



POLITECNICO DI TORINO

I Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Civile

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Elastodinamica dei tubi collassabili

Elastodynamics of collapsible tubes

Relatori:

Prof. Carlo Vincenzo Camporeale

Prof. Luca Ridolfi

Ing. Stefania Scarsoglio

Candidata:

Emanuela Siuni

Dicembre 2015

Ai miei genitori

Ringraziamenti

Desidero dedicare questo spazio per esprimere la mia gratitudine a tutti coloro che hanno contribuito alla realizzazione di questo lavoro di tesi che, per quanto arduo e impegnativo, ha consentito di apprezzare e approfondire un campo di applicazione dell'Idraulica a me finora sconosciuto.

Il primo ringraziamento va ai miei relatori, il Prof. Carlo Camporeale ed il Prof. Luca Ridolfi: senza il loro supporto culturale e la loro guida sapiente questa tesi non esisterebbe.

Ringrazio inoltre l'Ing. Stefania Scarsoglio, la quale mi ha fornito sempre del materiale interessante che ha permesso di rendere più completo il mio lavoro.

Un ringraziamento particolare va al mio collega ed amico Marcello Pinna che ha speso parte del suo tempo per leggere e discutere con me le bozze della presente tesi.

Infine cito i miei genitori, mia sorella Federica, e Simone, che hanno sempre creduto in me e hanno permesso che io raggiungessi questo importante traguardo.

Indice

1	Introduzione	1
2	Comportamento dei tubi collassabili	3
2.1	Studio fisico del fenomeno di collasso dei tubi elastici	3
2.2	Risultati sperimentali di Conrad (1969)	8
2.3	Oscillazioni	15
2.4	Modelli matematici	18
2.4.1	Modelli monodimensionali	18
2.4.2	Modelli bidimensionali	22
2.4.3	Modelli tridimensionali	26
3	Modellazione matematica	28
3.1	Formulazione del problema	28
3.1.1	Elasticità	30
3.1.2	Conservazione della massa	32
3.1.3	Conservazione della quantità di moto nei tubi rigidi	33
3.1.4	Conservazione della quantità di moto a valle del restringimento	34
3.1.5	Conservazione della quantità di moto a monte del restringi- mento	35
3.2	Equazioni del modello	38
3.2.1	Caso di studio: lumped parameter model di Pedley con ter- mini inerziali e viscoelastici	39
3.3	Stati di equilibrio	41

3.3.1	Caso di studio: lumped parameter model di Pedley con termini inerziali e viscoelastici	52
3.4	Stabilità asintotica e oscillazioni	56
3.5	Analogie e differenze riscontrate rispetto ai risultati in letteratura	69
3.5.1	Caso di studio: lumped parameter model di Pedley con termini inerziali e viscoelastici	86
4	Analisi di stabilità non normale	97
4.1	Introduzione	97
4.2	Definizione dell'energia del sistema	101
4.2.1	Lumped parameter model di Pedley	105
4.2.2	Lumped parameter model di Pedley con proprietà viscoelastiche e inerzia	109
4.3	Analisi dei risultati	115
5	Applicazione di forzanti periodiche	116
5.1	Introduzione	116
5.2	Effetto della forzante periodica p_c	117
5.3	Effetto della forzante periodica R_1	123
5.4	Analisi dei risultati	128
6	Conclusioni	129
	Bibliografia	131

Capitolo 1

Introduzione

Si definiscono tubi collassabili quei condotti costituiti da materiale avente caratteristiche elastiche, i quali, se sottoposti a una pressione esterna di valore uguale o superiore a quella interna, intraprendono un processo di riduzione della propria sezione che provoca importanti conseguenze. Tra tutte, la più immediata, è la diminuzione o, in alcuni casi, l'interruzione del flusso che attraversa il condotto.

Negli ultimi cinquant'anni, con la nascita della Bio-fluidodinamica, lo studio dei fenomeni fisici riguardanti i tubi collassabili si è decisamente sviluppato. Infatti, poiché molti dei vasi atti al trasporto di fluidi nel nostro sistema corporeo presentano delle pareti flessibili, il loro comportamento può essere modellizzato facendo riferimento a dei condotti collassabili. Tra le applicazioni fisiologiche, quelle analizzate maggiormente riguardano l'apparato cardiovascolare, con particolare attenzione al comportamento dei vasi venosi, l'apparato respiratorio, e i sistemi intestinali e urogenitali per i quali la deformabilità degli organi risulta significativa nel trasporto peristaltico.

La Bio-fluidodinamica rappresenta una nuova branca della fluidodinamica ed è nata con lo scopo di comprendere il comportamento assunto dai fluidi all'interno del corpo umano da un punto di vista più fisico e meccanico. L'idea è quella di implementare le conoscenze del campo medico tramite le teorie matematiche e ingegneristiche che normalmente si usano per risolvere dei problemi più tecnici, con lo scopo di ottenere una visione più completa dei fenomeni e delle patologie che si sviluppano all'interno del nostro corpo.

Effettuate queste premesse, si prosegue con la descrizione del lavoro svolto nella presente tesi. Nella copiosa varietà di modelli 1D, 2D e 3D descrittivi del comportamento dei tubi collassabili e presenti in letteratura si è scelto di utilizzare il *lumped parameter model* introdotto dallo studioso Pedley nel 1978, col fine di indagare il comportamento dei condotti collassabili in termini di stabilità. La relativa semplicità di questo modello, costituito da tre equazioni differenziali ordinarie, facilita l'utilizzo di rigorosi metodi matematici e ciò spesso aiuta l'identificazione dei meccanismi che spiegano i fenomeni fisici.

Nel Capitolo 2 si è voluto commentare nel dettaglio le evidenze sperimentali ottenute nei vari studi riportati in letteratura col fine di comprendere meglio e apprezzare la varietà dei fenomeni fisici caratterizzanti i tubi collassabili. Di pari passo si sono analizzati i modelli matematici 1D, 2D e 3D presenti in letteratura.

Nel Capitolo 3 si è passati allo studio particolareggiato del lumped parameter model di Pedley, spiegando le ipotesi semplificative alla base dello stesso, e ripercorrendo i calcoli effettuati dallo studioso seppur a volte in maniera alternativa, col fine di riottenere in questa fase della tesi i suoi risultati. Le variabili principali scelte in questo lavoro non sono esattamente le medesime di quelle predilette da Pedley e ciò ha comportato una differente formulazione del modello principale. Si è proseguito con uno studio della stabilità asintotica del modello per differenti set di parametri. Inoltre si è implementata all'analisi in corso il caso studio riguardante il modello di Pedley in cui si considerano i termini inerziali e viscoelastici, che egli invece trascura.

A partire dal Capitolo 4 ci si è allontanati totalmente dalla strada di Pedley, proseguendo per vie non ancora calcate per questo tipo di modello. In particolare si è effettuata un'analisi di stabilità non normale, la quale permette di studiare la stabilità del modello a tempo finito tramite lo studio dell'energia delle perturbazioni imposte al sistema.

Nel Capitolo 5 si è deciso di sottoporre il modello a delle forzanti periodiche in modo da poter studiare il differente comportamento rispetto al caso di sollecitazione statica.

Infine, nel Capitolo 6, si riportano le osservazioni conclusive e di seguito ad esso è possibile reperire la bibliografia di riferimento.

Capitolo 2

Comportamento dei tubi collassabili

2.1 Studio fisico del fenomeno di collasso dei tubi elastici

Il collasso dei tubi elastici consiste in una importante diminuzione della sezione che ha inizio allorché la pressione esterna al tubo eguagli o superi il valore di quella interna. Ciò provoca una notevole riduzione o, in alcuni casi, un'interruzione del flusso che attraversa il condotto.

Questo fenomeno assume nell'ambito della fluidodinamica notevole interesse, e in particolare nella fisiologia del corpo umano, in cui la maggior parte dei vasi che trasportano fluidi è soggetta a una pressione trasmurale (differenza tra pressione interna e pressione esterna) positiva e, come conseguenza, è caratterizzata dall'aver una sezione approssimativamente circolare. In questa configurazione i vasi presentano una buona rigidità e il carico del fluido provoca solo piccole deformazioni. Qualora i vasi diventassero soggetti a una pressione trasmurale negativa di sufficiente magnitudine, questi possono deformarsi non assialsimmetricamente. La rigidità dei vasi, in queste condizioni, è dominata dalla bassa resistenza a flessione e piccole variazioni nella pressione del fluido interno provocano grandi cambiamenti nella forma della parete del vaso. Esiste quindi una forte interazione tra fluido e

struttura. Un interessante aspetto di questo sistema è che i vasi che collassano non assialsimmetricamente sviluppano delle oscillazioni autoeccitate. Tra gli esempi fisiologici si trovano l'ansimare durante le espirazioni forzate, lo sviluppo dei suoni di Korotkoff durante la misura della pressione sanguigna attraverso lo sfigmomanometro e il brusio venoso cervicale generato dalle oscillazioni della vena giugulare esterna.

Per poter effettuare uno studio dettagliato del collasso dei tubi elastici è stato proposto uno strumento sperimentale, detto resistore di Starling, che permette di riprodurre in laboratorio il fenomeno e di controllare le condizioni al contorno.

L'apparecchio è costituito da un segmento di tubo circolare elastico sorretto alle estremità da due tubi rigidi e situato in una camera chiusa all'interno della quale sia possibile controllare la pressione p_c . Questa rappresenterà la pressione esterna al tubo. Il sistema è alimentato da un serbatoio, dotato di carico H , che è direttamente collegato al tubo rigido a monte del segmento elastico. I parametri restanti che permettono di manovrare in maniera indipendente le condizioni sperimentali sono:

- La pressione a monte p_1 e a valle p_2 del tubo collassabile, misurata nei tubi rigidi;
- La portata Q che attraversa il sistema;
- Le resistenze in due zone a monte R_1 e a valle R_2 della regione di interesse, relative a dei restringimenti.

Tra le diverse procedure attuate per lo studio del fenomeno, una delle più significative risulta quella in cui l'esperimento è condotto in controllo di pressione nella camera p_c .

Inizialmente la portata sia costante e la pressione nella camera sia nulla o negativa, cosicché il segmento collassabile sia disteso e con una sezione approssimativamente circolare costante. Si assuma che questa configurazione si mantenga stabile anche nel caso in cui vengano applicate piccole perturbazioni. Improvvisamente, la pressione nella camera sia aumentata fino a un determinato valore. È interessante studiare come il tubo elastico reagisce a questa variazione, introducendo la pressione trasmurale p_{tm} , definita come differenza tra il valore della pressione interna al tubo

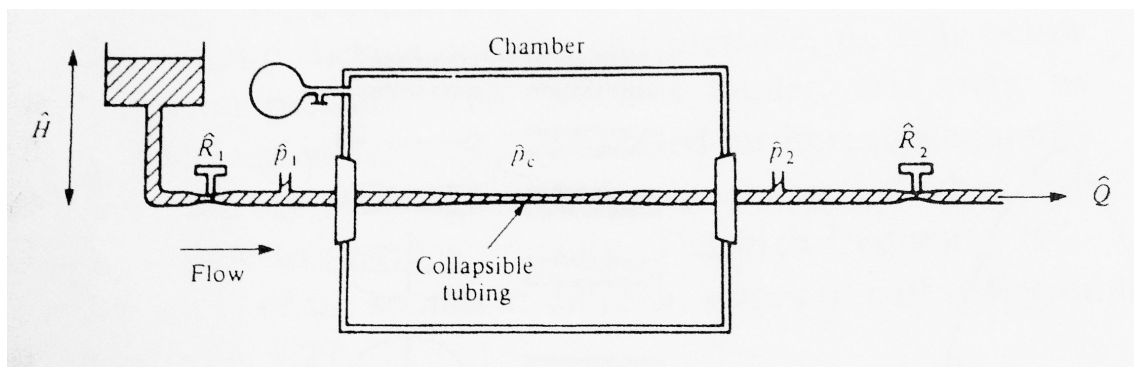


Figura 2.1: *Resistore di Starling, apparecchiatura sperimentale utilizzata per lo studio del flusso nei tubi collassabili.*

e quello della pressione esterna. Il collasso si verificherà quando la pressione transmurale raggiungerà un valore critico, che si attesta intorno allo zero ma che assume valori leggermente differenti a seconda delle caratteristiche elastiche del materiale di cui il tubo è costituito.

Se la pressione p_c è sufficientemente bassa, la pressione transmurale sarà superiore al valore critico al di sotto del quale il collasso ha inizio e si manterranno le condizioni iniziali.

Se invece il valore della pressione nella camera è abbastanza elevato, si comincerà a osservare il collasso nella zona finale del tubo elastico. Finché il numero di Reynolds è elevato, il tempo necessario allo sviluppo del collasso sarà minore di quello necessario per la diffusione viscosa e la perturbazione al flusso iniziale sarà di tipo non viscosa. A causa del collasso, il flusso subirà un'accelerazione intorno al restringimento e la pressione del fluido diminuirà, in accordo con le leggi di Bernoulli. La perdita di pressione che si registra intorno al restringimento contribuisce ad accentuare il processo di collasso.

La sovrappressione che si genera nel fluido come reazione al restringimento si propagherà tramite un'onda di pressione nella superficie del tubo sia a monte che a valle del restringimento stesso. Se il segmento di tubo elastico è piccolo e il tubo a monte rigido la propagazione dell'onda sarà pressoché istantanea. Il collasso del tubo elastico proseguirà finché si raggiungeranno delle nuove condizioni che portino a un equilibrio stabile o allorquando altri effetti entreranno in gioco.

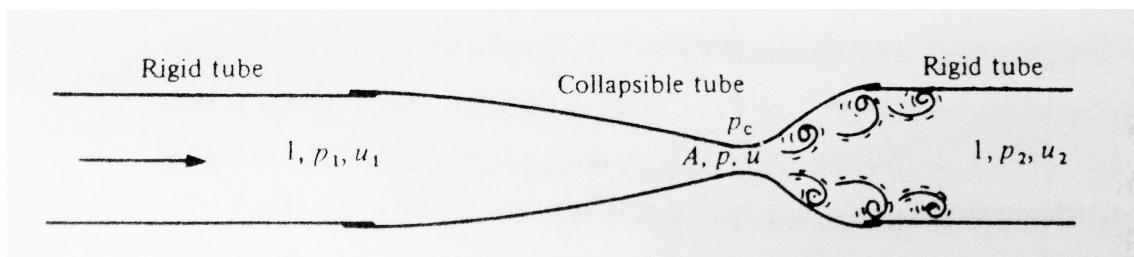


Figura 2.2: *Rappresentazione del segmento collassabile, specificando aree, pressioni e velocità assunte dal sistema a monte della costrizione, nella costrizione e a valle della costrizione.*

Tra questi si cita la progressiva perdita di energia che si registra al procedere del collasso. Infatti poiché le perturbazioni al flusso non viscoso registrate nel nucleo del tubo provocano lo sviluppo di sottostrati viscosi in prossimità delle pareti, quando l'area del restringimento diventa molto piccola e conseguentemente la velocità del fluido che attraversa quella zona aumenta notevolmente, i sottostrati viscosi occupano la sezione intera e si genera una notevole dissipazione di energia viscosa.

Probabilmente il fenomeno più rilevante risulta essere il distacco della vena. Finché la pendenza della parete del tubo viene mantenuta estremamente bassa, questo si avrà approssimativamente nel punto più ristretto. Come conseguenza, all'interno del tubo rigido a valle arriverà un getto asimmetrico. Potrebbe anche verificarsi un distacco di vena a monte, ma questo non accade sempre in quanto il restringimento del tubo risulta essere molto più graduale rispetto al successivo allargamento. Inoltre la perdita di carico associata a questo fenomeno non sarà tanto accentuata quanto quella dovuta al distacco di vena a valle. Se il numero di Reynolds nel restringimento è maggiore di 500, il getto a valle diventerà turbolento.

Le perdite di carico rallentano inizialmente il collasso in quanto causando una brusca caduta di pressione a valle del restringimento e una importantissima diminuzione di portata, si genera un aumento di pressione a monte e in prossimità del restringimento che a sua volta provoca un aumento della pressione trasmurale.

Esisterà normalmente uno stato di equilibrio a cui saranno associati una significativa perdita di energia e un certo grado di collasso. Se l'equilibrio è stabile, il sistema tenderà ad esso, a meno che non ci sia un'inerzia sufficiente nel movimento

della parete e del fluido che permetta alla sezione di riaprirsi dopo il collasso e di spazzar via la bolla che causa la separazione del getto, cosicché il ciclo sia libero di ripartire nuovamente. Se invece l'equilibrio risulta essere instabile, o il sistema tenderà a raggiungere un'altra condizione di equilibrio esistente per gli stessi valori dei parametri, o si osserveranno delle oscillazioni dovute al fatto che il tubo è alquanto rigido sia per aree elevate che ridotte e la superficie non può aumentare o diminuire indefinitamente.

