DISMA Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange

ECCELLENZA 2018 • 2022

Le matematiche del marketing
Ovvero, come unire sacro e profano

Paolo Brandimarte
paolo.brandimarte@polito.it

9 giugno 2021

POLITECNICO DI TORINO

Obiettivi della presentazione

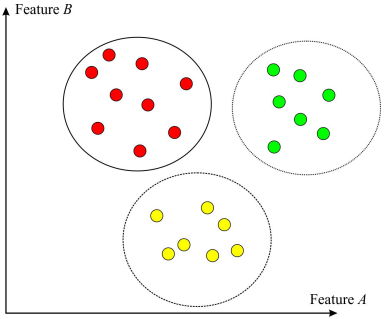
- Introdurre alcuni problemi rilevanti nel marketing quantitativo.
- Illustrare il ruolo dei modelli matematici e in particolare:
  - algoritmi di unsupervised learning;
  - algoritmi di supervised learning;
  - modelli di ottimizzazione;
  - modelli di scelta del consumatore;
  - teoria dei giochi.
- Spiegare come questi argomenti si inseriscono nel corso di laurea magistrale in Ingegneria Matematica, e come questo si differenzia da altri corsi di laurea, come Ingegneria Gestionale e Matematica.

Metodi di clustering e segmentazione del mercato

Uno degli ingredienti fondamentali in marketing è la segmentazione del mercato, in modo da indirizzare al meglio specifiche necessità e preferenze.

I metodi di clustering hanno l'obiettivo di formare classi omogenee di entità, sulla base di caratteristiche qualitative e quantitative.

Si tratta di un tipico esempio di learning non supervisionato.

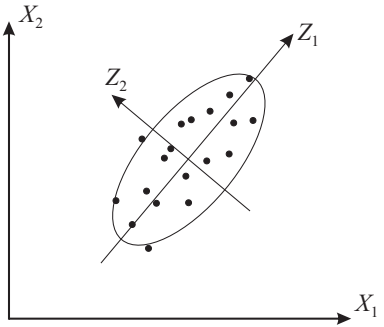


Metodi di data reduction e mappe di percezione

Come possiamo rappresentare in due dimensioni le caratteristiche multidimensionali di prodotti diversi, in modo da coglierne il posizionamento reciproco?

I metodi di data reduction, come l'analisi delle componenti principali, hanno l'obiettivo di catturare la maggior informazione possibile creando un numero limitato di combinazioni delle variabili originarie.

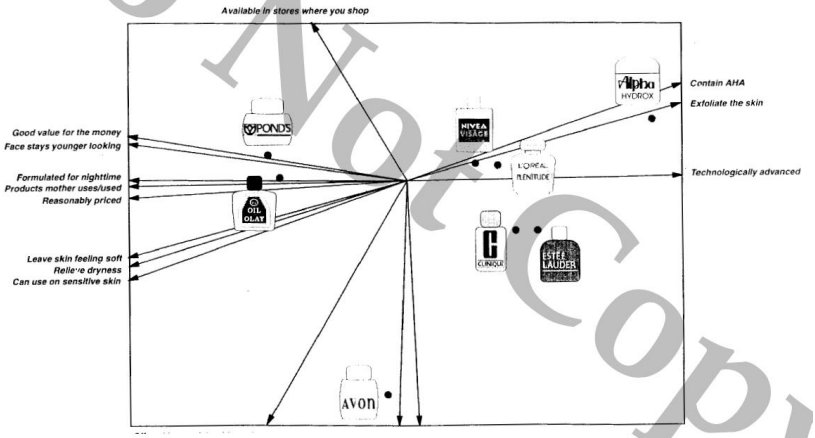
Anche questo è un esempio di learning non supervisionato.



Do Not Copy

PERCEPTUAL MAP OF BRAND IMAGERY

- AMONG AWARE OF BRAND -

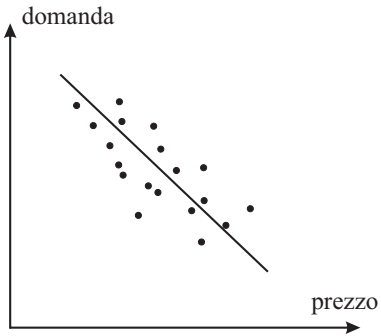


Apprendimento supervisionato: regressione lineare

Uno dei problemi tipici è la determinazione del prezzo ottimale di un bene o un servizio. Come possiamo investigare la relazione tra prezzo di un bene e domanda?

Possiamo sperimentare diversi price point e misurare la domanda osservata, in modo da costruire un modello approssimato, che poi ci permette di determinare il prezzo ottimale.

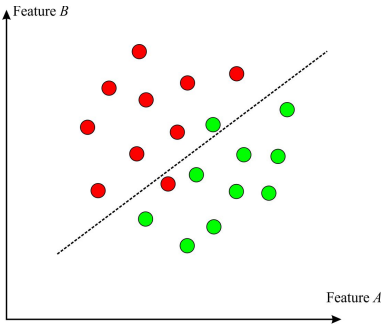
Un approccio classico è la regressione lineare mediante il metodo dei minimi quadrati, un esempio di learning supervisionato.



Apprendimento supervisionato: classificatori

Nel caso della regressione lineare, la variabile target è quantitativa. Nel caso di target categorici, abbiamo a che fare con un classificatore.

Il classificatore può avere un target binario (compro/non compro), sulla base di caratteristiche del prodotto e/o del consumatore. Quindi esso può essere utilizzato per prevedere la probabilità di acquisto. È possibile anche avere categorie multiple, nel qual caso otteniamo un modello di scelta più complesso.



