DISMA Dipartimento di Scienze Matematiche G. L. Lagrange

ECCELLENZA 2018 · 2022

Ingegneria Matematica e Ingegneria Finanziaria. Può un ingegnere vincere il premio Nobel per l'economia?

Paolo Brandimarte

paolo.brandimarte@polito.it

22 dicembre 2020 [inizio ore 16:30]

POLITECNICO DI TORINO

Obiettivi della presentazione

- Introdurre concetti di ingegneria finanziaria legati al pricing di opzioni.
- Risolvere una versione semplificata del problema, illustrando il ruolo dell'algebra lineare e motivando modelli matematici più sofisticati.
- Introdurre un modello più realistico, detto di Black–Scholes–Merton, basato sul moto Browniano e legato all'equazione del calore.
  Scholes e Merton (un ingegnere) ricevettero il premio Nobel per l'economia nel 1997.
- Illustrare le connessioni tra teoria finanziaria, probabilità e statistica, analisi numerica e fisica matematica.
  Questo carattere interdisciplinare è alla radice del corso di laurea in Ingegneria Matematica.

Le opzioni finanziarie

Consideriamo il prezzo di un asset (azione, valuta, materia prima) al tempo t, indicato con S_t.

Il prezzo S_0 dell'asset al tempo $t = 0$ (ora) è noto, mentre il prezzo S_T in un istante di tempo futuro $t = T$ è soggetto a incertezza.

Se deteniamo l'asset ora e intendiamo venderlo nel futuro, siamo esposti al rischio di una riduzione del suo prezzo. D'altro canto, se intendiamo acquistarlo in futuro, siamo esposti al rischio di un aumento del suo prezzo.

Un'opzione è un contratto che ci dà il diritto, ma non l'obbligo, di vendere o comprare nel futuro un asset a un prezzo fissato ora. Si tratta di un *derivato*, nel senso che il suo valore dipende dal prezzo dell'asset sottostante.

Opzioni call

Un'opzione call con maturità T e prezzo strike K ci permette di acquistare al tempo $t = T$ un asset al prezzo K, indipendentemente dal prezzo S_T, che è al momento sconosciuto.

Se $K =$ €50 e, alla maturità, $S_T =$ €60, sarà conveniente esercitare l'opzione. Potremo infatti acquistare l'asset a €50 e rivenderlo immediatamente a €60, con un payoff di €10.

Al contrario, se $S_T =$ €45, non ci converrà esercitare l'opzione.

Il payoff di una opzione call è quindi dato dalla formula

$$\max\{S_T - K, 0\}.$$

Opzioni put

Un'opzione put con maturità T e prezzo strike K ci permette di vendere al tempo $t = T$ un asset al prezzo K, indipendentemente dal prezzo S_T.

Chiaramente, conviene esercitare un'opzione put alla maturità solo se il prezzo S_T del sottostante è inferiore al prezzo strike K dell'opzione.

Il payoff di una opzione put è quindi dato dalla formula $\max\{K - S_T, 0\}$.

Un'opzione put può essere vista come un'assicurazione contro la perdita di valore del sottostante. Se infatti deteniamo l'asset sottostante, e lo vendiamo al tempo T, otterremo un flusso di cassa pari a S_T, che è soggetto a rischio.

Se deteniamo anche la put, il flusso di cassa sarà

$$S_T + \max\{K - S_T, 0\} = \max\{K, S_T\}.$$

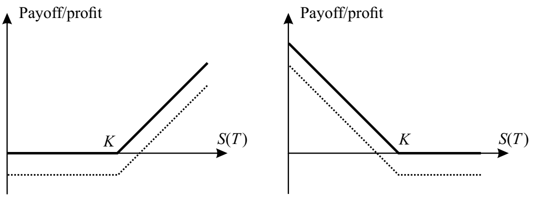
Payoff e profitto

Nel caso precedente, cosa ci impedisce di scegliere un'opzione put con uno strike K il più alto possibile?

Evidentemente, dato che il payoff non può essere negativo, l'opzione put avrà un prezzo $P_0 > 0$. Ragionevolmente, il prezzo P_0 sarà tanto più alto quanto più alto è lo strike K.

La figura illustra la differenza tra payoff e profitto per opzioni call (a) e put (b).

Lo shift verticale corrisponde ai prezzi C_0 (call) e P_0 (put).



(a) (b)

Il problema del pricing

Si pone quindi il problema di determinare un prezzo equo per le opzioni call e put e, più in generale, assegnare un valore a un prospetto incerto.
Consideriamo una lotteria, legata al lancio di una moneta truccata (a nostro favore), in cui possiamo vincere €10 con una probabilità pari al 70%, e €0 con una probabilità pari al 30%.
Quale dovrebbe essere il prezzo equo (fair) per partecipare alla lotteria?
L'intuizione ci dice che esso dovrebbe essere il valore atteso del payoff:

$$0.7 \times 10 + 0.3 \times 0 = €7.$$

In realtà tale intuizione non funziona nel caso dei derivati, e occorre seguire altri approcci.