2.2 Risultati sperimentali di Conrad (1969)

Nel 1969 lo studioso Conrad ottenne i primi significativi risultati sperimentali relativi al comportamento assunto dai tubi collassabili. Egli utilizzò l'apparecchiatura descritta in precedenza e decise di svolgere le misurazioni mantenendo costanti la pressione interna alla camera p_c e la resistenza a valle R_2 e variando la portata Q manovrando i parametri resistenza a monte R_1 e carico del serbatoio alimentatore H .

I risultati ottenuti vennero riportati graficando le pressioni a monte e a valle del tubo elastico in funzione della portata Q . Le famiglie di curve sono relative ognuna a una diversa resistenza a valle R_2 , direttamente proporzionale a un parametro k , il quale assume valori crescenti con la numerazione associata alle curve, come riportato nella tabella seguente.

n	$k \left[\frac{mmHg}{(ml/s)^2} \right]$
1	0.05
2	0.07
3	0.10
4	0.12
5	0.27
6	0.45
7	0.90
8	4.00

Nella Figura 2.3 si è plottata la portata Q in funzione della pressione a monte p_1 . Se si analizzano le curve partendo da pressioni p_1 elevate e si procede via via decrementandole, si nota che per resistenze a valle modeste (curve da 1 a 4) la portata decresce linearmente in funzione della p_1 finché questa non si attesta intorno al valore della pressione nella camera p_c . Infatti per questi valori di p_1 a piccoli decrementi di pressione corrispondono elevate diminuzioni di portata. Per pressioni

p_1 che diminuiscono ulteriormente la portata riprende a diminuire con andamento lineare, ma più lentamente rispetto al primo tratto lineare. Se si considerano le curve relative a resistenze a valle più elevate (curve dalla 5 alla 8), il salto che assume la portata per $p_1 \simeq p_c$ è poco apprezzabile e tende a scomparire del tutto nelle curve 7 e 8.

Nella Figura 2.4 si studia il comportamento che la portata Q assume al variare della pressione di valle p_2 . Come nel caso precedente la pressione in camera p_c viene mantenuta costante ma si presentano i diversi andamenti assunti all'aumentare della resistenza a valle R_2 (si mantiene la stessa convenzione nella numerazione delle curve). Si evince che, all'aumentare della resistenza R_2 , a decrementi nella pressione p_2 corrispondono diminuzioni sempre meno marcate nella portata Q . Inoltre per valori di R_2 modesti le curve presentano delle zone in tratteggio che rappresentano i punti in cui sono state registrate delle oscillazioni. Queste nascono per valori di pressioni p_2 leggermente inferiori a p_c .

Infine in Figura 2.5 si riporta il salto di pressione tra monte e valle in funzione della portata Q , utilizzando le stesse convenzioni per la numerazione delle curve. Nelle zone in cui le curve si interrompono sono state registrate delle oscillazioni.

Si analizzi nel dettaglio una delle curve riportate nella Figura 2.5, indicata in Figura 2.6, e si proceda considerando portate elevate che vengono via via ridotte. È possibile riconoscere nella curva tre distinti comportamenti indicati nello stesso grafico col sistema di numerazione romano.

Il primo andamento (zona I) si verifica per portate sufficientemente elevate. In queste condizioni la pressione p_2 supera la pressione nella camera p_c e quindi anche in tutto il tubo elastico la pressione è maggiore di quella della camera. Di conseguenza la sezione del condotto si mantiene circolare e rigida e il flusso può essere studiato con le leggi di Pouseille. La differenza tra p_1 e p_1 risulta proporzionale linearmente alla portata Q e la resistenza si mantiene pressoché costante. Se si riduce la portata Q al di sotto di un valore critico, la pressione a valle p_2 risulterà uguale o minore alla pressione nella camera p_c e la sezione del tubo elastico comincerà a cambiare forma evolvendo da circolare a ellissoidale (zona II). Si verifica così l'inizio del fenomeno di collasso che avviene in prossimità della fine del segmento elastico.

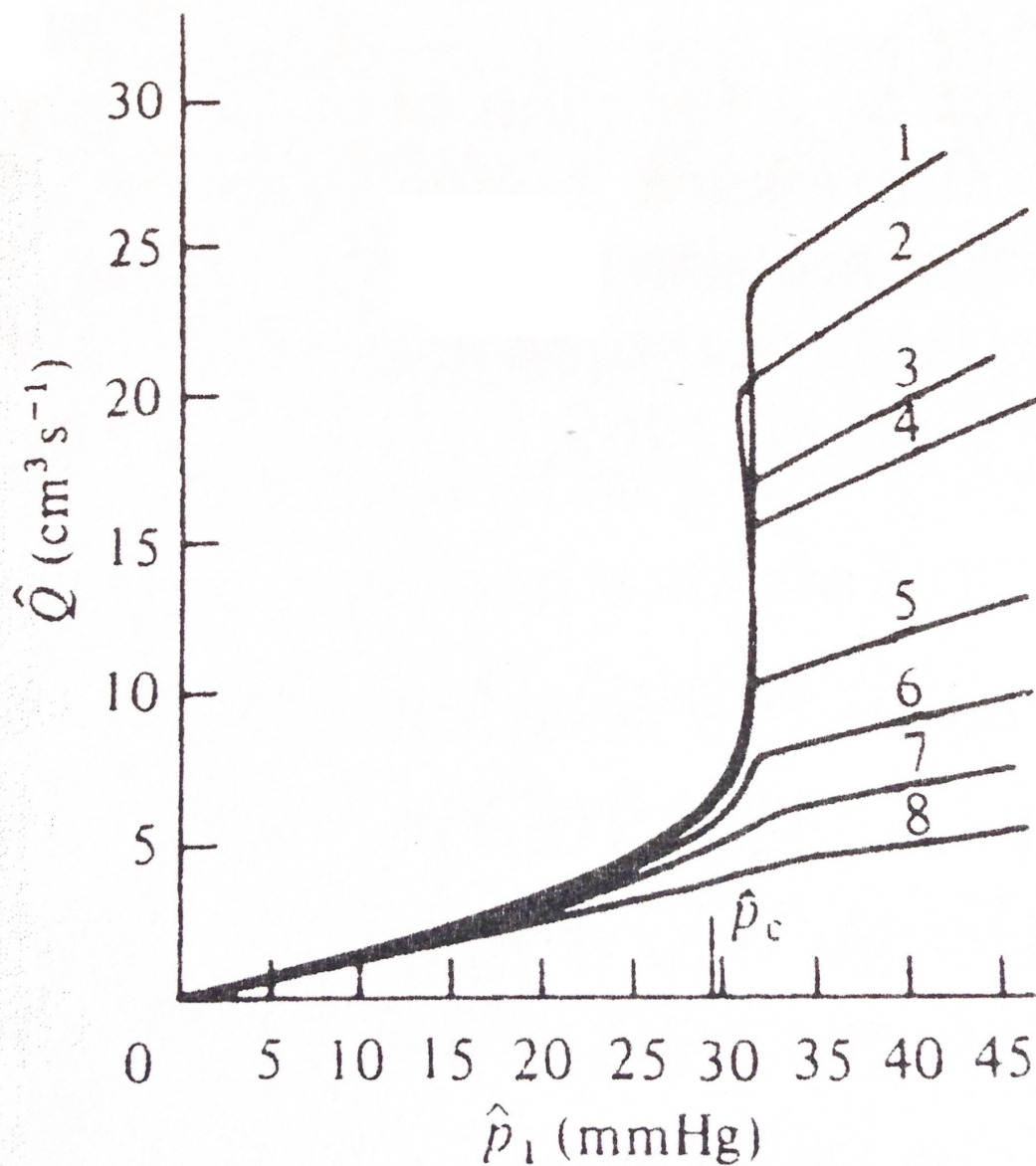


Figura 2.3: Risultati sperimentali di Conrad (1969). Andamento della pressione p_1 in funzione della portata Q per una pressione esterna costante ($p_c = 29.5$ mmHg) e differenti configurazioni della resistenza a valle. Le diverse curve corrispondono a valori diversi del parametro k (misurato in $\text{mmHg}(\text{cm}^3\text{s}^{-1})^{-2}$) che è direttamente proporzionale a R_2 e che è indicato in tabella.

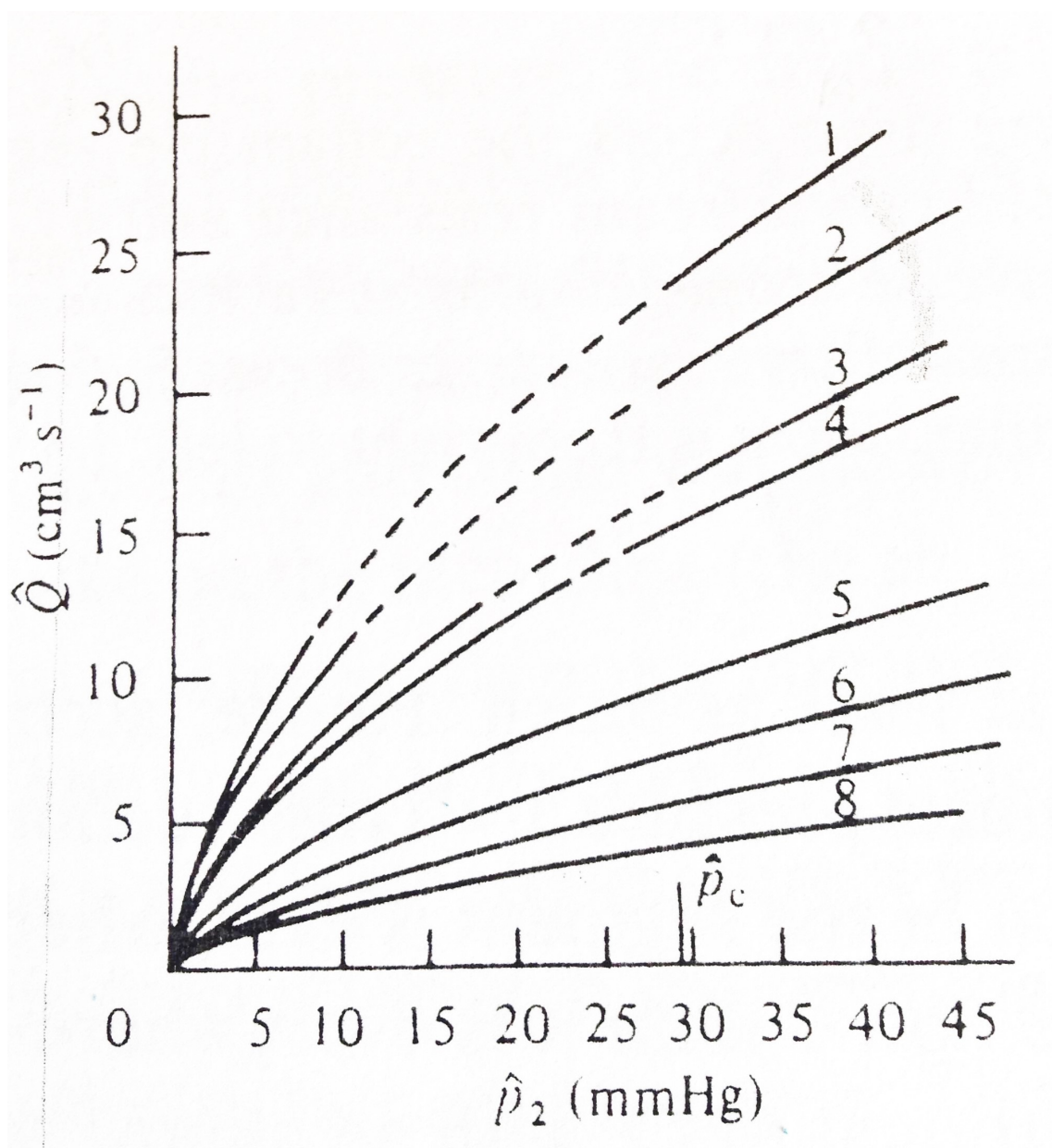


Figura 2.4: Andamento della pressione p_2 in funzione della portata Q per le stesse condizioni della figura precedente.

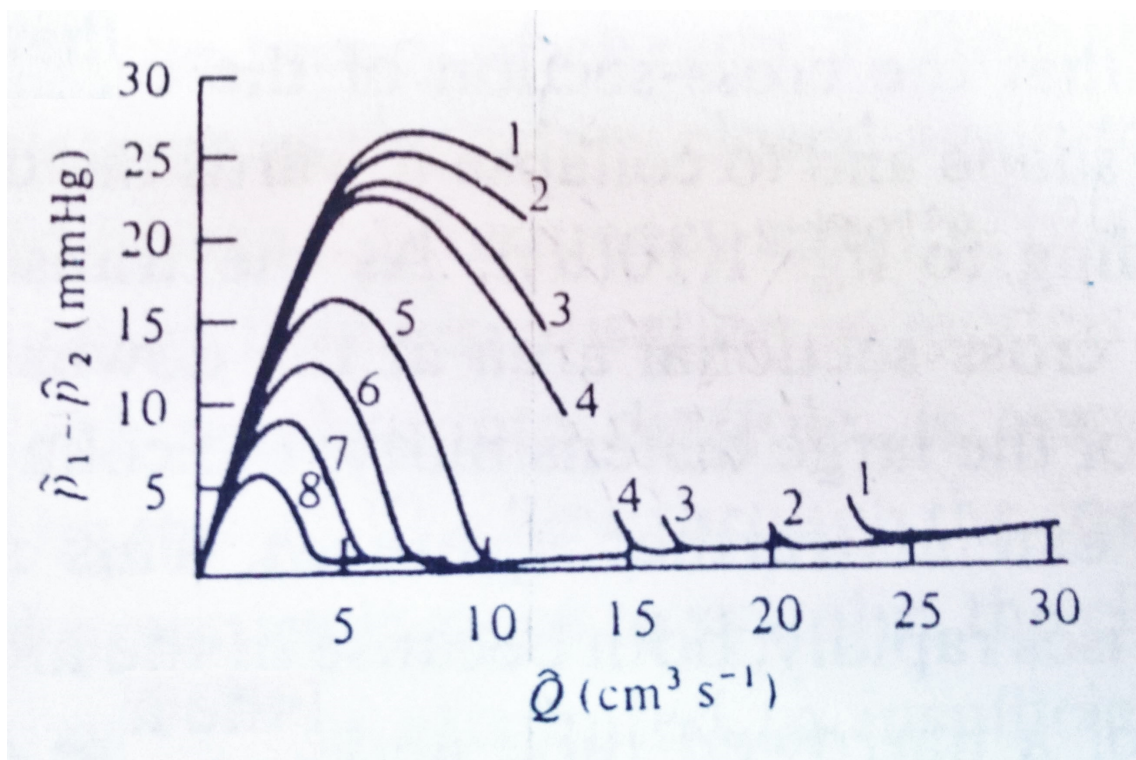


Figura 2.5: Risultati sperimentali di Conrad (1969). Andamento della differenza di pressione $p_2 - p_1$ in funzione della portata Q per le stesse condizioni di studio esplicate in figura 1.3. Le interruzioni nelle curve indicano regioni di oscillazione.

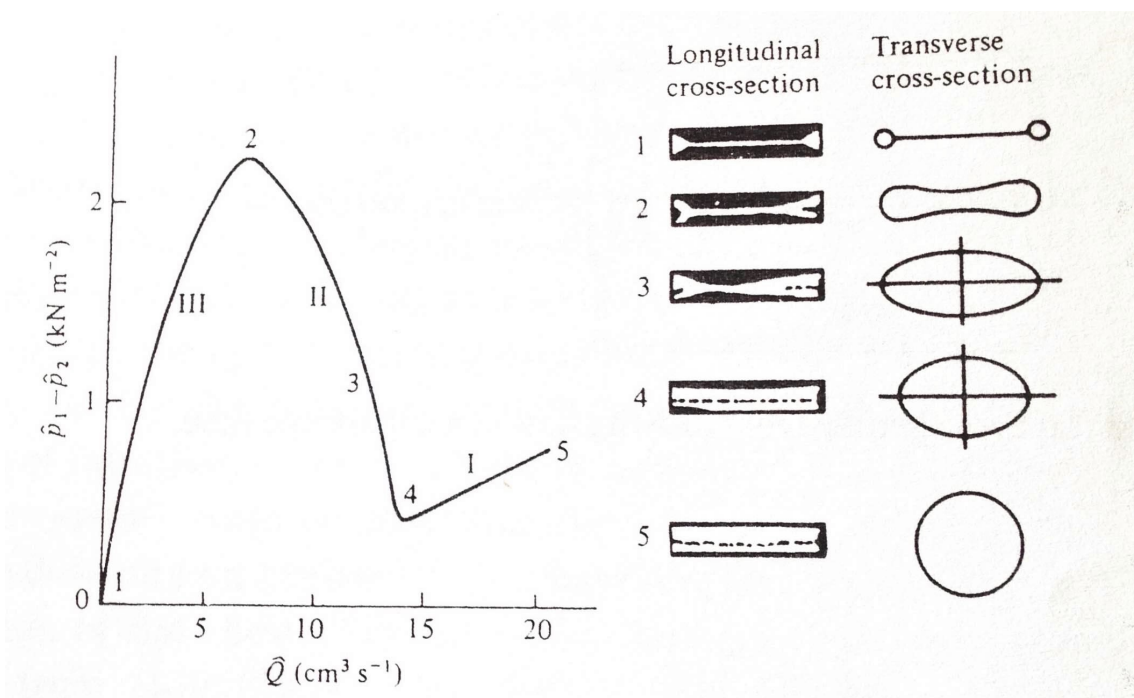


Figura 2.6: Differenza di pressione attraverso il segmento collassabile in funzione della portata. La resistenza a valle e la pressione esterna sono mantenute costanti. Sono inoltre mostrate le configurazioni assunte dalle sezioni longitudinali e trasversali per i diversi valori di portata. In particolare: 1, flusso nullo; 2, flusso ridotto; 3, 4, flusso elevato; 5, flusso tanto elevato da mantenere il tubo circolare.

