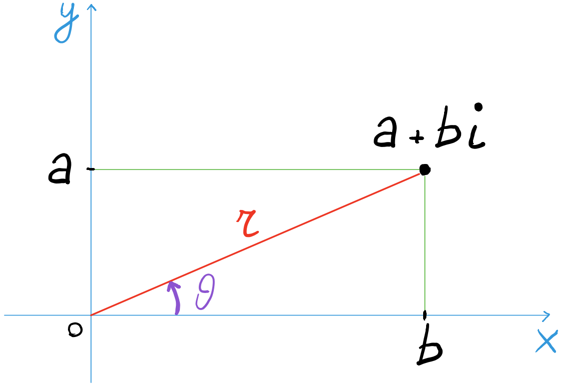
[1] vedi nota al termine delle slide

Ogni numero complesso $a + bi \in \mathbb{C}$ è associato ad un punto del piano (a, b)



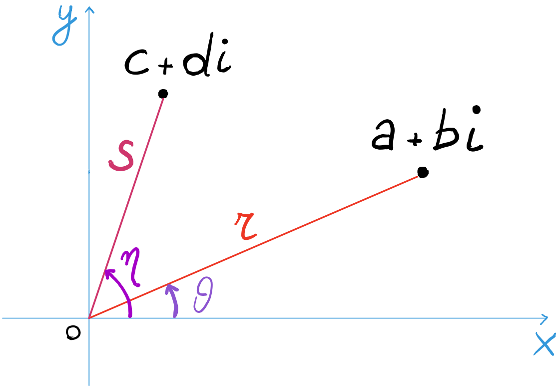
Il piano di Gauss

Ogni numero complesso $a + bi \in \mathbb{C}$ è associato ad un punto del piano (a, b)



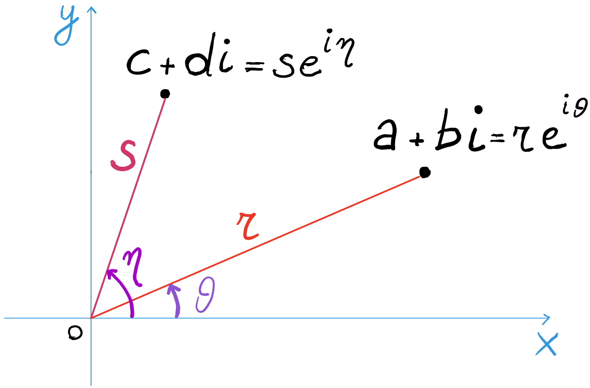
$$a + bi = (r\cos\theta) + (r\sin\theta)i$$

Ogni numero complesso $a + bi \in \mathbb{C}$ è associato ad un punto del piano (a, b)



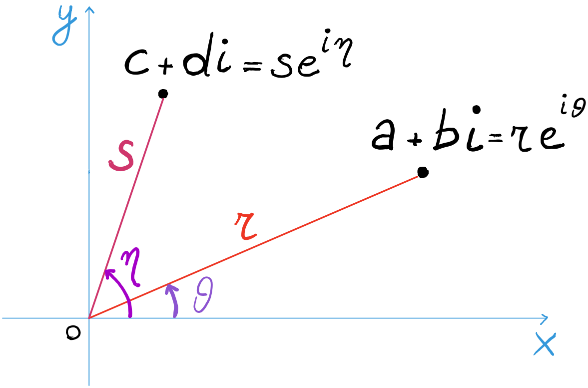
$$(a + bi)(c + di) = [rs\cos(\theta + \eta)] + [rs\sin(\theta + \eta)]i$$

Ogni numero complesso $a + bi \in \mathbb{C}$ è associato ad un punto del piano (a, b)



$$(a + bi)(c + di) = (rs\cos(\theta + \eta) + (rs\sin(\theta + \eta))i$$

Ogni numero complesso $a + bi \in \mathbb{C}$ è associato ad un punto del piano (a, b)



$$(re^{i\theta})(se^{i\eta}) = rs\, e^{i(\theta+\eta)}$$

Nel 1925 Erwin Schröedinger formulò la sua famosa equazione

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Qui $\psi = \psi(x, t)$ è un numero complesso dipendente dalla posizione spaziale x che una particella può occupare nell'istante t.

Nel 1925 Erwin Schröedinger formulò la sua famosa equazione

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Qui $\psi = \psi(x,t)$ è un numero complesso dipendente dalla posizione spaziale x che una particella può occupare nell'istante t.

La quantità

$$P = |\psi(x,t)|^2$$

è la probabilità che all'istante t la particella si trovi nella posizione x.