Si noti la differenza rispetto agli algoritmi di clustering: in questo caso le etichette di classe sono date, e quindi abbiamo un altro esempio di learning supervisionato.

Pricing ottimale

Come possiamo scegliere il prezzo di un bene o di un servizio? Introduciamo un semplice modello lineare che lega domanda e prezzo:

$$d(p) = \alpha - \beta p, \qquad \text{valido per } p \leq \alpha/\beta. \tag{1}$$

Se assumiamo che anche il costo di produzione sia lineare, possiamo massimizzare il profitto risolvendo il problema

$$\max_{p \geq 0} (\alpha - \beta p) \cdot (p - c).$$

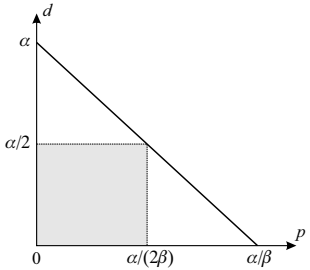
Annullando la derivata prima,

$$-2\beta p + \beta b c + \alpha = 0, \qquad \text{troviamo} \qquad p^* = \frac{\alpha + \beta c}{2\beta}.$$

Spesso il costo marginale di una unità aggiuntiva è trascurabile (trasporto aereo, saldi, servizi web). In questo caso ha senso massimizzare il ricavo, ponendo $c = 0$ e ottenendo

$$p^* = \frac{\alpha}{2\beta}.$$

La soluzione ha una semplice interpretazione geometrica come massimizzazione di un'area:

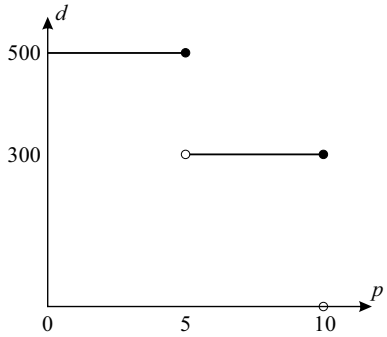


L'interpretazione geometrica suggerisce che, applicando prezzi diversi per segmenti di mercato diversi, possiamo incrementare il ricavo.

Per esempio, consideriamo la disponibilità a pagare di diverse categorie per uno spettacolo teatrale:

	studenti	non studenti
disponibilità a pagare	€ 5	€ 10
dimensione del segmento	200	300

Otteniamo la curva di domanda in figura.



Se scegliamo di vendere a 10€, il ricavo sarà

$$10 \times 300 = €3000.$$

Se il prezzo è 5€, otteniamo

$$5 \times (200 + 300) = €2500.$$

Se possiamo operare discriminazione di prezzo,

$$5 \times 200 + 10 \times 300 = €4000.$$

Competizione su prezzi per beni non omogenei

Consideriamo due aziende, A e B, che offrono due beni diversi a prezzi p_A e p_B. Le teoria dei giochi permette di formulare una previsione circa i prezzi di equilibrio (di Nash).

Supponiamo che le preferenze dei consumatori, rispetto a una singola caratteristica del prodotto, si possano rappresentare su una scala da 0 a L.

L'azienda A produce un bene in cui la caratteristica ha valore a, mentre l'azienda B produce un bene con caratteristica al livello $L - b$.

Il modello della strada lineare di Hotelling permette di rappresentare le scelte di ogni consumatore, che media tra il prezzo e la distanza dal suo prodotto preferito. Se introduciamo un "costo di trasporto" τ, il cliente che preferisce un prodotto a livello x ha una utilità derivante dalla scelta

$$u(x) = \begin{cases} -p_A - \tau \cdot | \, x - a \, | & \text{se sceglie la marca } A, \\ -p_B - \tau \cdot | \, x - (L - b) \, | & \text{se sceglie la marca } B. \end{cases}$$

Avremo un cliente critico, posizionato in x_i, $a < x_i < L - b$, indifferente tra le due marche:

$$-p_A - \tau \cdot (x_i - a) = -p_B - \tau \cdot (L - b - x_i),$$

da cui otteniamo

$$x_i = \frac{p_B - p_A}{2\tau} + \frac{L - b + a}{2}.$$

In funzione dei prezzi, la marca A cattura tutta la domanda nell'intervallo $[0, x_i)$, mentre per la marca B abbiamo

$$L - x_i = \frac{p_A - p_B}{2\tau} + \frac{L + b - a}{2}.$$

Applicando concetti di teoria dei giochi, la marca A, per un dato prezzo p_B, trova il suo prezzo ottimale risolvendo il problema

$$\max_{p_A} \pi_A = \frac{p_B p_A - p_A^2}{2\tau} + \frac{L - b + a}{2} \cdot p_A,$$

mentre la marca B, per un dato prezzo p_A, risolve

$$\max_{p_B} \pi_B = \frac{p_A p_B - p_B^2}{2\tau} + \frac{L + b - a}{2} \cdot p_B.$$

Per trovare i prezzi di equilibrio, annulliamo le derivate

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = \frac{p_B - 2p_A}{2\tau} + \frac{L - b + a}{2} = 0,$$
$$\frac{\partial \pi_B}{\partial p_B} = \frac{p_A - 2p_B}{2\tau} + \frac{L + b - a}{2} = 0,$$

e troviamo

$$p_A^e = \frac{\tau(3L - b + a)}{3}, \qquad p_B^e = \frac{\tau(3L + b - a)}{3}.$$

Si osserva come i prezzi saranno tanto più alti quanto più è grande il coefficiente τ, che misura quanto forte è la preferenza dei consumatori per le marche.

Si tratta di un modello molto stilizzato, ma il messaggio è che per competere sui prezzi le aziende devono individuare segmenti specifici e differenziare il prodotto, rispetto a caratteristiche multidimensionali del prodotto e rispetto ai prezzi.