A causa dell'elevata dilatabilità del condotto, ad un'accentuata caduta della pressione trasmurale corrisponderà una rapida diminuzione dell'area nella sezione più a valle del tubo elastico, diminuzione che si estenderà velocemente anche a monte. Ciò comporta un forte aumento della resistenza al flusso sia perché in un tubo con sezione ristretta la resistenza viscosa cresce, sia perché si ha una forte dissipazione di energia a causa del distacco di vena dovuto al rapido allargamento tra il punto in cui avviene il collasso e il punto a valle in cui si ha la giunzione col tubo rigido. Per queste ragioni la differenza di pressione tra monte e valle necessaria per mantenere la graduale diminuzione di portata aumenta drammaticamente.

2.3 Oscillazioni

Nei primi esperimenti condotti sui tubi collassabili, revisionati da Bertram (2003), vennero individuate diverse tipologie di oscillazioni ma i meccanismi responsabili della loro comparsa rimangono ancora poco chiari. In particolare non è stato ben compreso se essi siano correlato alle instabilità indotte dal flusso, come i traveling-wave-flutter o i meccanismi di divergenza statica che riescono a spiegare con successo la comparsa di instabilità in altri sistemi fluido-elastici (Carpenter et Garrad 1985,1986).

Dai risultati sperimentali ottenuti distintamente da Conrad e Katz (1969) si evince che, quando la portata viene manovrata tramite le condizioni di monte, le oscillazioni si registrano solamente per valori sufficientemente bassi della resistenza a valle R_2 . Inoltre altri risultati ottenuti da Katz et al. (1969) indicano che, assegnata una certa pressione in camera p_c , qualora per una data resistenza R_2 le oscillazioni non si presentino, seppur si aumenti la p_c le oscillazioni continuano a non registrarsi. Lo stesso Conrad mostrò che la frequenza delle oscillazioni aumenta al diminuire della portata attestandosi tra 0.6 Hz e 1.7 Hz in un tubo avente diametro indisturbato di 1.27 cm.

Esistono differenti meccanismi che possono portare allo sviluppo di questo tipo di oscillazioni. Tra questi il distacco di vena assume notevole importanza come si desume dalla dettagliata analisi degli studiosi Ur e Gordon (1970). Le oscillazioni che vennero registrate su un tubo di gomma di lunghezza pari a 25 diametri avevano un periodo di circa 70 ms ottenuto correggendo le misure in funzione del tempo di propagazione delle onde di pressione.

Circa 3 ms prima della massima chiusura del restringimento, inizia una elevata e rapida caduta della pressione a valle del restringimento, di durata almeno 5 ms. Questo fenomeno può essere interpretato come lo sviluppo del distacco di vena. Gli studiosi Ur e Gordon associarono questo comportamento alla decelerazione del fluido a valle del restringimento, inevitabilmente correlato alla caduta di pressione. Nel momento in cui il tubo si chiude si verifica anche una significativa ma meno acuta crescita nella pressione a monte, che dura circa 2 ms, e che molto probabilmente è

dovuta all'onda di sovrappressione menzionata in precedenza. In seguito al raggiungimento della massima chiusura del tubo la pressione a valle aumenta nuovamente, mentre la pressione a monte diminuisce. Cambiamenti relativamente graduali in pressione sono associati alla riapertura del tubo, che raggiunge la massima apertura dopo 32 ms. Nei successivi 36 ms si verifica una graduale riduzione dell'area del tubo, subito prima che il collasso improvvisamente si ripresenti nuovamente e che il ciclo ricominci.

È implicita in questa discussione l'assunzione che il comportamento elastico del tubo in ogni sua sezione possa essere descritto dalla stessa curva superficie-pressioni, di cui si possono trovare degli esempi in Figura 2.7.

J.M. Fitz-Gerald però ritenne che questa assunzione non fosse del tutto in accordo col comportamento fisico del tubo affermando che il segmento di condotto flessibile a monte del restringimento può assumere un ruolo fondamentale nel caso in cui il tubo presenti delle pareti sottili o sia abbastanza lungo. Infatti nel momento in cui il flusso nel restringimento viene rallentato dalle perdite di energia causate dal distacco di vena, una porzione maggiore di flusso si concentrerà nel segmento a monte del restringimento mentre una porzione minore si attesterà oltre lo stesso, tanto che il tubo risulterà disteso. La distensione del condotto tenderà successivamente a tenere aperta la parte ristretta tramite la tensione longitudinale. Se nella parete indisturbata la tensione longitudinale risulta essere abbastanza elevata e la parete stessa sufficientemente sottile, la forza associata a questa tensione potrebbe dominare su quella relativa alla resistenza flessionale trasversale dovuta alla variazione di forma della sezione.

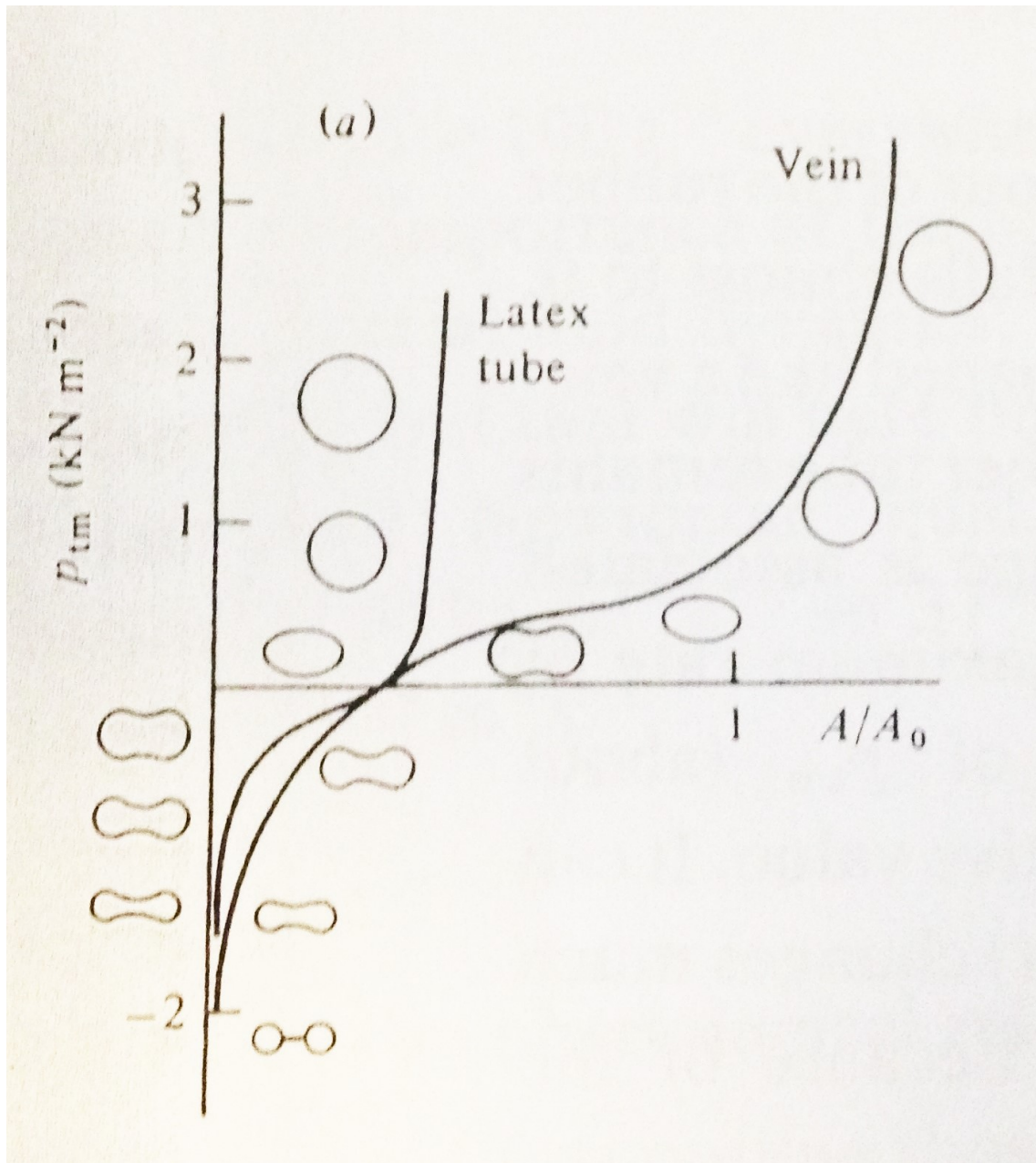


Figura 2.7: Confronto tra proprietà elastiche di un tubo di lattice e quelle di un segmento inciso di vena cava canina. La pressione transmurale è riportata come funzione dell'area che è stata scalata rispetto ad A_0 , valore che la stessa assume per pressioni transmurali nulle. Si mostrano inoltre le forme delle sezioni trasversali per diversi valori di area.

2.4 Modelli matematici

2.4.1 Modelli monodimensionali

Le prime analisi teoriche del flusso attraverso il resistore di Starling furono basate sull'utilizzo di lumped-parameter models o di modelli spazialmente monodimensionali 1D (revisionato in Heil et Jensen 2003, Pedley et Luo 1998). Questa tipologia di modelli è ancora utilizzata per lo studio di sistemi di tubi collassabili, per esempio nello studio di Bull et al.(2005) sulla limitazione del flusso nei polmoni colmi di liquido, oppure nelle analisi effettuate da Fullana et Zaleski (2009) sul flusso nel sistema venoso, o ancora nell'investigazione sul sistema linfatico effettuata da Venugopal et al (2009). La relativa semplicità di questi sistemi facilita l'utilizzo di rigorosi metodi matematici e ciò spesso aiuta l'identificazione dei meccanismi che spiegano il comportamento del sistema. Tuttavia un limite di questo approccio è il bisogno di ricorrere ad assunzioni che permettano di semplificare matematicamente il problema; per esempio si catturano gli effetti dovuti alla dissipazione viscosa attraverso un modello monodimensionale con flusso mediato sulla sezione o si rappresenta la meccanica 3D della superficie del tubo tramite una legge che descriva il rapporto tra superficie della sezione trasversale e pressione transmurale locale. I risultati che si ottengono devono essere valutati con cautela. Ciononostante, molti modelli che descrivono il flusso attraverso il resistore di Starling e che utilizzano relazioni semplificative plausibili, anche se non meno ad hoc, riescono a predire la presenza di oscillazioni autoeccitate, nonostante il fatto che le assunzioni sottintese in qualche caso vengono screditate da studi successivi. Per esempio, Cancelli e Pedley (1985) usarono largamente l'assunzione che la dissipazione viscosa si sviluppasse prevalentemente nella regione con distacco di vena, a valle del punto con massimo restringimento, ma fu dimostrato nelle simulazioni sulle leggi di Navier-Stokes effettuate da Luo e Pedley (1996) che questa non era corretta in quanto la maggior parte della dissipazione si sviluppa negli strati di confine con le pareti del tubo ma a monte del punto più ristretto.

L'introduzione di assunzioni semplificative di questo genere potrebbe essere evitata modellizzando il sistema tramite le equazioni della meccanica del continuo, per

esempio le equazioni di Navier-Stokes associate alla teoria dell'elasticità per i grandi spostamenti. Queste equazioni forniscono un punto di partenza comune per le simulazioni numeriche dirette e per lo sviluppo di modelli teorici rezionali. Un esempio brillante di questo approccio è dato da Whittaker et al (2010b) il quale è riuscito a derivare una descrizione della meccanica della parete del tubo dalle equazioni della teoria sui gusci di Kirchoff-Love senza invocare alcuna assunzione ad hoc.

I modelli monodimensionali utilizzano equazioni differenziali parziali (PDEs) che descrivono la conservazione della massa e della quantità di moto, che vengono messe in relazione tramite una legge che descrive il rapporto tra pressione locale e aree. Queste possono essere espresse come:

$$\begin{aligned}\alpha_t + (u\alpha)_x &= 0; \\ \rho(u_t + uu_x) &= -p_x - F; \\ p - p_e &= P(\alpha) - T\alpha_{xx};\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dove x misura la distanza assiale lungo il tubo, t il tempo, $\alpha(x, t)$ l'area della sezione trasversale del tubo, $u(x, t)$ e $p(x, t)$ la velocità e la pressione assiali mediate sulla sezione trasversale, ρ la densità del fluido e i pedici x e t le variabili rispetto a cui si effettua la derivazione. Il termine $F \geq 0$ rappresenta la dissipazione viscosa dovuta o alle perdite frizionali distribuite, es: $F(u, \alpha)$, o alle perdite di tipo quasi-steady che si sviluppano nella regione di distacco di vena, per esempio $F = (\chi - 1)\rho uu_x$, dove $\chi = 1$ dove non è presente distacco di vena e $0 < \chi < 1$ dove invece è presente e $u_x < 0$ (Cancelli et Pedley 1985).

La legge non lineare $P(\alpha)$ nella terza equazione caratterizza l'adattamento estremamente variabile del tubo al variare della sua configurazione da disteso ($p > p_e$) a deformato o estremamente compresso ($p < p_e$); una semplice approssimazione della Figura 2.8 risulta efficace in molte applicazioni. Nella stessa equazione si ritrova il termine $T\alpha_{xx}$, che approssima gli effetti di una tensione longitudinale T costante, dove il termine α_{xx} rappresenta la curvatura longitudinale della superficie del tubo. Nella stessa equazione possono essere introdotti ulteriori termini rappresentanti la rigidità alla curvatura, il coefficiente di smorzamento e l'inerzia della superficie, i quali possono avere un effetto importante nelle analisi di stabilità riguardanti le

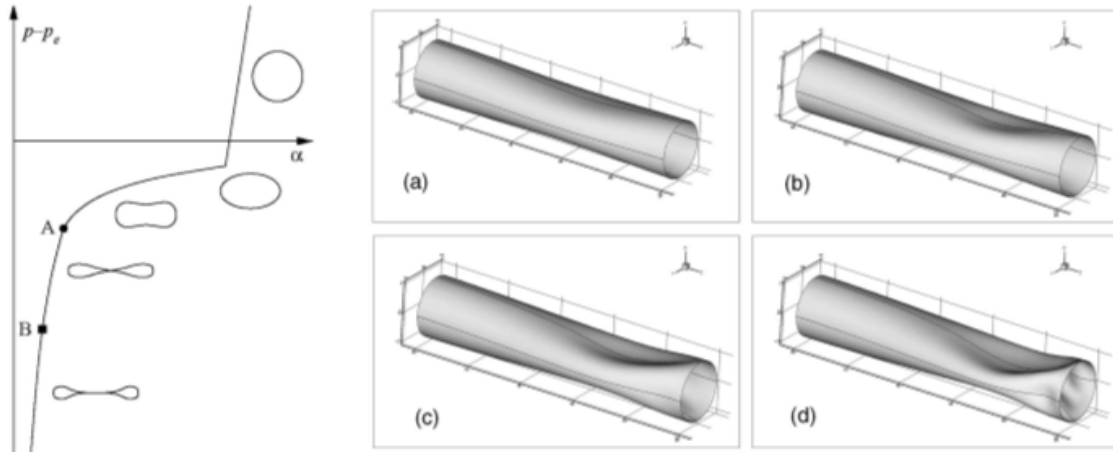


Figura 2.8: *Destra: Legge del tubo schematica. Mette in relazione la pressione trasmurale $p - p_e$ e l'area della sezione α . Le pareti opposte del tubo hanno un contatto puntuale tra A e B e un contatto lineare a partire da B. Sinistra: Computazioni effettuate tramite la teoria dei gusci geometricamente non lineare. Si dimostra la deformazione e il collasso di un tubo tenuto aperto nelle sue estremità, attraversato internamente da un flusso. La compressione esterna cresce da (a) a (d) (Heil 1997)*

interazioni tra flusso e struttura in quanto in loro assenza si potrebbero presentare singolarità .