Nel 1925 Erwin Schröedinger formulò la sua famosa equazione

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Qui $\psi = \psi(x, t)$ è un numero complesso dipendente dalla posizione spaziale x che una particella può occupare nell'istante t.

La quantità

$$P = |\psi(x, t)|^2$$

è la probabilità che all'istante t la particella si trovi nella posizione x.

I numeri complessi entrano quindi in gioco in una legge fisica.

Dal *complesso* all'*ipercomplesso*...

William Rowan Hamilton nel 1843 estese i numeri complessi

$$a + bi$$

William Rowan Hamilton nel 1843 estese i numeri complessi

$$a + bi + cj$$

William Rowan Hamilton nel 1843 estese i numeri complessi

$$a + bi + cj + dk$$

William Rowan Hamilton nel 1843 estese i numeri complessi

$$a + bi + cj + dk$$

inventando così i *quaternioni* $\mathbb{H}$.

William Rowan Hamilton nel 1843 estese i numeri complessi

$$a + bi + cj + dk$$

inventando così i *quaternioni* $\mathbb{H}$.
Riuscì a moltiplicarli ponendo

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

William Rowan Hamilton nel 1843 estese i numeri complessi

$$a + bi + cj + dk$$

inventando così i *quaternioni* $\mathbb{H}$.
Riuscì a moltiplicarli ponendo

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

ad esempio:

$$(1 + 2j)(3 - k)$$

William Rowan Hamilton nel 1843 estese i numeri complessi

$$a + bi + cj + dk$$

inventando così i *quaternioni* $\mathbb{H}$.
Riuscì a moltiplicarli ponendo

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

ad esempio:

$$(1 + 2j)(3 - k) = 3 + 6j - k - 2jk$$

William Rowan Hamilton nel 1843 estese i numeri complessi

$$a + bi + cj + dk$$

inventando così i *quaternioni* $\mathbb{H}$.
Riuscì a moltiplicarli ponendo

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

ad esempio:

$$(1 + 2j)(3 - k) = 3 + 6j - k - 2jk = 3 + 6j - k - 2i$$

William Rowan Hamilton nel 1843 estese i numeri complessi

$$a + bi + cj + dk$$

inventando così i *quaternioni* $\mathbb{H}$.
Riuscì a moltiplicarli ponendo

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

ad esempio:

$$(1 + 2j)(3 - k) = 3 + 6j - k - 2jk = 3 + 6j - k - 2i = 3 - 2i + 6j - k$$

William Rowan Hamilton nel 1843 estese i numeri complessi

$$a + bi + cj + dk$$

inventando così i *quaternioni* $\mathbb{H}$.
Riuscì a moltiplicarli ponendo

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

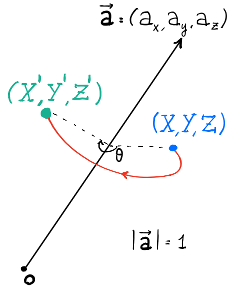
ad esempio:

$$(1 + 2j)(3 - k) = 3 + 6j - k - 2jk = 3 + 6j - k - 2i = 3 - 2i + 6j - k$$

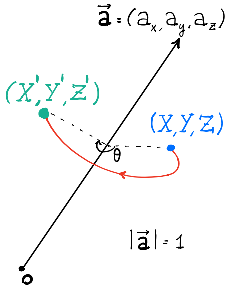
L'insieme $\mathbb{H}$ dei quaternioni è un po' bizarro: se $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ in genere

$$\mathbf{pq} \neq \mathbf{qp}$$

La bizarra moltiplicazione in $\mathbb{H}$ permette però di esprimere con una formula compatta le rotazioni nello spazio

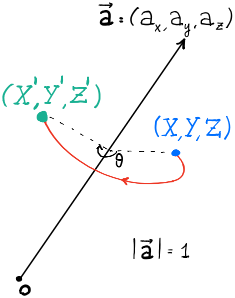


La bizarra moltiplicazione in $\mathbb{H}$ permette però di esprimere con una formula compatta le rotazioni nello spazio



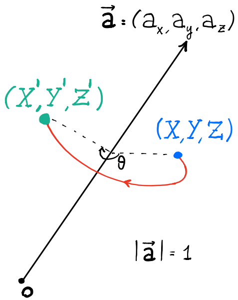
$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 &\ni (X, Y, Z) && \rightsquigarrow && Xi + Yj + Zk && \in \mathbb{H} \\
\mathbb{R}^3 &\ni (X', Y', Z') && \rightsquigarrow && X'i + Y'j + Z'k && \in \mathbb{H} \\
\mathbb{R}^3 &\ni (a_x, a_y, a_z) && \rightsquigarrow && a_x i + a_y j + a_z k && \in \mathbb{H}
\end{aligned}
$$