Il problema del pricing

Consideriamo un modello semplicistico dell'incertezza nei mercati finanziari, e assumiamo che il mercato possa assumere solo due stati futuri, *up* e *down*, in corrispondenza dei quali

$$S_u = uS_0, \qquad S_d = dS_0,$$

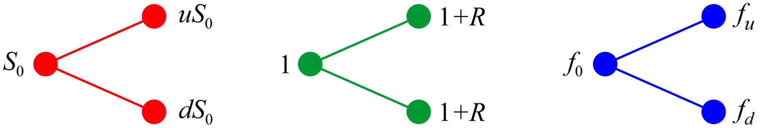
dove S_0 è il prezzo corrente di un asset, rischioso, sul quale si crea un derivato.

Per esempio, se i due scenari possibili sono un profitto del 20% o una perdita del 10%, avremo $u = 1.2$ e $d = 0.9$. Assumiamo che valga la condizione $u > d$.

Nel mercato è anche disponibile un asset privo di rischio, a cui corrisponde un rendimento certo R. Possiamo pensarlo come un conto in banca sicuro, in cui, investendo €1, si ottiene €$(1 + R)$.

Il problema del pricing

Se assumiamo T pari a un anno, possiamo pensare a R come a un tasso di interesse privo di rischio.
Consideriamo un derivato il cui payoff, nei due stati di mercato, è rispettivamente f_u e f_d. Il problema è determinare il valore corrente f_0.



Una delle idee di base nell'ingegneria finanziaria è che due portafogli che assumono in futuro gli stessi valori, stato per stato, devono avere lo stesso valore adesso (in caso contrario esisterebbe una macchina che crea soldi dal nulla).

Il problema del pricing: portafoglio di replicazione

Consideriamo un portafoglio in cui deteniamo Δ unità dell'asset rischioso e investiamo Ψ nell'asset privo di rischio (tali quantità potrebbero essere negative). Il valore corrente di tale portafoglio è

$$W_0 = \Delta S_0 + \Psi.$$

In futuro, il valore di tale portafoglio nei due stati di mercato sarà, rispettivamente:

$$W_u = \Delta u S_0 + (1+R)\Psi, \qquad W_d = \Delta d S_0 + (1+R)\Psi.$$

Supponiamo ora di scegliere Δ e Ψ in modo che il nostro portafoglio *replichi* il valore del derivato.

Il problema del pricing: portafoglio di replicazione

Questo richiede di impostare e risolvere un sistema di due equazioni lineari nelle due incognite Δ e Ψ:

$$\begin{aligned} \Delta u S_0 + (1+R)\Psi &= f_u \\ \Delta d S_0 + (1+R)\Psi &= f_d \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0(u-d)}, \quad \Psi = \frac{1}{1+R}\frac{u f_d - d f_u}{u-d}.$$

Dato che il portafoglio, per costruzione, replica il derivato, il suo valore corrente deve coincidere con il valore del derivato:

$$\begin{aligned} f_0 &= \Delta S_0 + \Psi = \frac{f_u - f_d}{u-d} + \frac{1}{1+R}\frac{u f_d - d f_u}{u-d} \\ &= \frac{1}{1+R}\left\{ \frac{(1+R)-d}{u-d} f_u + \frac{u-(1+R)}{u-d} f_d \right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Possiamo introdurre due quantità

$$q_u = \frac{(1+R)-d}{u-d}, \qquad q_d = \frac{u-(1+R)}{u-d},$$

e riscrivere l'equazione (1) come

$$f_0 = \frac{1}{1+R}\left\{q_u f_u + q_d f_d\right\}.$$

Osserviamo che $q_u + q_d = 1$ e che, nell'ipotesi finanziariamente sensata che valga la condizione $d < 1 + R < u$, avremo $q_u > 0$ e $q_d > 0$.
Possiamo quindi interpretare tali quantità come probabilità, e la formula di pricing come un valore atteso scontato, ma con probabilità diverse da quelle "oggettive".

Un esempio numerico

Consideriamo un'opzione call con strike $K = €50$.

Il sottostante è un'azione, il cui prezzo corrente è $S_0 = €50$, che può guadagnare il 20% o perdere il 10%.