Le PDEs nelle equazioni di cui sopra, con $T = 0$ risultano strettamente correlate con quelle che descrivono i flussi nei gas compressibili e quelli shallow-water, tanto che molte caratteristiche di questi sistemi tanto studiati sono riconducibili ai flussi nei tubi collassabili. Tra queste:

- la propagazione delle onde, infatti le onde di pressione di bassa ampiezza si propagano lungo il tubo con velocità $u \pm c$, dove $c^2 = \alpha P'(\alpha)/\rho$;
- chocking, per flussi stabili subcritici, con $0 < u < c$ in presenza di frizione, $\alpha \rightarrow 0$ per x sufficientemente elevate ma finite;
- le transizioni da flussi stabili subcritici a supercritici, forzate attraverso variazioni di pressione esterna o di proprietà dei materiali, e transizioni brusche tra flussi supercritici a subcritici, tramite un salto elastico, che risulta analogo al risalito idraulico nei flussi shallow-water.

I flussi supercritici forniscono un possibile meccanismo di limitazione del flusso. Se $u > c$ e $T = 0$, per principio le onde non possono propagarsi a monte in una regione di flusso supercritico e una riduzione nella pressione di valle non può produrre un incremento di portata. Sebbene recenti studi dimostrino che la limitazione del flusso sia una condizione necessaria ma non sufficiente per lo sviluppo di oscillazioni auto-eccitate o flutter (Bertram et Castles 1999, Gavriely et al 1989), studi computazionali 2D che tengono in conto degli effetti dovuti a dissipazione viscosa e tensioni longitudinali suggeriscono che non esiste una correlazione diretta tra la nascita di un flusso supercritico e la crescita di queste instabilità (Luo et Pedley 1998,2000). In ogni caso, recenti simulazioni bidimensionali di steady flow attraverso un tubo elastico assialsimmetrico (Shim et Kamm 2002) supportano il concetto predetto dai modelli monodimensionali riguardante la velocità d'onda che limita il flusso, anche qualora la tensione di membrana e la rigidità alla flessione permettano la propagazione di onde corte a monte attraverso una regione di flusso supercritico.

Un importante motivo per il quale includere il termine della tensione nella terza equazione è quello di accoppiare l'ordine delle PDEs con le quattro condizioni al contorno richieste per descrivere il flusso nel resistore di Starling. Queste fissano il valore dell'area in entrambe le estremità del condotto elastico e correlano la pressione con la velocità assiale locale, tenendo conto della resistenza viscosa e dell'inerzia del fluido nei tubi rigidi. Quindi, trascurando effetti di frizione, le tre equazioni predicono chocking ($\alpha = 0$ per tempi finiti (Cancelli et Pedley 1985), una manifestazione della cosiddetta instabilità della divergenza statica), ma includendo la dissipazione, sia attraverso un termine frizionale distribuito (Hayashi et al. 1998) o attraverso il termine $F = (\chi - 1)\rho uu_x$ introdotto da Cancelli e Pedley (1985), si ottengono una elevata varietà di oscillazioni auto-eccitate. Queste nascono in differenti bande di frequenza, come già è stato osservato sperimentalmente poiché si originano come i modi normali del sistema, ognuno avente un numero discreto di lunghezze d'onda lungo il segmento collassabile (Jensen 1990). Le interazioni tra i modi nonlineari danno luogo alla comparsa di comportamenti dinamici complessi (Jensen 1992) che richiamano quelli visti sperimentalmente.

Sebbene i modelli 1D permettano di ottenere significative intuizioni, essi fallisco-

no nel provvedere accordi quantitativi con gli esperimenti. Infatti sia la rappresentazione della dissipazione viscosa per flussi ad alto numero di Reynolds, sia la legge che lega pressione e area del tubo non risultano derivate razionalmente da un sistema di ordine superiore e entrambe possono manifestare significative mancanze. Questo può accadere in particolare nella descrizione della perdita di energia associata alla separazione instabile del flusso. Inoltre, l'utilizzo di un modello monodimensionale non garantisce l'individuazione di tutti i possibili tipi di instabilità che risultano presenti come le onde di Tollmien-Schlichting (TS) o i travelling-wave flutter (TWF) (Carpenter et Garrad 1985,1986). Per questi motivi, tra gli anni 1980 e 1990, si svilupparono modelli razionali 2D.

2.4.2 Modelli bidimensionali

Numerose simulazioni del flusso attraverso il resistore di Starling basate sulle leggi di Navier-Stokes hanno considerato il comportamento nel canale collapsabile 2D rappresentato in Figura 2.9. In questo sistema la rigidità della parete è controllata dalla tensione assiale. Se la tensione risulta sufficientemente bassa, la variazione di pressione viscosa attraverso il canale induce deformazioni stabili ma di elevata ampiezza lungo la superficie del tubo. Se non si considera l'inerzia della parete del tubo, le configurazioni stabili diventano instabili per oscillazioni auto-eccitate con relativamente bassa frequenza quando il numero di Reynolds viene aumentato (Liu et al. 2009, Luo et Pedley 1996, Luo et al. 2008). Durante l'oscillazione, possono svilupparsi delle onde vorticosi a valle del segmento in cui si verifica l'oscillazione nella parete. Questa tipologia di onde è anche stata osservata in canali in cui la parete presenta una determinata legge di moto (Pedley et Stephanoff 1985, Rosenfeld 1995), quindi non è chiaro se siano una risposta fluido meccanica passiva provocata dall'oscillazione della parete o se invece giochino un ruolo attivo nel meccanismo che provoca la loro comparsa.

Un'analisi sistematica della stabilità lineare del sistema effettuata in assenza di presollecitazioni (Luo et al. 2008) rivela la presenza di una struttura di instabilità a cascata. Infatti appena la rigidità della parete del tubo viene ridotta, il sistema può diventare instabile per perturbazioni aventi numero d'onda assiale e frequenza

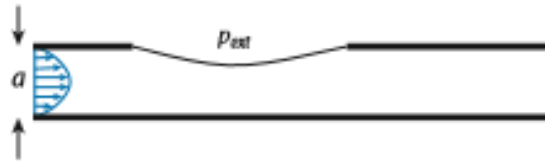


Figura 2.9: *Equivalente bidimensionale del resistore di Starling. Una parte della parete è sostituita da una membrana elastica presollecitata.*

crescente, ognuna con differenti zone di instabilità, caratteristica che è stata riscontrata anche in alcuni modelli 1D. Poiché le instabilità si sviluppano a partire da configurazioni stabili ma fortemente collassate è difficile descriverle utilizzando delle teorie semplificate. Come risultato, i meccanismi che provocano il loro sviluppo e la possibilità che questi possano operare tridimensionalmente rimangono ancora poco chiari.

In contrasto, ricerche più recenti si sono concentrate su un meccanismo di instabilità incredibilmente semplice, individuato per la prima volta da Jensen e Heil (2003). Esso può operare in due o in tre dimensioni quando la rigidità della parete risulta sufficientemente elevata. In questa situazione la variazione di pressione viscosa stabile induce solo ridotte deformazioni della parete del tubo e le oscillazioni, governate da un equilibrio dinamico tra inerzia del fluido e le elevate forze elastiche di reazione, presentano un'elevata frequenza.

Il moto oscillatorio della parete del tubo sposta periodicamente fluido dalle sezioni collassabili e lo porta in quelle rigide come mostrato in Figura 2.10. Questa tipologia viene detta sloshing flow. Se l'ampiezza del flusso risultante è maggiore nella sezione rigida di monte piuttosto che in quella rigida di valle, assume elevata importanza l'azione dell'energia cinetica del sistema. Se questo afflusso supera qualche perdita aggiuntiva, il sistema può acquisire energia dal flusso medio e l'ampiezza delle oscillazioni cresce. Per il modello 2D Jensen e Heil (2003) utilizzarono delle tecniche asintotiche che potessero predire la frequenza e i rapporti di crescita delle instabilità cresciute tramite questo meccanismo, nel caso di elevata tensione nella parete o, equivalentemente, di elevata frequenza. Se si assume che il flusso sia guidato da una fissata differenza di pressione, questi studiosi mostrarono che

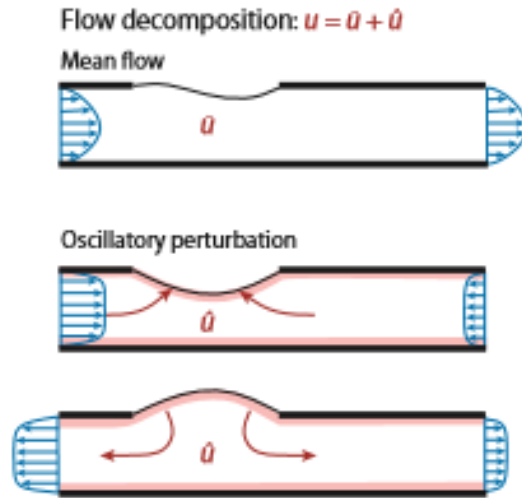


Figura 2.10: *Sloshing*. Il flusso viene scomposto nella sua media e nelle componenti oscillatorie, indicate rispettivamente come \bar{u} e \hat{u} . Il moto della parete crea degli scambi di flussi tra i segmenti rigidi e quello elastico.

l'asimmetria di questo tipo di flusso necessaria a monte o a valle può essere ottenuta realizzando il segmento rigido a valle più lungo di quello rigido di monte. Gli studi teorici riguardanti il numero di Reynolds critico raggiunto il quale si verifica la comparsa di oscillazioni furono in elevato accordo con ciò che si ottenne attraverso le simulazioni numeriche, anche nel caso in cui la tensione fosse relativamente bassa e le oscillazioni di modesta frequenza.

In tre dimensioni, le oscillazioni non assialsimmetriche e di piccola ampiezza di un tubo elastico provocano dei sloshing flow più deboli dei loro equivalenti 2D. I flussi instabili indotti sono dominati da flussi trasversali attraverso ogni sezione (Heil e Waters 2006), e da una povera interazione col flusso medio. Analizzando la disponibilità energetica del sistema per il moto della parete, Heil e Waters (2008) e Whittaker et al. (2010) mostrarono che un efficiente sfruttamento di energia dal flusso medio attraverso il meccanismo sloshing richiede che la parete del tubo oscilli allorchè la configurazione media sia non assialsimmetrica. Quindi l'instabilità si verifica preferibilmente quando le oscillazioni nascono da steady states nei quali la sezione indisturbata del tubo sia non circolare o da tubi inizialmente assialsimmetrici che si siano già deformati non assialsimmetricamente. Queste conclusioni sono

in accordo con le osservazioni sperimentali nelle quali le oscillazioni auto-eccitate tendono a svilupparsi più facilmente da configurazioni di steady state nelle quali il tubo sia fortemente deformato (Bertram 2008).

In questi studi si tratta la comparsa delle oscillazioni auto-eccitate come un problema di stabilità globale e si valuta la stabilità degli steady states determinando la frequenza e il rapporto di crescita di perturbazioni di piccola ampiezza a flussi stabili in un dominio finito. Un approccio alternativo è quello di considerare il problema attraverso un'analisi di stabilità locale, usata più comunemente per investigare le instabilità indotte dal flusso in domini infiniti attraverso la relazione di dispersione per perturbazioni travelling-wave-type (Davies 2003, Hoepffner et al. 2010). Doare e de Langre (2004, 2006) mostrarono che, nei sistemi fluido elastici monodimensionali, le instabilità globali in domini finiti possono essere interpretate in termini di modi locali che si propagano attraverso il dominio e vengono riflessi nei confini. Steward et al. (2009) adattarono questi metodi all'analisi delle oscillazioni auto-eccitate nei tubi collassabili, utilizzando dapprima un modello monodimensionale del resistore di Starling. In seguito l'approccio fu esteso alle due dimensioni combinando gli automodi locali di un'equazione del tipo di Orr-Sommerfeld alla descrizione di perturbazioni su flussi mediamente stabili in tre sezioni di un canale collassabile, utilizzando un approccio introdotto da Manuilovich (2004).

Sebbene la rappresentazione del campo di moto in termini di modi locali non conduca a un metodo computazionale particolarmente efficiente, Steward et al. (2010) ottennero un buon accordo tra la computazione del campo di moto effettuata considerando un basso numero di modi e le simulazioni numeriche. Inoltre la rappresentazione modale permette di valutare l'importanza assunta dai vari modi locali, molti dei quali sono ben spiegati dagli studi precedenti. In particolare questo approccio permette di distinguere tra modi idrodinamici (come le onde di Tollmien-Schlichting, modificate per la presenza dell'elasticità della parete) e i modi che si sviluppano a causa dell'elasticità della parete, come i travelling-wave flutter e la divergenza statica. Con queste premesse, Stewart et al (2010) furono in grado di interpretare il meccanismo di sloshing ad elevate frequenze come una conseguenza della riflessione delle onde di modi di divergenza statica e travelling-wave-flutter nel congiungimento

col tubo rigido.

Una diminuzione della tensione nella parete provoca una riduzione nella frequenza delle oscillazioni ed eccita un modo di traveling-wave-flutter convettivamente instabile. Un'analisi delle risorse energetiche del sistema suggerisce che per basse frequenze la fonte dominante di energia responsabile della crescita delle oscillazioni passa dall'essere l'energia cinetica all'essere la riduzione della dissipazione viscosa nel flusso, e ciò indica che le oscillazioni sono guidate da un meccanismo differente.

2.4.3 Modelli tridimensionali

Per descrivere le interazioni flusso-struttura tridimensionali che si verificano nel resistore di Starling, Heil et al. usarono dei metodi agli elementi finiti con i quali accoppiarono la teoria dei gusci di Kirchoff-Love, geometricamente non lineare, al flusso descritto tramite equazioni 3D di Navier-Stokes. Restrungendo inizialmente il campo di studio ai flussi Stokes e alla lubrication theory, la quale lavora bene in questo problema per bassi numeri di Reynolds, essi mostrarono in che modo la deformazione non assialsimmetrica del tubo, che può portare alla limitazione del flusso attraverso meccanismi puramente viscosi, contribuisce nelle relazioni non lineari tra struttura e flusso (Heil 1997, Heil e Pedley 1996).

Per tubi corti sottoposti a compressione, l'instabilità dovuta alla deformazione della sezione potrebbe essere subcritica, portando isteresi nella relazione pressione-flusso, tanto che un tubo inizialmente aperto e attraversi uno stato di collasso che sotto certe condizioni potrebbe portare ad avere a contatto le pareti opposte del tubo.

Le simulazioni sui flussi di Stokes effettuate da Heil (1997) portarono a degli ottimi accordi con i risultati sperimentali. L'applicazione di queste computazioni venne recentemente estesa alla descrizione dei flussi stabili tridimensionali in tubi deformati non uniformemente per Re di poche centinaia (Hazel e Heil 2003). Questi studi rivelarono la presenza di getti gemelli che emergono dal tratto in cui la sezione è quasi completamente collassata e presenta la tipica forma bilobata e un flusso attraverso di esso che assume la direzione opposta. I getti si espandono e si riuniscono poco a valle, in accordo con le osservazioni di Bertram e Godbole (1997).

Sebbene in queste computazioni si assuma che il flusso abbia una quadrupla simmetria, le osservazioni riguardanti i fenomeni sui tubi collassabili mostrano un getto che emerge dalla costrizione il quale si mantiene attaccato a una parete (attraverso l'effetto di Coanda) e distaccato nell'altra con una simmetria solo doppia. È ancora una questione aperta se la caduta del grado di simmetria sottintenda un ulteriore potenziale meccanismo di instabilità in questo sistema.

Capitolo 3

Modellazione matematica

3.1 Formulazione del problema

Il fenomeno del collasso risulta essere estremamente complesso e per arrivare alla definizione di un modello matematico è necessario effettuare delle semplificazioni. In questo lavoro si è scelto di utilizzare il lumped parameter model introdotto da Pedley nel 1978, che riduce l'intero problema a un sistema differenziale di terzo ordine. Seppure non tutti i fenomeni che avvengono possano essere analizzati, il sistema descrive molti comportamenti interessanti che spesso corrispondono a quelli osservati sperimentalmente. Il fatto che il sistema sia di basso ordine permette di ottenere maggiori risultati analitici e fisici, il che è estremamente importante in quanto a seconda dei valori dei parametri che vengono utilizzati il comportamento predetto risulta molto vario.

L'assunzione più drastica che viene fatta in questo modello riguarda la configurazione geometrica del tubo collassabile, che si ritiene possa essere completamente descritta da un'unica variabile, l'area \hat{A} , definita come la superficie misurata nel punto più soggetto a costrizione.