Ruotiamo il punto (X, Y, Z) di un angolo θ attorno all'asse $\vec{a}$.
Otteniamo il punto (X', Y', Z'):



Ruotiamo il punto (X, Y, Z) di un angolo θ attorno all'asse $\vec{a}$.
Otteniamo il punto (X', Y', Z'):

$$X'i + Y'j + Z'k = \mathbf{q}\,(Xi + Yj + Zk)\,\frac{1}{\mathbf{q}}$$



dove

$$\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(a_x i + a_y j + a_z k) \in \mathbb{H}$$

Formula compatta per le rotazioni

Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange
DISMA ECCELLENZA 2018 · 2022

Politecnico di Torino 1859

I quaternioni sono più efficienti per gestire le rotazioni degli angoli di Eulero.

I quaternioni sono più efficienti per gestire le rotazioni degli angoli di Eulero.

I quaternioni sono numericamente più stabili.

I quaternioni sono più efficienti per gestire le rotazioni degli angoli di Eulero.

I quaternioni sono numericamente più stabili.

Il movimento rigido di un corpo viene effettuato con una transizione più fluida.

I quaternioni sono più efficienti per gestire le rotazioni degli angoli di Eulero.

I quaternioni sono numericamente più stabili.

Il movimento rigido di un corpo viene effettuato con una transizione più fluida.

I colpi di testa vengono meglio...

Considerazioni finali

Considerazioni finali

Motivazioni puramente speculative (= culturali)

Considerazioni finali

Motivazioni puramente speculative (= culturali)

$\Downarrow$

Numeri complessi

Considerazioni finali

Motivazioni puramente speculative (= culturali)

$\Downarrow$

Numeri complessi

$\Downarrow$

Applicazioni in fisica, elettrotecnica, robotica, grafica 3D, ...

Considerazioni finali

Motivazioni puramente speculative (= culturali)

$\Downarrow$

Numeri complessi

$\Downarrow$

Applicazioni in fisica, elettrotecnica, robotica, grafica 3D, ...

$\Downarrow$

Importanza della libertà di ricerca

GRAZIE DELL'ATTENZIONE!

GRAZIE DELL'ATTENZIONE!

VENITE AL POLI!

Nota 1: Ci vuole comunque un po' di cautela nell'utilizzare la formula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Nel caso in esame con $p, q \in \mathbb{R}$ si ha che: se $\Delta_3 \geq 0$ allora $\sqrt{\Delta_3} \in \mathbb{R}$ e le due radici terze sono reali e la formula fornisce una soluzione reale di $x^3 + px + q = 0$; se $\Delta_3 < 0$ allora $\sqrt{\Delta_3} = i\sqrt{-\Delta_3}$ con $\sqrt{-\Delta_3} \in \mathbb{R}$ e la formula si scrive

$$x = \sqrt[3]{-q/2 + i\sqrt{-\Delta_3}} + \sqrt[3]{-q/2 - i\sqrt{-\Delta_3}}$$

Esistono 3 radici terze complesse u_1, u_2, u_3 di $-q/2 + i\sqrt{-\Delta_3}$, e 3 radici terze complesse v_1, v_2, v_3 di $-q/2 - i\sqrt{-\Delta_3}$, per cui vanno considerate tutte le combinazioni $u_1 + v_1$, $u_1 + v_2$, ..., $u_3 + v_3$. Di tutte queste combinazioni va presa solo una di quelle che risultano reali. Poi si fattorizza e si trovano le altre due radici di $x^3 + px + q = 0$.

La formula ha però senso anche se $p, q \in \mathbb{C}$, e in tal caso $\Delta_3 \in \mathbb{C}$. Questa circostanza è molto più delicata. Δ_3 ha in ogni caso 2 radici complesse w e $-w$, e ci sono 3 radici terze complesse u_1, u_2, u_3 di $\sqrt[3]{-q/2+w}$, e 3 radici terze complesse v_1, v_2, v_3 di $\sqrt[3]{-q/2-w}$. Facendo tutte le combinazioni di

$$\sqrt[3]{-q/2+w} + \sqrt[3]{-q/2-w}$$

otteniamo 9 valori $u_1 + v_1$, $u_1 + v_2$, ..., $u_3 + v_3$. Si vede che, di queste 9 combinazioni, le soluzioni di $x^3 + px + q = 0$ sono solo le 3 per cui $u_h v_k = -p/3$ (almeno una delle quali è reale). Tale procedura funziona ovviamente anche nel caso particolare precedente in cui $p, q \in \mathbb{R}$.