Il tasso di interesse privo di rischio è il 5%,
I calcoli ci forniscono:

$$q_u = \frac{1.05 - 0.9}{1.2 - 0.9} = 0.5, \quad q_d = 0.5$$

$$f_u = \max\{60 - 50, 0\} = €10, \quad f_d = \max\{45 - 50, 0\} = €0$$

$$f_0 = \frac{0.5 \times 10 + 0.5 \times 0}{1.05} = €4.76$$

Un esempio numerico

Se investiamo €1000 in azioni e si verifica lo scenario up, avremo €1200, con un profitto di €200 (il 20%).
Se investiamo lo stesso ammontare in N_c opzioni call, il profitto in quello scenario di mercato sarà

$$\Pi = 10 \times N_c - 1000 = 10 \times \frac{1000}{4.76} - 1000 = 1100,$$

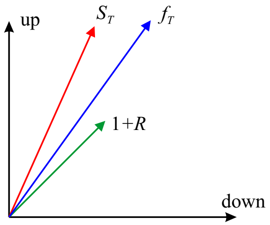
con un guadagno del 110%. Nello scenario down, tuttavia, avremo una perdita del 100% invece che del 10%.

L'esempio, per quanto scolastico, ci fa percepire come i derivati possono essere asset pericolosi, se usati per fini speculativi e non per gestire il rischio.

Come rappresentare l'incertezza in modo realistico

La possibilità di replicare il derivato mediante un portafoglio dei due asset di base è legata alla possibilità di esprimere un vettore come combinazione di altri due.

Questo non sarebbe possibile, in generale, se i due vettori di base fossero paralleli.



Avendo rappresentato l'incertezza con due soli stati futuri di mercato (testa e croce...) ci bastano due asset di base per replicare un'opzione.

Se volessimo rappresentare l'incertezza con tre stati, ce ne servirebbero tre (tre equazioni, tre incognite), corrispondenti a tre vettori *non complanari*.

Come rappresentare l'incertezza in modo realistico

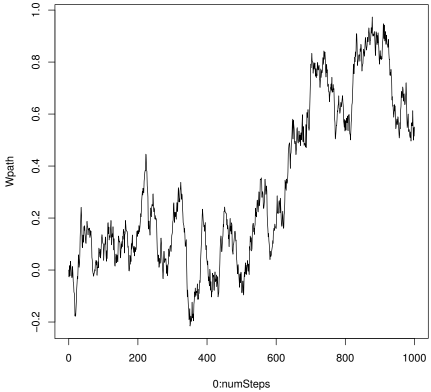
E se vogliamo introdurre un numero adeguato di stati per rappresentare bene l'incertezza?

La difficoltà è legata al fatto che abbiamo adottato un approccio statico alla replicazione. Un approccio dinamico è molto più flessibile, ma richiede l'introduzione di un modello dinamico dell'incertezza.

Un ingrediente per rappresentare incertezza nel tempo è il moto Browniano, il cui modello matematico è il processo stocastico di Wiener, che indichiamo con W_t.

Il termine *stocastico* (soggetto a incertezza) si contrappone al termine *deterministico*.

Confrontiamo l'andamento nel tempo del prezzo di un'azione (LVMH) con una possibile traiettoria del processo di Wiener.



Il processo di Wiener non è un modello adeguato per il prezzo di un'azione, perchè esso può assumere valori negativi.
Tuttavia possiamo utilizzarlo come elemento per un modello basato sul moto Browniano geometrico:

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t.$$

Si tratta di una equazione differenziale stocastica, usata ampiamente sia in fisica che in finanza per modellare sistemi incerti a tempo continuo.
Per interpretare l'equazione, possiamo (in modo non preciso), considerare il rendimento dell'azione su un intervallo di tempo piccolo δt:

$$\frac{\delta S_t}{S_t} = \mu \, \delta t + \sigma \, \delta W_t.$$

Il rendimento ha una componente deterministica e una stocastica influenzata dal coefficiente di volatilità σ.

Replicazione a tempo continuo

La replicazione dinamica a tempo continuo di un derivato non è un problema matematicamente banale. Esso porta a una equazione, la cui soluzione è il prezzo $f\left(S_t, t\right)$ del derivato, in funzione del tempo t e del prezzo corrente del sottostante S_t:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS_t \frac{\partial f}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} - rf = 0. \tag{2}$$

Si tratta di una equazione alle derivate parziali, che fu ricondotta da Black–Scholes–Merton, mediante un cambiamento di coordinate, all'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

dove $u(x, t)$ rappresenta la temperatura al tempo t nel punto x di un corpo a una dimensione (una barretta).