Una seconda ipotesi riguarda l'elasticità della parete del tubo. Questa viene descritta tramite una relazione che lega la pressione trasmurale p_{tm} e l'area \hat{A} . Inoltre questa funzione non varia con la distanza longitudinale x e si considera ancora una volta come punto rappresentativo dell'intero segmento quello in cui la sezione è la più ristretta. Ciò equivale ad affermare che quando il valore di \hat{A} è noto lo sono anche

la configurazione, la forma longitudinale e trasversale del tubo. Non si considera possibile una distensione indipendente del tubo a monte del restringimento. Di conseguenza non è importante la presenza di tensioni longitudinali e di curvature nella parete del tubo, eccetto per l'effetto di esse nella relazione tra pressione e area.

Il vantaggio principale di queste assunzioni è che l'equazione differenziale in \hat{A} è ordinaria nel tempo t e non parziale rispetto al tempo t e all'ascissa x , quindi può essere risolta in maniera relativamente semplice. Il segmento collassabile viene modellizzato prendendo in studio tre sezioni (Figura 2.2), procedendo da monte verso valle:

- la prima è situata nel tubo rigido a monte del condotto elastico e le grandezze ad essa relative sono indicate col pedice 1;
- la seconda è la sezione in cui si verifica il maggior restringimento e le grandezze ad essa associate non hanno alcun pedice;
- la terza si trova nel tubo rigido a valle del condotto elastico e le sue grandezze portano il pedice 2.

Le grandezze considerate nel modello sono rese adimensionali operando nel modo seguente:

- Area \hat{A} : adimensionalizzata rispetto all'area indisturbata \hat{A}_0 misurata a monte e a valle del restringimento;
- Velocità: adimensionalizzate rispetto a una velocità scala arbitraria \hat{U}_0 ;
- Pressioni: adimensionalizzate rispetto a $\rho \hat{U}_0^2$ dove ρ rappresenta la densità del fluido, in questo caso acqua;
- Tempi: adimensionalizzati rispetto ad $\frac{a_0}{\hat{U}_0}$ dove a_0 rappresenta il raggio dei tubi rigidi.

L'unica variabile indipendente del modello è il tempo t adimensionalizzato. Le equazioni che governano il Lumped Parameter Model di Pedley vengono ricavate combinando le equazioni specifiche che descrivono caratteristiche elastiche del tubo,

conservazione della massa, quantità di moto nei tubi rigidi, energia a valle e a monte del restringimento. Si procede analizzando nel dettaglio le singole equazioni.

3.1.1 Elasticità

Le proprietà elastiche del segmento collassabile, come già accennato nel precedente capitolo, sono rappresentate da una relazione che lega la pressione transmurale $p_{tm} = p - p_c$ e l'area A della sezione del tubo misurati entrambi nel punto più ristretto.

$$p - p_c = P(A); \quad (3.1)$$

Teoricamente, affinché si ottengano dei risultati matematici che siano in accordo con quelli ottenuti negli esperimenti, la funzione $P(A)$ dovrebbe essere misurata indipendentemente per ogni segmento di tubo elastico usato. In questo caso, per semplicità, si userà una funzione all'interno della quale verranno incorporati i risultati ottenuti dallo studioso Flaherty (1972) per piccoli valori di A , validi qualora non si registrino variazioni longitudinali. Nella sua trattazione, Flaherty affermò che, allorquando le pareti opposte del tubo siano in contatto tra loro, il raggio originale del tubo non può più considerarsi rappresentativo alla descrizione della relazione pressione-area. L'unica lunghezza scala utilizzabile risulta essere il raggio di curvatura R . Dalle analisi sulla flessibilità della parete del tubo è noto che sussiste la seguente relazione:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}; \quad (3.2)$$

Dove M è il momento flettente misurato per unità di lunghezza del tubo, I è il momento di inerzia della sezione della parete del tubo per unità di lunghezza e infine E rappresenta il modulo di Young del materiale che si assume costante. Tra queste quantità l'unica che dipende dal raggio di curvatura R è il momento flettente M , proporzionale alla forza di flessione (per unità di lunghezza) per la distanza. Quindi l'equazione (2) indica che la pressione transmurale $p_{tm} = p - p_c$ è proporzionale a R^{-3} , a sua volta proporzionale ad $A^{-\frac{3}{2}}$. In questa trattazione si utilizza la formulazione proposta da Shapiro (1977) e si usa la forma più semplice di $P(A)$, consistente coi risultati per A tendente a zero, e che rappresenta la variazione nella sezione circolare

quando la pressione trasmurale è nulla.

$$P(A) = P_0(1 - (A_c/A)^{3/2}); A < A_c \quad (3.3)$$

$$P(A) = 10P_0(A/A_c - 1); A > A_c \quad (3.4)$$

In queste relazioni si assume che A_c sia l'area adimensionalizzata raggiunta la quale ha inizio la transizione e che sia pari all'unità. La pressione P_0 è una pressione assunta come grandezza scala per effettuare l'adimensionalizzazione \hat{P}_0 , il cui valore verrà scelto in seguito. Il fattore 10 che si trova nella seconda delle equazioni è un artificio matematico atto a descrivere la rigidità più elevata che caratterizza la sezione circolare. In alcuni esperimenti potrebbe risultare fondamentale includere le caratteristiche inerziali e viscoelastiche della parete del tubo. I termini che vengono implementati in questo caso sono:

$$\eta\dot{A} + I_w\ddot{A};$$

e vengono aggiunti nella seguente equazione:

$$p - p_c = P(A) + \eta\dot{A} + I_w\ddot{A}; \quad (3.1b)$$

η e I_w sono delle costanti che rappresentano le proprietà viscoso e inerziali, mentre i punti al di sopra delle aree indicano una derivazione rispetto al tempo d/dt . Questi termini non contribuiscono ad aumentare l'ordine del sistema, ma aumentano il grado di imprecisione del modello in quanto il loro valore non è ben noto.

Caratteristiche viscoelastiche e inerziali del tubo collassabile

Per effettuare un confronto tra i risultati ottenuti trascurando o meno le caratteristiche viscoelastiche e inerziali del condotto, si è proceduto effettuando in questo lavoro una stima del loro valore, in quanto non indicata nella trattazione di Pedley.

Per quanto riguarda la costante $\hat{\eta}$, che rappresenta le proprietà viscoso della parete del tubo, si è considerato che il latex industriale, materiale di cui è costituito il tubo collassabile, presenta un coefficiente di viscosità a $25^\circ C$ compreso tra 30 e 35 cP e si è utilizzato un valore intermedio pari a 33 cP. Il Poise (P) è un'unità di misura del sistema CGS che equivale a $0.1Pa \cdot s$. Effettuando la seguente adimensionalizzazione:

$$\hat{\eta} = 33cP = 33 \frac{g}{m \cdot s};$$

$$\eta = 33 \cdot 10^{-3} \frac{\hat{a}_0}{\hat{\rho} \hat{a}_0^2} = 0.0349 \cong 0.035;$$

Il valore di η utilizzato nella computazione è pari a 0.035.

Nel valutare il parametro inerziale adimensionale I_w si è partiti dalla definizione di momento di inerzia per un tubo cilindrico con parete tanto sottile che il suo valore possa essere trascurato, quindi:

$$\hat{I}_w = \frac{1}{2} M r^2 = \frac{1}{2} \rho 2\pi r^3 l;$$

Considerando che la densità del lattice ρ è pari a $980 \frac{kg}{m^3}$ e che il rapporto tra la lunghezza dimensionale del tubo l e la lunghezza scala \hat{l}_0 è pari a 10 si effettua l'adimensionalizzazione:

$$I_w = \frac{\rho \pi r^3 l}{\hat{\rho} \hat{a}_0^3 \hat{l}_0} = \frac{980 \cdot 10\pi}{1000} = 30.79 \cong 30.8$$

Il valore di I_w utilizzato nella computazione è pari a 30.8.

3.1.2 Conservazione della massa

Le seguenti equazioni descrivono la relazione che lega la differenza tra portata in entrata e in uscita e la variazione di volume nel segmento collassabile. Sapendo che nella maggior parte degli esperimenti il collasso avviene in prossimità della terminazione di valle del tubo elastico, si suppone che tutta la variazione di volume avvenga a monte del punto più ristretto. Si applica il principio di conservazione della massa per due volte. Nella prima si considerano la sezione in cui il restringimento è massimo e la sezione del tubo rigido di valle. Poiché tutta la variazione di volume avviene prima della sezione più ristretta è possibile affermare che la portata che attraversa il restringimento è uguale a quella che attraversa la sezione di controllo nel tubo rigido di valle, la cui area è posta pari all'unità. Risulta:

$$uA = u_2; \tag{3.5}$$

Nella seconda applicazione della conservazione della massa si considera ciò che accade tra il tubo rigido di monte e la sezione più contratta. Anche in questo caso l'area del tubo rigido si pone pari all'unità. Per tener conto della variazione di volume, si

introduce nell'equazione un termine dato dal prodotto della lunghezza adimensionalizzata del segmento compreso tra le due sezioni sotto studio e l'area media A_v dello stesso. Si scrive:

$$u_1 - uA = l(\dot{A}_v); \quad (3.6)$$

In assenza di dati sperimentali dettagliati si assume arbitrariamente che A_v sia proprio pari alla media aritmetica delle aree delle due sezioni:

$$A_v = \frac{1}{2}(1 + A); \quad (3.7)$$

3.1.3 Conservazione della quantità di moto nei tubi rigidi

I tubi rigidi a monte e a valle del condotto elastico possono presentarsi lunghi e rettilinei, cosicché la variazione di pressione attraverso essi sia proporzionale alla portata, oppure possono incorporare dei restringimenti variabili e in tal caso la differenza di pressione sarà proporzionale al quadrato della portata, eccezion fatta per le portate più ridotte. I tubi reali avranno probabilmente delle caratteristiche intermedie rispetto a quelle dei due casi menzionati e in questo modello verranno descritte tramite i parametri di resistenza \hat{R}_1 e \hat{R}_2 , funzioni non decrescenti della velocità che attraversa le sezioni di studio. In molte trattazioni si considerano \hat{R}_1 e \hat{R}_2 come costanti. Le caratteristiche inerziali del fluido che attraversa il tubo vengono rappresentate tramite una funzione lineare. Se si suppone che il fluido giunga nel tubo rigido a monte da un serbatoio con carico costante P_1 e che fuoriesca dal tubo rigido a valle a pressione atmosferica, le equazioni della conservazione della quantità di moto rispettivamente per il tubo rigido di monte e di valle sono le seguenti:

$$P_1 - p_1 = R_1 u_1 + I_1(\dot{u}_1); \quad (3.8)$$

$$p_2 = R_2 u_2 + I_2(\dot{u}_2); \quad (3.9)$$

Dove $R_{1,2} = \frac{\hat{R}_{1,2}}{\rho \bar{u}_0}$ sono i parametri di resistenza adimensionalizzati e $I_{1,2}$ le corrispondenti inerzie adimensionalizzate.

3.1.4 Conservazione della quantità di moto a valle del restringimento

Già in precedenza è stata enfatizzata l'importanza della perdita di carico instabile associata allo sviluppo del distacco di vena. A causa di esso, nel momento in cui l'area del tubo si sta riducendo, si ha lo sviluppo di un getto separato e probabilmente turbolento a valle del restringimento. La perdita di carico scompare allorché il tubo si riapre. Poiché alcune delle oscillazioni osservate sperimentalmente presentano periodi con valori intorno ai 0.02 s (Ur e Gordon, 1970), comparabili con i tipici tempi convenzionali \hat{a}_0/\hat{U}_0 , la relazione di fase esistente tra la perdita di carico instabile e la velocità \hat{u} nella costrizione risulta essere importante. L'utilizzo di una relazione del tipo quasi-steady non permette di rappresentare pienamente il fenomeno; si giustifica col fatto che quest'area della meccanica dei fluidi è ancora poco conosciuta e non esistono altre valide alternative. Per getti distaccati e stabili che attraversano un restringimento affilato, l'equazione della conservazione della quantità di moto può essere applicata integralmente al fluido compreso tra il restringimento e una sezione di valle in cui il profilo di velocità sia approssimativamente piatto e il getto si sia ricongiunto con le pareti. Quando il getto è turbolento questa condizione non si raggiunge molto lontano dal restringimento. L'utilizzo dell'equazione richiede la conoscenza del valore della pressione nelle pareti del tubo a valle del restringimento. Questa dovrebbe essere pressoché uniforme e pari alla pressione nel restringimento, in quanto altrimenti il gradiente di pressione laterale non permetterebbe la formazione di un getto avente profilo parallelo. Assumendo che la forza longitudinale viscosa di taglio sia trascurabile, l'equazione risulta essere la seguente:

$$p + Au_2 = p_2 + u_2^2;$$

Se la si incorpora all'equazione di conservazione di massa tra il restringimento e la sezione a valle, diventa:

$$p - p_2 = -f(A)u_2^2; \quad (3.10)$$

dove:

$$f(A) = 1/A - 1; \text{ se } A < 1, u_2 > 0 \quad (3.11)$$

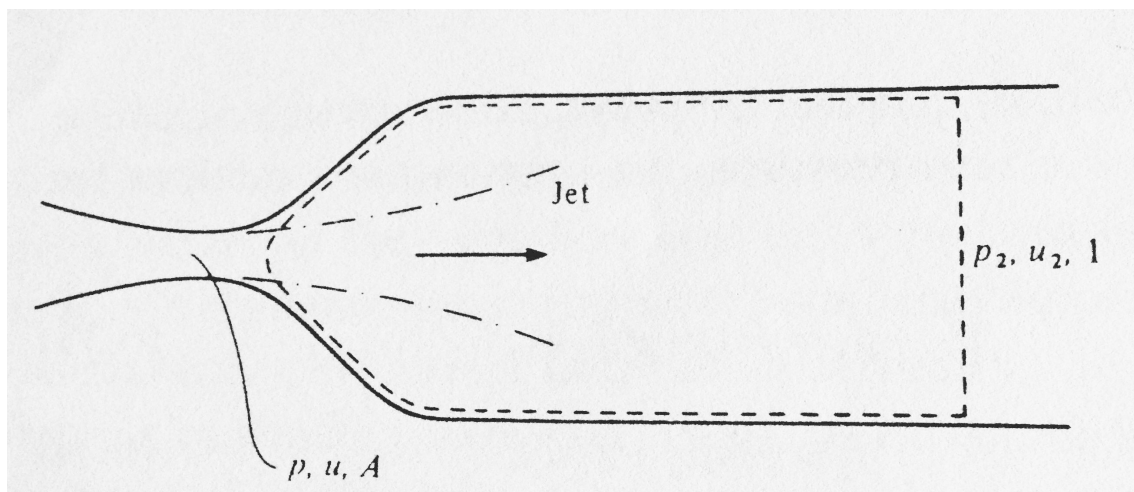


Figura 3.1: *Superficie di controllo sulla quale viene applicata l'equazione integrale della quantità di moto*

Quando il tubo è disteso la funzione $f(A)$ definita in questo modo risulta inappropriata in quanto non si ha il distacco del getto. Allora si assume che quando $A \geq 1$ la perdita di carico sia trascurabile e la $f(A)$ sia la seguente:

$$f(A) = \frac{1}{2}(1/(A^2) - 1) \geq 0; \text{ se } A \geq 1, u_2 > 0 \quad (3.12)$$

Inoltre è possibile che durante oscillazioni di elevata ampiezza il flusso nel restringimento possa brevemente invertire la sua direzione. In questo caso ci sarà una trascurabile perdita di carico del tipo quasi-steady e la funzione $f(A)$ sarà:

$$f(A) = \frac{1}{2}(1/(A^2) - 1) > 0; \text{ se } A < 1, u_2 < 0 \quad (3.13)$$

3.1.5 Conservazione della quantità di moto a monte del restringimento

Se la possibilità di un distacco di getto a monte viene trascurata, l'unica possibilità di avere una perdita di carico del tipo quasi-steady tra la sezione di controllo nel tubo rigido a monte e il restringimento è dato dall'azione diretta dovuta alla viscosità. L'assunzione più semplice, che risulta appropriata per un segmento di tubo flessibile poco esteso longitudinalmente, è quella di trascurare questo contributo e l'inerzia

del fluido nel tratto a monte. In questo caso si ottiene:

$$p_1 + \frac{1}{2}u_1^2 - (p + \frac{1}{2}u^2) = 0; \quad (3.14)$$

Questa espressione risulta essere inadeguata per tubi elastici lunghi, per restringimenti poco marcati e per collassi che riguardino una buona parte del tubo in cui si abbia una superficie ridotta ma un'alta resistenza. Specialmente in quest'ultimo caso sarà registrata un'elevata perdita di carico dovuta alla viscosità. Quindi alla precedente relazione viene aggiunto a destra il termine $1/4lR(A)u$ in cui $1/4l$ rappresenta arbitrariamente la lunghezza di tubo interessata dal collasso e $R(A)$ è una misura adimensionalizzata della resistenza per unità di lunghezza del segmento collassato avente area A . Se si assume che la sezione del tubo flessibile a monte del punto più ristretto sia un'ellisse che vari molto gradualmente, la resistenza di tipo quasi-steady può essere espressa tramite la seguente relazione, ricavata dalla teoria della lubrificazione:

$$R(A) = \frac{4}{ReA}(\delta + \frac{1}{\delta}); \quad (3.15)$$

Dove $Re = \hat{a}_0 \hat{U}_0 / \nu$ è un numero di Reynolds assunto costante e δ è il rapporto tra asse minore e asse maggiore dell'ellisse. Quando il tubo è disteso l'area A risulta maggiore di 1 e δ assumerà un valore unitario.

$$\delta = 1, \text{ se } A > 1;$$

La relazione si ricondurrà alla formula di Poiseuille:

$$R(A) = 8/(ReA);$$

Quando invece l'area A è minore di 1 la relazione esistente tra δ e A deve essere espressa esplicitamente. Per i tubi di gomma è corretta l'assunzione che il perimetro si mantenga costante e, con alcune semplificazioni, si pone δ pari a:

$$\delta = (8A)/(\pi^2), \text{ se } A < 1; \quad (3.16)$$

Se il segmento a monte è abbastanza lungo l'inerzia del fluido non può essere trascurata. Se ne tiene conto aggiungendo un altro termine, lu_v , a destra dell'equazione

(11). Il termine u_v rappresenta una velocità media del fluido che si assume arbitrariamente sia riferita al punto di area A_v , il quale si considera situato circa a metà della lunghezza del tubo. Quindi vale la relazione:

$$u_v A_v - u A = \frac{1}{2} l \dot{A}_v; \quad (3.17)$$

La forma finale sarà la seguente:

$$p_1 + \frac{1}{2} u_1^2 - (p + \frac{1}{2} u^2) = \frac{1}{4} l R(A) u + l u_v; \quad (3.18)$$

Quest'ultima espressione completa la formulazione del lumped-parameter model.