L'equazione di BSM fu risolta (con opportune condizioni al contorno), portando alla celebre formula BSM (pubblicata nel 1973):

$$C_t = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

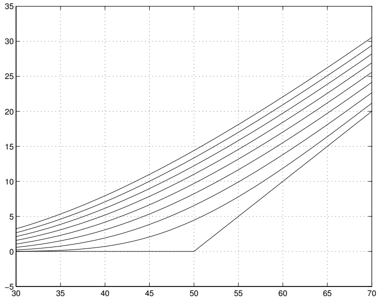
dove

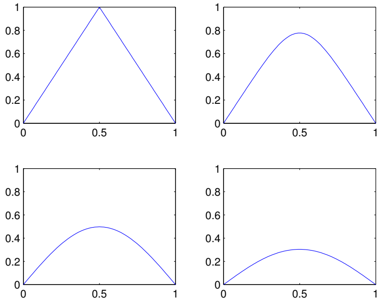
$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy.$$

Questa soluzione può essere interpretata come valore atteso sfruttando un risultato dovuto a Feynman (premio Nobel per la fisica nel 1965) e Kač.

L'andamento nel tempo del prezzo di una call è simile a quello della temperatura di una barretta di materiale, perfettamente isolata, che perde calore dagli estremi (la differenza sta nella direzione del tempo).

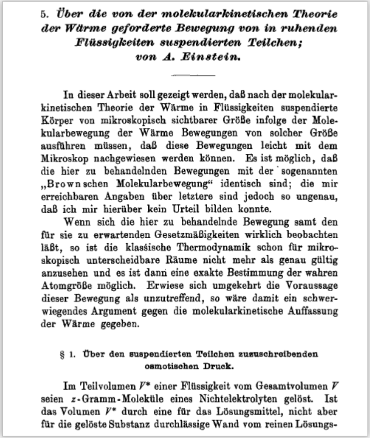




Processi di diffusione ed equazione del calore

Il moto Browniano è un processo di diffusione, il cui legame con l'equazione del calore fu investigato tempo fa (Einstein, 1905).

Ancora prima, nel 1900, Bachelier pubblicò una tesi (Théorie de la spéculation) in cui proponeva il moto Browniano come modello per il prezzo di titoli azionari.



5. ***Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen; von A. Einstein.***

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownschen Molekularbewegung" identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten wirklich beobachten läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon für mikroskopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gültig anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren Atomgröße möglich. Erwiese sich umgekehrt die Voraussage dieser Bewegung als unzutreffend, so wäre damit ein schwerwiegendes Argument gegen die molekularkinetische Auffassung der Wärme gegeben.

§ 1. Über den suspendierten Teilchen zuzuschreibenden osmotischen Druck.

Im Teilvolumen V^* einer Flüssigkeit vom Gesamtvolumen V seien z-Gramm-Moleküle eines Nichtelektrolyten gelöst. Ist das Volumen V^* durch eine für das Lösungsmittel, nicht aber für die gelöste Substanz durchlässige Wand vom reinen Lösungs-

Alcune storie...

- Il 19 ottobre 1987, un giorno noto come *Black Monday of 1987*, i mercati azionari americani persero più del 20% in un singolo giorno. La crisi fu attribuita all'uso massiccio di strategie di replicazione dinamica di derivati.
- Nel 1998 il fondo speculativo Long Term Capital Management andò in crisi, perdendo fino a 1.85 miliardi di dollari. Il fondo fu salvato da un pool di banche. Scholes e Merton erano partner del fondo.
- L'articolo *Recipe for Disaster: The Formula That Killed Wall Street* mette in luce l'effetto disastroso di un modello matematico inadeguato per la correlazione dei default (rischio di credito) quando i mercati entrano in crisi.

Alcune storie...

Questi esempi sono utili per mantenere una sana dose di scetticismo e uno spirito critico nei confronti delle assunzioni che stanno alla base di un modello matematico. Questo non toglie che i metodi quantitativi giochino un ruolo fondamentale nell'ingegneria finanziaria, alimentando un mercato del lavoro piuttosto ben retribuito.

In realtà il modello basato sul moto Browniano sottostima il livello di rischio, e in pratica non è possibile replicare perfettamente un derivato eliminando completamente il rischio per chi lo crea.

Tuttavia, i modelli e i metodi che abbiamo discusso sono stati corretti e raffinati nel corso del tempo, e vengono al giorno d'oggi affiancati da tecniche di machine learning.

Matematica per l'Ingegneria/Ingegneria Matematica

I concetti a cui abbiamo accennato sono trattati in diversi insegnamenti dei nostri corsi di laurea, tra cui:

- I corsi di base di Analisi matematica e Algebra lineare
- Equazioni della fisica matematica
- Probabilità e statistica
- Metodi numerici per le equazioni alle derivate parziali
- Financial engineering
- Business analytics
- Metodi quantitativi per la gestione del rischio