Il modello è stato utilizzato da Pedley con tre obiettivi:

- esaminare quali stati di equilibrio siano possibili;
- investigare la loro stabilità;
- computare la forma delle oscillazioni non lineari che possono nascere quando si abbia instabilità.

Seppure vengano richiesti dei valori numerici da assegnare ai parametri adimensionali, questi verranno scelti il più lontano possibile da quelli utilizzati da Conrad (1969) per i suoi esperimenti. Poiché non tutti i parametri possono essere assegnati precisamente i risultati ottenuti saranno solo qualitativi.

3.2 Equazioni del modello

Partendo dalle equazioni indicate da Pedley come atte a descrivere il comportamento fisico del tubo collassabile, in particolare le sette seguenti:

$$p - p_c = P_0 \left(1 - (A_c/A)^{3/2} \right); \quad (3.1)$$

$$uA = u_2; \quad (3.5)$$

$$u_1 - uA = \frac{1}{2}l \frac{dA}{dt}; \quad (3.6)$$

$$P_1 - p_1 = R_1 u_1 + I_1 \frac{du_1}{dt}; \quad (3.8)$$

$$p_2 = R_2 u_2 + I_2 \frac{du_2}{dt}; \quad (3.9)$$

$$p - p_2 = -f(A)u_2^2; \quad (3.10)$$

$$p_1 + \frac{1}{2}u_1^2 - p - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{4}lR(A)u + l \frac{du_v}{dt}; \quad (3.18)$$

dove nella (3.1) si sono trascurate le caratteristiche viscoelastiche e inerziali, in questa parte della tesi si è ripercorsa seppur per vie alternative la strada proposta dallo studioso col fine di riottenere i suoi stessi risultati.

Pedley scelse come variabili fondamentali del modello le tre seguenti:

- A , l'area della sezione in cui il restringimento è massimo;
- u , la velocità della corrente nello stesso punto;
- u_2 , la velocità della corrente nella sezione di controllo nel tubo rigido a valle.

Nel presente lavoro di tesi, per mantenere il sistema differenziale ordinario di terzo grado si è fatta una scelta leggermente differente. In particolare, non si è utilizzata come variabile fondamentale la velocità u , introducendo al suo posto la variabile y , la quale è definita come variazione nel tempo dell'area nella sezione di massima costrizione. Riassumendo, le variabili fondamentali utilizzate nel presente lavoro sono:

- A , l'area della sezione in cui il restringimento è massimo;
- y , la variazione nel tempo dell'area nella sezione di massima costrizione;

- u_2 , la velocità della corrente nella sezione di controllo nel tubo rigido a valle.

Effettuando le relative sostituzioni si ottiene il seguente sistema differenziale:

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= y; \\
\frac{du_2}{dt} &= \frac{1}{I_2} \left\{ p_c + P_0 \left[1 - \left(\frac{A_c}{A} \right)^{\frac{3}{2}} \right] - R_2 u_2 + f(A) u_2^2 \right\}; \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{2}{l} \frac{1}{\frac{l}{1+A} + I_1} \left\{ P_1 - R_1 \left[u_2 + \frac{1}{2} l y \right] - \frac{I_1}{I_2} \left[p_c + P_0 \left[1 + \left(\frac{A_c}{A} \right)^{\frac{3}{2}} \right] - R_2 u_2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f(A) u_2^2 \right] + \frac{1}{2} \left[u_2^2 + l u_2 y + \frac{1}{4} l^2 y^2 \right] - p_c - P_0 \left[1 + \left(\frac{A_c}{A} \right)^{\frac{3}{2}} \right] - \frac{1}{2} \frac{u_2^2}{A^2} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} l R(A) \frac{u_2}{A} + l \left\{ \frac{l}{2(1+A)^2} y + \frac{2u_2}{(1+A)^2} - \frac{2}{I_2(1+A)} \left[p_c + P_0 \left[1 + \left(\frac{A_c}{A} \right)^{\frac{3}{2}} \right] - R_2 u_2 + f(A) u_2^2 \right] \right\} \right\};
\end{aligned} \tag{3.19}$$

3.2.1 Caso di studio: lumped parameter model di Pedley con termini inerziali e viscoelastici

Lo studioso Pedley, nel suo lumped parameter model, decise di trascurare le caratteristiche inerziali e viscoelastiche del segmento collassabile, ritenendo che, a causa dell'incerta valutazione dei parametri che sarebbero andati a esplicitarle, il modello avrebbe ulteriormente perso in accuratezza.

In questo lavoro si è deciso di indagare il comportamento del modello anche in questo senso, prendendo in considerazione viscoelasticità e inerzia, in modo tale da poter effettivamente osservare quali analogie e differenze sussistano in confronto alla formulazione classica.

Rispetto al caso appena trattato, nel modello che andiamo a formulare, le equazioni fondamentali da cui partire risultano le stesse eccezion fatta per la 3.1 che viene sostituita con la 3.1b, nella quale sono presenti le costanti η e I_w .

Procedendo con le sostituzioni si ottiene la seguente formulazione del modello:

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= y; \\
\frac{du_2}{dt} &= \frac{1}{I_2} \left\{ p_c + P(A) + \eta y - R_2 u_2 + f(A) u_2^2 \right\} \\
&\quad \frac{I_w}{I_2} 1/ \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2 l I_w}{(1+A) I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A} \right] \\
&\quad \left\{ P_1 - R_1 \left(u_2 + \frac{1}{2} l y \right) - \frac{I_1}{I_2} [p_c + P(A) + \eta y - R_2 u_2 + f(A) u_2^2] + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \left(u_2 + \frac{1}{2} l y \right)^2 - p_c - P(A) - \eta y - \frac{1}{2} \left(\frac{u_2}{A} \right)^2 - \frac{1}{4} l R(A) \frac{u_2}{A} + \right. \\
&\quad \left. - l \left\{ -\frac{2 u_2}{(1+A)^2} - \frac{1}{2} \frac{l}{(1+A)^2} y + \frac{2}{(1+A) I_2} [p_c + P(A) + \eta y + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - R_2 u_2 + f(A) u_2^2] \right\} \right\}; \tag{3.20} \\
\frac{dy}{dt} &= 1/ \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2 l I_w}{(1+A) I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A} \right] \\
&\quad \left\{ P_1 - R_1 \left(u_2 + \frac{1}{2} l y \right) - \frac{I_1}{I_2} [p_c + P(A) + \eta y - R_2 u_2 + f(A) u_2^2] + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} \left(u_2 + \frac{1}{2} l y \right)^2 - p_c - P(A) - \eta y - \frac{1}{2} \left(\frac{u_2}{A} \right)^2 - \frac{1}{4} l R(A) \frac{u_2}{A} + \right. \\
&\quad \left. - l \left\{ -\frac{2 u_2}{(1+A)^2} - \frac{1}{2} \frac{l}{(1+A)^2} y + \frac{2}{(1+A) I_2} [p_c + P(A) + \eta y + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - R_2 u_2 + f(A) u_2^2] \right\} \right\};
\end{aligned}$$

3.3 Stati di equilibrio

La computazione degli stati di equilibrio o basic states viene effettuata considerando il sistema di equazioni differenziali appena riportato e ponendo nulle le derivate delle variabili fondamentali rispetto al tempo. Si assume che nello steady state le velocità u_1 , u_2 e la portata uA siano tutte uguali a una portata Q , in quanto si ritiene che nelle sezioni di controllo 1 e 2, rispettivamente situate nel tubo rigido a monte e a valle del condotto elastico, l'area possa essere considerata unitaria. Si procede fissando il valore di Q e calcolando la A dello steady state associata ad essa. In questo caso, come indicato da Pedley, si opera sull'equazione differenziale del modello (3.19) relativa a u_2 e si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{1}{I_2} \left\{ p_c + P_0 \left[1 - \left(\frac{A_c}{A} \right)^{\frac{3}{2}} \right] - R_2 u_2 + f(A) u_2^2 \right\} = 0;$$

Sostituendo la portata Q e indicando sinteticamente la funzione $P(A)$, come riportato nella relazione (3.3), diventa:

$$R_2 Q - f(A) Q^2 = p_c + P(A) \quad (3.21)$$

Sviluppando i termini, si nota che, con un cambio di variabile, questa espressione è riconducibile a un'equazione di terzo grado risolvibile analiticamente. Infatti:

$$R_2 Q - \left(\frac{1}{A} - 1 \right) Q^2 = p_c + P_0 \left(1 - \left(\frac{1}{A} \right)^{\frac{3}{2}} \right);$$

Ponendo:

$$A = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{A}$$

Si ottiene:

$$R_2 Q - \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) Q^2 = p_c + P_0 \left(1 - \left(\frac{1}{k^3} \right) \right);$$

Riordinando i termini l'equazione diventa:

$$(R_2 Q + Q^2 - p_c - P_0) k^3 - Q^2 k + P_0 = 0;$$

Questa, dividendo per il fattore che moltiplica il termine di terzo grado, viene ricondotta alla forma convenzionale:

$$k^3 + pk + q = 0;$$

Dove p e q sono pari a:

$$p = -\frac{Q^2}{R_2Q + Q^2 - p_c - P_0};$$

$$q = \frac{P_0}{R_2Q + Q^2 - p_c - P_0};$$

Le soluzioni dell'equazione sono:

$$k = u + v;$$

Dove:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}};$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}};$$

Bisogna ricordare che per il teorema fondamentale dell'algebra un'equazione di terzo grado deve avere 3 soluzioni. Bisognerebbe quindi valutare anche i risultati complessi delle radici, ma, poiché la soluzione di questa relazione è direttamente proporzionale a una variabile fisica, non ha senso farlo.

Per computare in dettaglio i basic states è necessario assegnare dei valori numerici ai parametri adimensionali P_0 , p_c , R_2 e l . A questo scopo vengono utilizzati solo dei valori che risultano strettamente appropriati con quelli utilizzati da Conrad nei suoi esperimenti. In particolare il raggio interno del tubo non collassato \hat{a}_0 era pari a 0.0063 m, e la sua lunghezza pari a $\hat{l} = 0.089m$. Nei calcoli si considererà che il rapporto tra la lunghezza del tubo dimensionale \hat{l} e la lunghezza scala \hat{l}_0 sia pari a $l = \hat{l}/\hat{l}_0 = 10$.

Conrad inoltre utilizzò portate maggiori di $3 \times 10^{-5}m^3s^{-1}$. In questo caso si sceglie una velocità scala $\hat{U}_0 = 0.15ms^{-1}$, corrispondente a una portata pari a $1.9 \times 10^{-5}m^3s^{-1}$, in modo che la pressione-scala utilizzata per l'adimensionalizzazione sia pari a $\rho\hat{U}_0 = 22.5Nm^{-2}$, ricordando che per l'acqua $\rho = 10^3kgm^{-3}$. Il numero di Reynolds, Re , è 860, mentre la pressione esterna utilizzata per gli esperimenti analizzati risulta pari a 29.5 mmHg corrispondente al valore di p_c pari a 180. In molti calcoli si è utilizzato però il valore di p_c pari a 200, che tende a incrementare il massimo valore di $p_1 - p_2$.

Per quanto riguarda la scelta del valore del termine P_0 Conrad riporta che per il tubo di gomma in termini adimensionali $P = -25.4$ quando $A = 0.21$. Usando la seguente relazione:

$$P(A) = P_0 \left(1 - (A_c/A)^{3/2} \right); \text{ se } A < A_c$$

si ottiene che $P_0 = 2.7$. In tutti i calcoli è stato utilizzato il valore $P_0 = 4$. Questo provoca la diminuzione del massimo della curva $p_1 - p_2$ versus Q .

Infine rimane da scegliere $R_2 = \frac{\hat{R}_2}{\rho \hat{U}_0}$. In molti calcoli si considera questo valore costante per convenienza, sebbene molte delle resistenze di valle computate da Conrad provengano da un restringimento attraverso cui la diminuzione di pressione risulti uguale a kQ^2 più una costante. Si nota che questa variazione non provoca importanti conseguenze, quindi si stima un accettabile valore di R_2 dalla curva 4 in figura 2.4. Considerando $\hat{p}_2 = 15mmHg$ per una portata di $10cm^3s^{-1}$ si ottiene $R_2 \approx 170$. Infatti i valori utilizzati sono $R_2 = 50, 75, 150$. Si noti che il più piccolo tra questi valori risulta minore di $\frac{p_c}{\sqrt{1.5P_0}}$, mentre gli altri due sono superiori.

È anche possibile ricavare le radici dell'equazione (3.21), come suggerisce Pedley, direttamente dalla Figura 3.2 in cui la parte destra e la parte sinistra dell'equazione sono plottate rispetto ad A . Mentre per la parte destra dell'equazione è plottata una sola curva, per la parte sinistra sono presenti diverse curve corrispondenti a valori differenti della variabile Q e di altri parametri. Si osserva che l'equazione può avere una o tre soluzioni.

L'equazione (3.21) ha sempre almeno una soluzione per due motivi. In primo luogo $P(A)$ tende a ∞ per A che tende a ∞ , mentre $f(A)$ tende a $-1/2$; in secondo luogo $P(A)$ tende a $-\infty$ più rapidamente per A che tende a zero di quanto non faccia $-f(A)$. Inoltre se $R_2Q > p_c$ ci sarà sempre una radice maggiore di 1. Questa situazione si rivela essere sempre stabile e si può identificare con lo stato che si verifica per grandi portate quando il tubo è disteso, corrispondente al tratto lineare nel grafico della differenza di pressione in funzione della portata.

Quando R_2Q viene ridotto lentamente al di sotto di p_c , il valore di equilibrio di A diminuirà diventando minore di 1 e il tubo inizierà il processo di collasso. Il collasso avverrà in maniera diversa a seconda che l'equazione abbia una soluzione

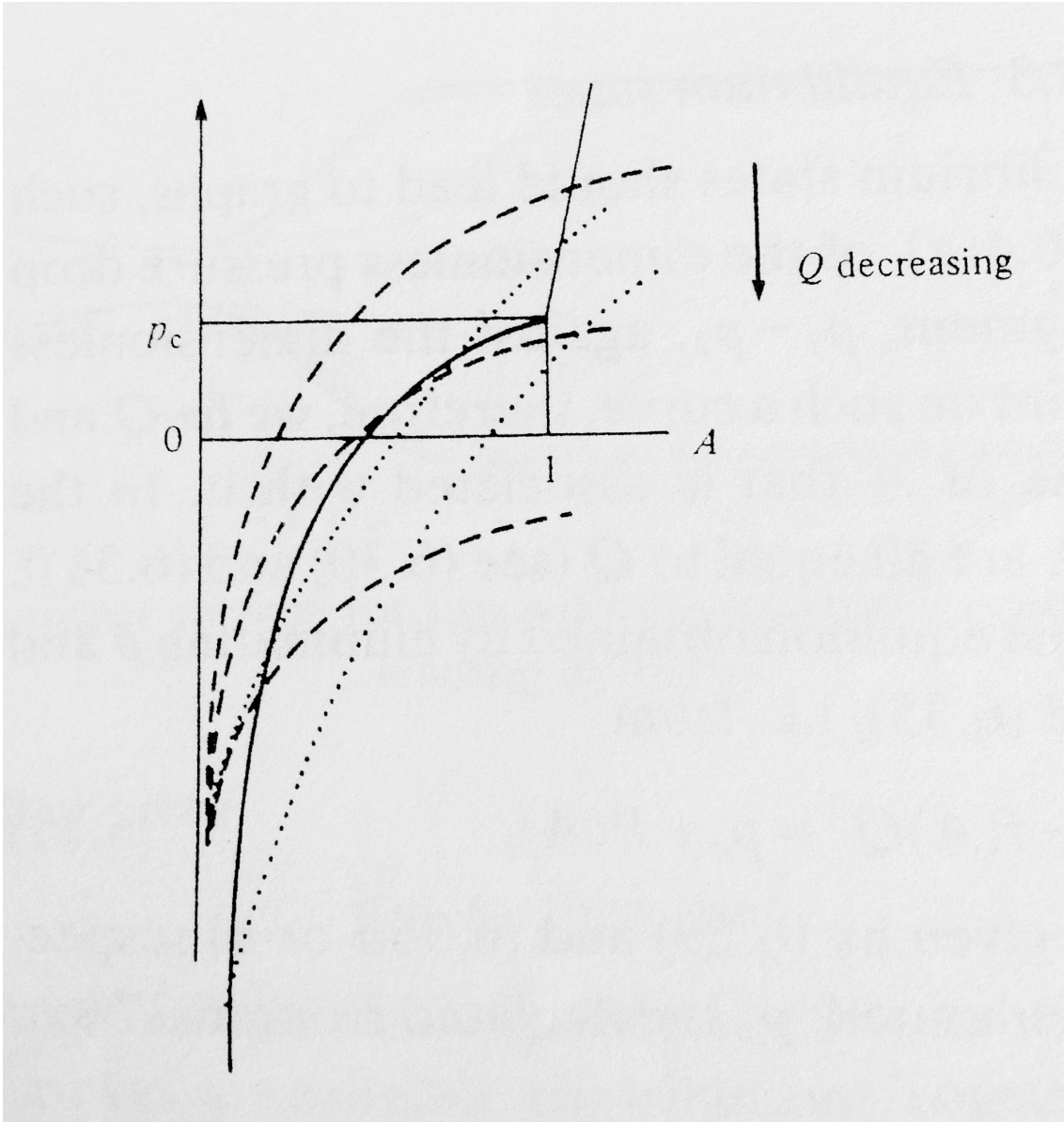


Figura 3.2: Le curve riportate rappresentano rispettivamente la parte a destra (curva continua) del segno di uguaglianza e la parte a sinistra (curva tratteggiata se la condizione (3.22) è soddisfatta, curva puntinata se non soddisfatta) dell'equazione (3.21).

per tutte le Q o ne abbia tre. Infatti nel primo caso il collasso sarà graduale, mentre nel secondo caso, se $R_2Q > p_c$ il collasso sarà catastrofico giacché il primo paio di soluzioni cesserà improvvisamente di esistere e l'unica soluzione possibile è relativa a una A che presenta un valore molto piccolo.

Il collasso graduale può plausibilmente verificarsi quasi stabilmente, mentre questo non è possibile che accada per quello di tipo catastrofico. Il criterio che permette di prevedere il tipo di collasso si basa sul confronto tra la pendenza del grafico rappresentante la parte sinistra e la parte destra dell'equazione in grassetto valutata per $A=1$. In particolare quando $R_2Q = p_c$, se la pendenza del grafico della parte sinistra è minore di quella relativa alla curva della parte destra il collasso sarà graduale, se invece è maggiore il collasso sarà di tipo catastrofico. Se R_2 è costante, ciò comporta che il collasso sarà graduale se è verificata la seguente condizione:

$$R_2 \geq \frac{p_c}{\sqrt{1.5P_0}} \quad (3.22)$$

Nei momento in cui si è giunti analiticamente alla computazione della variabile A si può procedere al calcolo di p_1 dall'equazione (2.18):

$$p_1 + \frac{1}{2}u_1^2 - p - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{4}lR(A)u + l\frac{du_v}{dt}; \quad (3.18)$$

e al calcolo di p_2 dalla (2.10):

$$p - p_2 = -f(A)u_2^2; \quad (3.10)$$

Per riottenere le curve, già computate da Pedley, che descrivono come varia la differenza tra la pressione a monte p_1 e la pressione a valle p_2 in funzione della portata Q negli equilibrium state, per diversi valori della resistenza a monte $R_2 = 50, 75, 150$. A questo scopo si è utilizzato il software Matlab.

Si nota che i grafici relativi alle resistenze a valle $R_2 = 75, 150$ (Figura 3.3, 3.4) sono caratterizzati dall'avere un primo tratto che cresce con modesta velocità e che è associato a portate modeste, e da un secondo tratto, che ha inizio dopo il punto di massimo, che invece decresce più velocemente. Inoltre, mentre per $R_2 = 75$ l'intervallo di portate e differenze di pressione raggiunto è abbastanza ampio, assestandosi il primo tra 0:2.6 e il secondo tra 0:95 (si parla ancora in termini

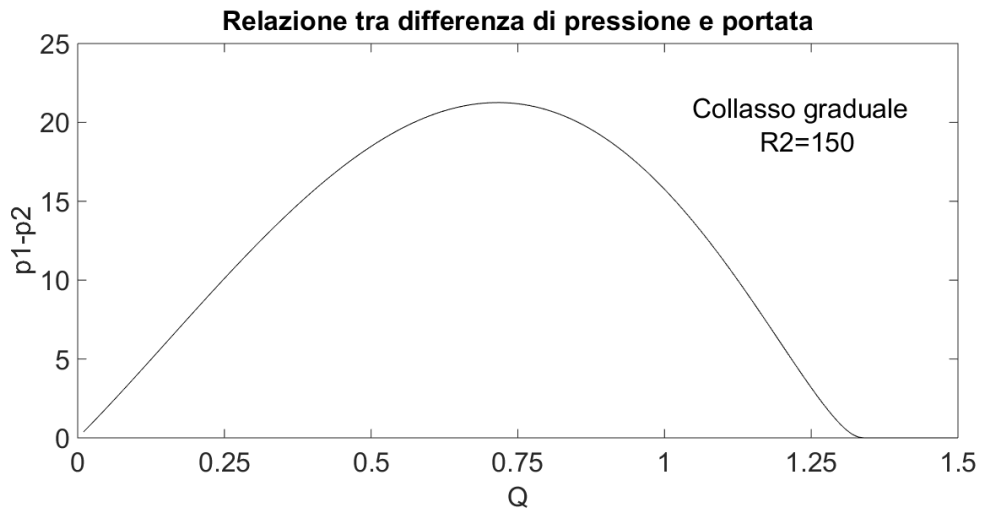


Figura 3.3: *Computazione tramite software Matlab: Grafico differenza di pressione-portata valutato per $R_2 = 150$, $P_0 = 4$, $p_c = 200$, $l = 10$. Collasso del segmento graduale in quanto è verificata la condizione (3.22).*

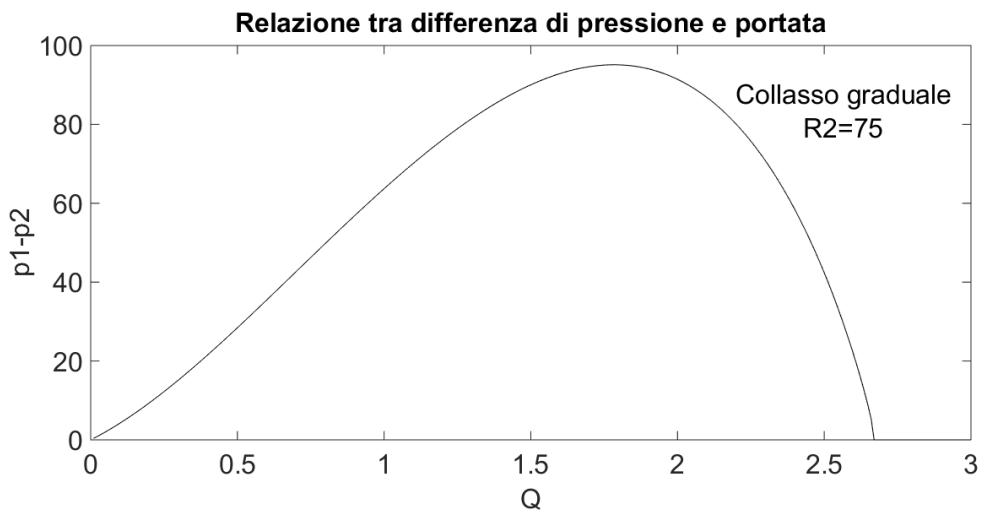


Figura 3.4: *Computazione tramite software Matlab: Grafico differenza di pressione-portata valutato per $R_2 = 75$, $P_0 = 4$, $p_c = 200$, $l = 10$. Collasso del segmento graduale in quanto è verificata la condizione (3.22).*

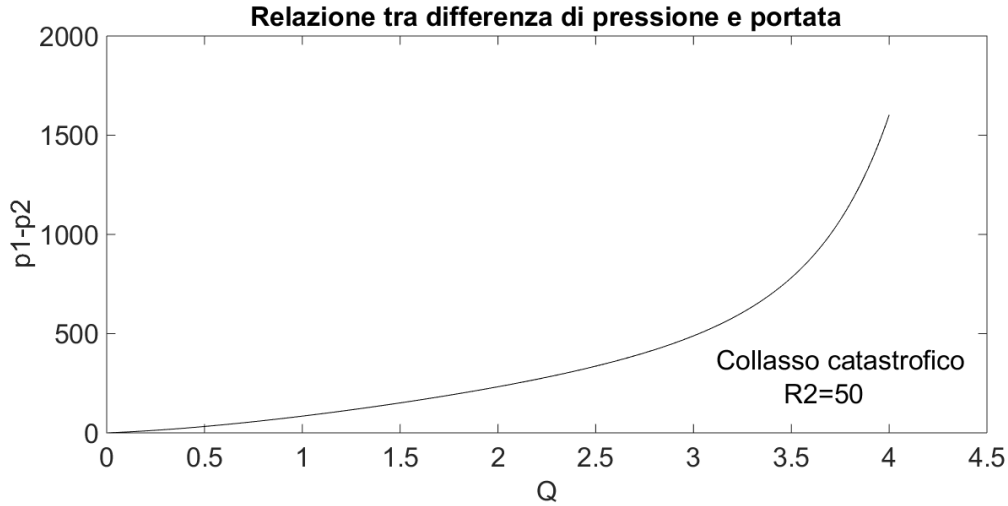


Figura 3.5: *Computazione tramite software Matlab: Grafico differenza di pressione-portata valutato per $R_2 = 50$, $P_0 = 4$, $p_c = 200$, $l = 10$. Collasso del segmento catastrofico.*

adimensionalizzati), per $R_2 = 150$ la curva raggiunge valori molto più bassi di portate e differenza di pressioni. Si parla infatti di un intervallo compreso tra 0:1.35 per le portate e 0:23 per la differenza di pressioni. Questi due grafici rappresentano entrambi il caso di collasso graduale, in quanto risulta verificata la condizione (3.22).

Tutt'altro aspetto assume la curva relativa alla $R_2 = 50$ (Figura 3.5), la quale non presenta massimi avendo sempre un andamento crescente. Tuttavia, si possono individuare due comportamenti diversi. Se si immagina di dividere l'asse delle ascisse della curva in tre parti uguali, nei primi due terzi la curva segue l'andamento di una retta con pendenza modesta, mentre nell'ultimo terzo si nota una forte crescita con trend esponenziale. In questo grafico l'intervallo di portate supera quello dei precedenti due citati interessando le portate tra 0:4, ma sicuramente più importanti sono i valori di differenze di pressione che raggiungono i 1600. Questo scenario è quello tipico di un collasso catastrofico.

Effettuando un confronto tra i grafici frutto della presente computazione e quelli ottenuti dallo studioso Pedley si riportano nelle Figure 3.5, 3.6, 3.7 i risultati reperiti in letteratura. Si nota che i risultati ritrovati in questo lavoro di tesi sono circa i medesimi rispetto a quelli di Pedley.

Per avere un confronto qualitativo con gli esperimenti, i risultati ottenuti nei

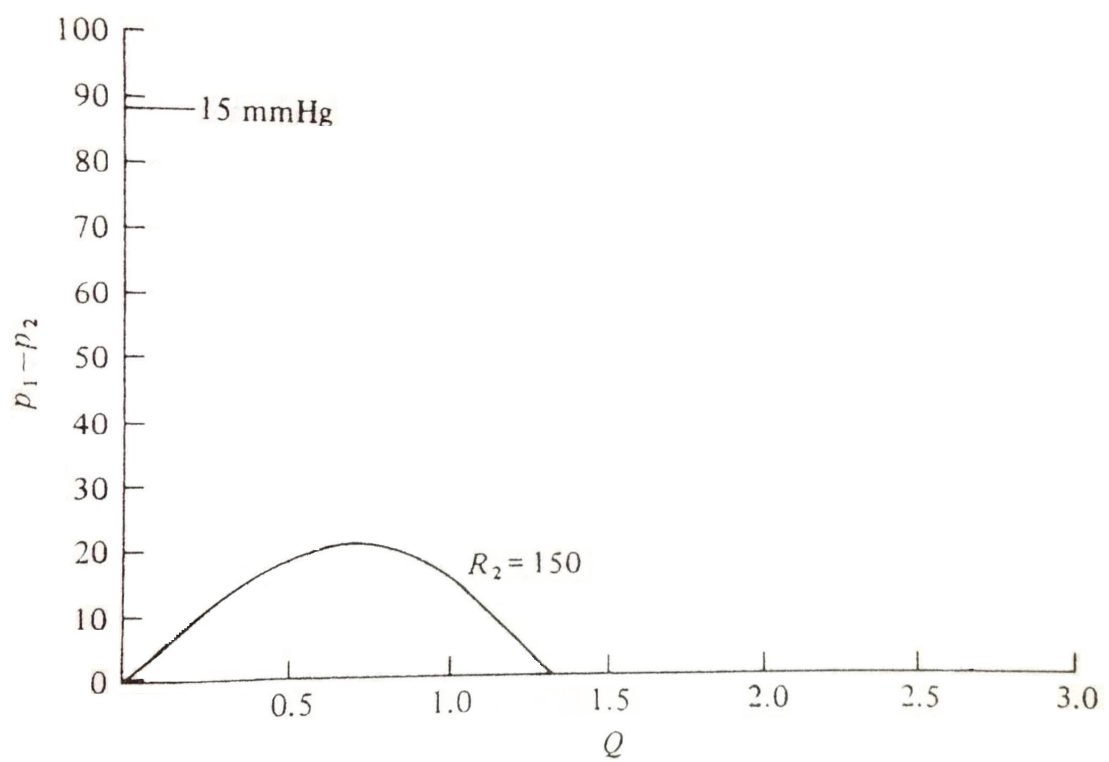


Figura 3.6: Curva computata da Pedley per $R_2 = 150$.

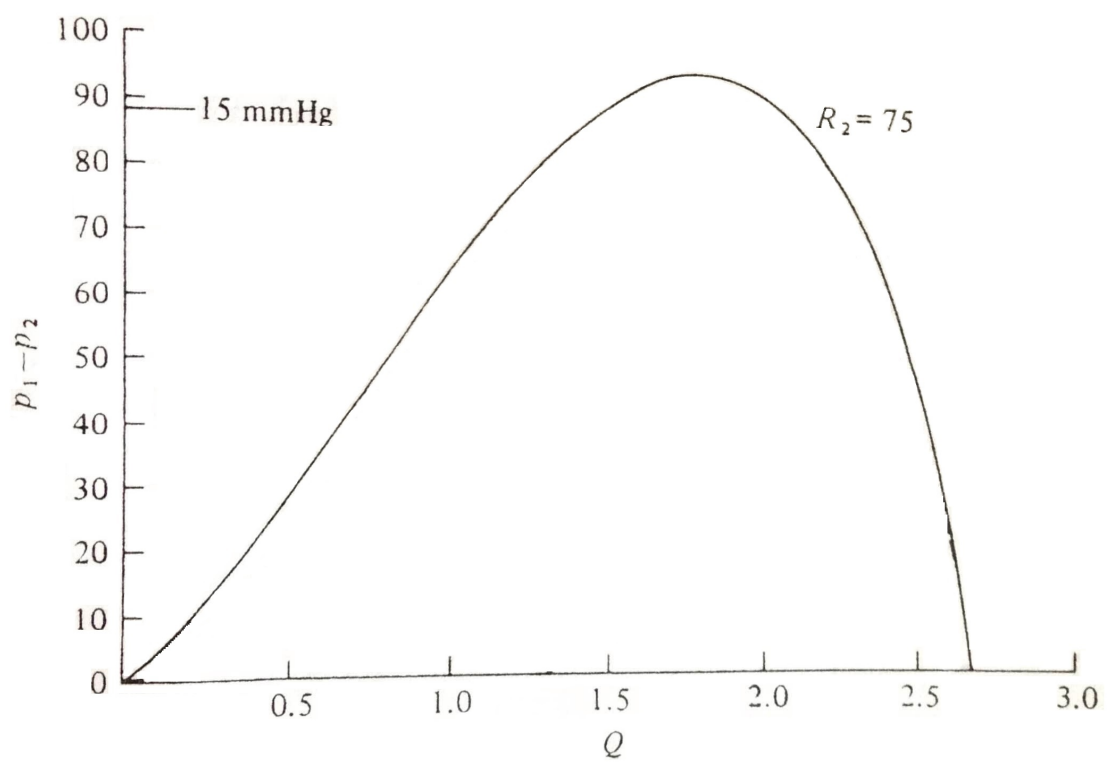


Figura 3.7: Curva computata da Pedley per $R_2 = 75$.

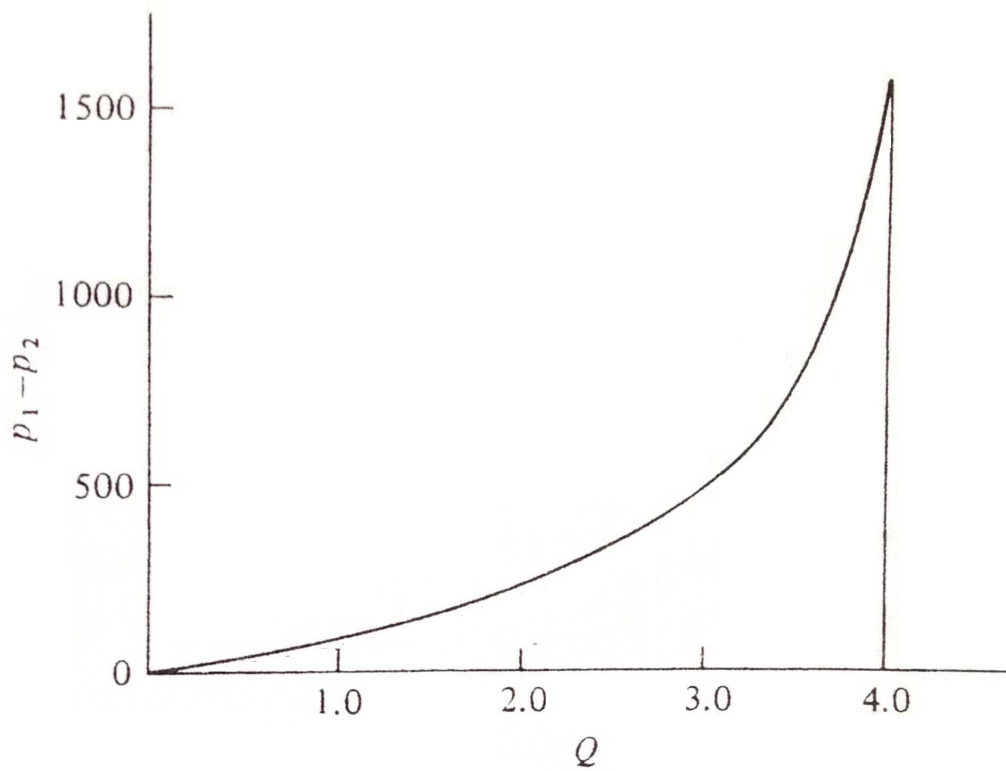


Figura 3.8: Curva computata da Pedley per $R_2 = 50$.

grafici devono essere convertiti in termini dimensionali. Nel caso in cui $R_2 = 150$, il valore massimo di $p_1 - p_2$ è pari a circa 20, che rappresenta $450Nm^{-2}$ o $3.4mmHg$. Questo risulta molto minore di quello ottenuto sperimentalmente nella curva in Figura 2.5 pari a $22mmHg$. Inoltre il valore di portata Q raggiunto il quale il tubo diventa circolare, pari circa a 1.33 e corrispondente a circa $25cm^3s^{-1}$, è significativamente maggiore di quello osservato pari a $15cm^3s^{-1}$. Quest'ultima discrepanza è ridotta utilizzando i valori più appropriati di p_c e R_2 derivati precedentemente (rispettivamente pari a 180 e 170) nel caso in cui la portata critica sia ridotta a $20cm^3s^{-1}$, ma questo abbassa ulteriormente il valore del picco di $p_1 - p_2$. Anche quando viene utilizzato il valore di 2.7 per P_0 , la differenza $p_1 - p_2$ raggiunge massimo i 23. Solo nel momento in cui P_0 è ridotto a 1.0 il picco di $p_1 - p_2$ diventa comparabile con i risultati sperimentali:

$$(p_1 - p_2)_{max} = 127 \approx 21mmHg$$

Se si riduce $R_2 = 150$ a 75 la massima variazione di pressione diventa simile a quelle osservate con i valori originali di P_0 e p_c , cioè rispettivamente 4 e 200, ma in questo caso si estende estremamente il range di portate per le quali il collasso avviene. Di conseguenza l'accordo con i risultati ottenuti da Conrad si ottiene solamente se si modificano i parametri scelti a priori. Questo può essere dovuto al fatto che i parametri iniziali non fossero corretti, ma potrebbe anche scaturire dalla mancanza di sofisticazione di questo modello. D'altro canto, il qualitativo buon accordo nei risultati rende confidenti del fatto che i principi fisici alla base del meccanismo di collasso siano stati incorporati nel modello, perlomeno quando esso predice il collasso graduale.

Come già accennato, un andamento completamente diverso si ha quando la resistenza R_2 è tanto bassa quanto basta affinché il collasso catastrofico sia predetto. In questo caso il massimo valore di $p_1 - p_2$ è molto più elevato e corrisponde a 270 mmHg. Inoltre, sebbene il valore di equilibrio di A sia una funzione crescente di Q per valori di Q piccoli, in questo caso A inizia a diminuire nuovamente quando Q supera il valore di 2.6, come accadeva nel caso di collasso graduale. Sperimentalmente non si sono mai osservati dei risultati simili e ciò suggerisce che l'equilibrio

predetto è instabile e che dovrebbero osservarsi delle oscillazioni.

3.3.1 Caso di studio: lumped parameter model di Pedley con termini inerziali e viscoelastici

Il modello (3.20), che comprende termini inerziali e viscoelastici, presenta una formulazione più complicata rispetto al modello classico. A ciò consegue che, nell'applicare l'analisi appena eseguita sul sistema (3.20), seppur effettuando le medesime assunzioni e procedendo nello stesso modo, non risulta possibile ricondursi a un'equazione di terzo grado per la soluzione dell'equazione differenziale relativa a u_2 che permette di individuare i valori di basic state.

È necessario far ricorso a soluzioni di tipo numerico, ricercate tramite il software Matlab e in particolare utilizzando la funzione *fsolve*. Imponendo ancora una volta i valori di portata Q e andando a calcolare l'area A di basic state associata si sono poi ottenuti i grafici analoghi a quelli rappresentati nelle Figure 3.3, 3.4, 3.5.

In particolare questi sono stati riportati nelle Figure 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13. Si procede ad analizzare i diversi casi singolarmente.

Partendo dal grafico 3.9, che rappresenta il caso di un collasso graduale ed è relativo a una resistenza a valle pari a $R_2 = 150$, nel confrontarlo col suo analogo in Figura 2.3, si notano diverse differenze. In primo luogo per bassi valori di portata Q non si presenta una differenza di pressione tra monte e valle, la quale inizia a verificarsi a partire da $Q \cong 0.3$; al contrario, la differenza di pressione si riassetta su un valore nullo per portate intorno a $Q \cong 1.3$, come già accadeva nel modello classico. In questo caso, inoltre, nascono due massimi, uno intorno a un valore di portata $Q \cong 0.8$ e uno per $Q \cong 1.2$ che portano entrambi a $p_1 - p_2 \cong 25$. Il valore di differenza di pressione raggiunto risulta maggiore rispetto a quello riportato in Figura 3.3 nella quale si aveva $p_1 - p_2 \cong 22$, con un unico massimo.

Per quanto concerne il secondo caso di collasso graduale studiato, in cui $R_2 = 150$ (Figura 3.10), rispetto all'analogo in Figura 3.4, si nota che il massimo raggiunge valori più ridotti e ancora si verificano differenze di pressione nulle per valori bassi di portata Q . L'andamento però è qualitativamente il medesimo, eccezion fatta per

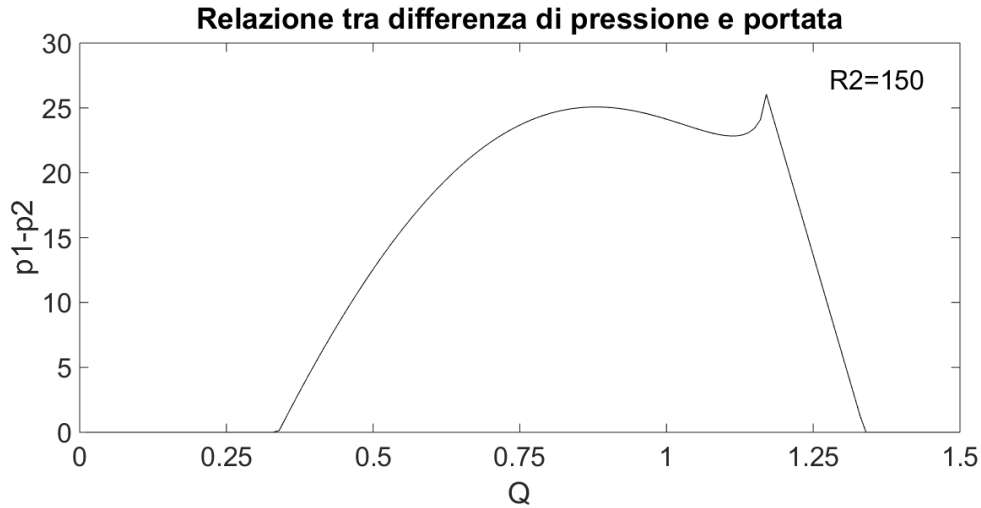


Figura 3.9: *Computazione tramite software Matlab: Grafico differenza di pressione-portata valutato per $R_2 = 150$, $\eta = 0.035$, $I_w = 30.8$, $P_0 = 4$, $p_c = 200$, $l = 10$. Collasso del segmento graduale.*

un punto angoloso registrato per $Q \cong 2.4$.

Un comportamento completamente differente rispetto al risultato ottenuto nel modello classico è quello che riguarda la resistenza a valle $R_2 = 50$ nel quale non si presenta ancora il collasso catastrofico del segmento. Infatti, a causa dei termini di inerzia e viscoelasticità, esso si verifica per valori di resistenza a valle R_2 più bassi. In particolare si riporta l'evoluzione delle curve al variare di R_2 nelle Figure 3.11, 3.12, 3.13 in cui si studiano rispettivamente $R_2 = 50, 40, 15$ e si nota che solo per $R_2 = 15$ le differenze di pressione raggiungono un ordine di grandezza compatibile con quello della Figura 3.5.

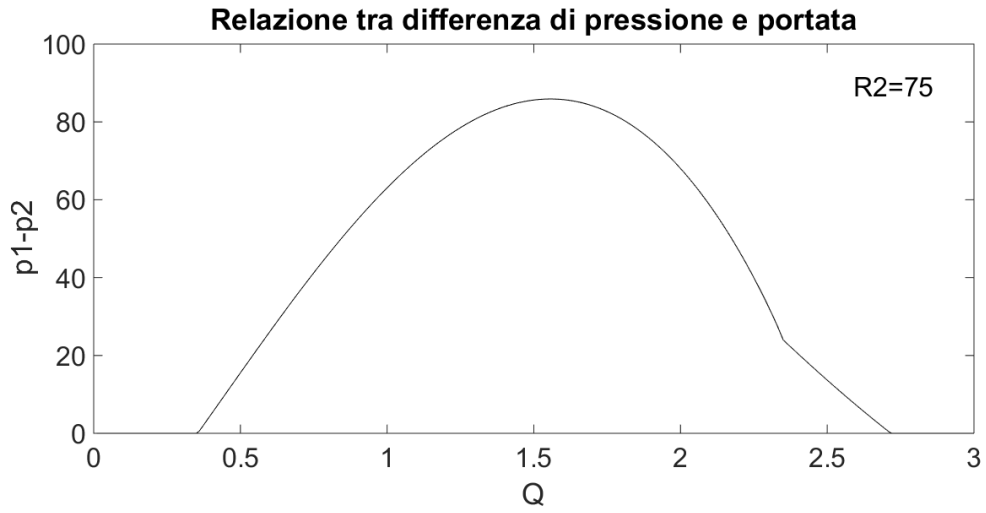


Figura 3.10: *Computazione tramite software Matlab: Grafico differenza di pressione-portata valutato per $R_2 = 75$, $\eta = 0.035$, $I_w = 30.8$, $P_0 = 4$, $p_c = 200$, $l = 10$. Collasso del segmento graduale.*

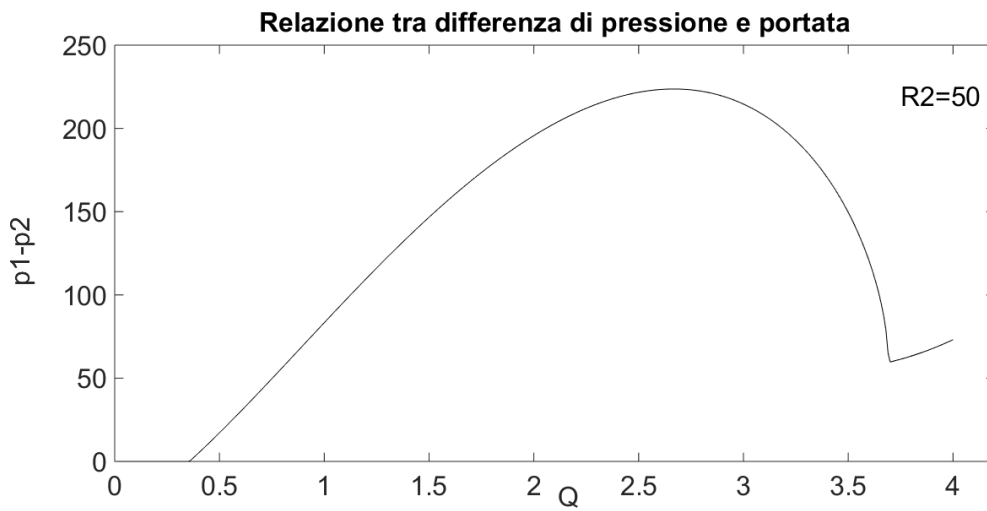


Figura 3.11: *Computazione tramite software Matlab: Grafico differenza di pressione-portata valutato per $R_2 = 50$, $\eta = 0.035$, $I_w = 30.8$, $P_0 = 4$, $p_c = 200$, $l = 10$. Collasso del segmento graduale.*

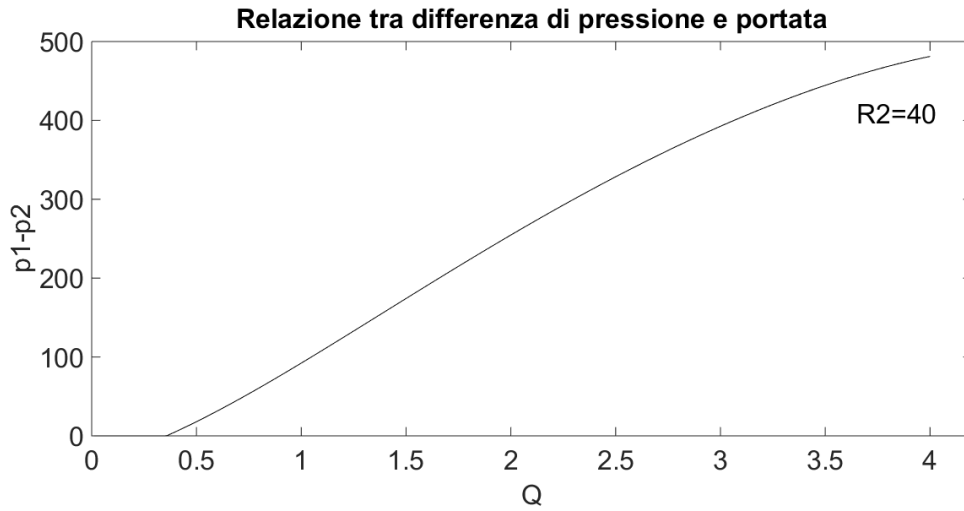


Figura 3.12: *Computazione tramite software Matlab: Grafico differenza di pressione-portata valutato per $R_2 = 40$, $\eta = 0.035$, $I_w = 30.8$, $P_0 = 4$, $p_c = 200$, $l = 10$. Collasso del segmento catastrofico.*

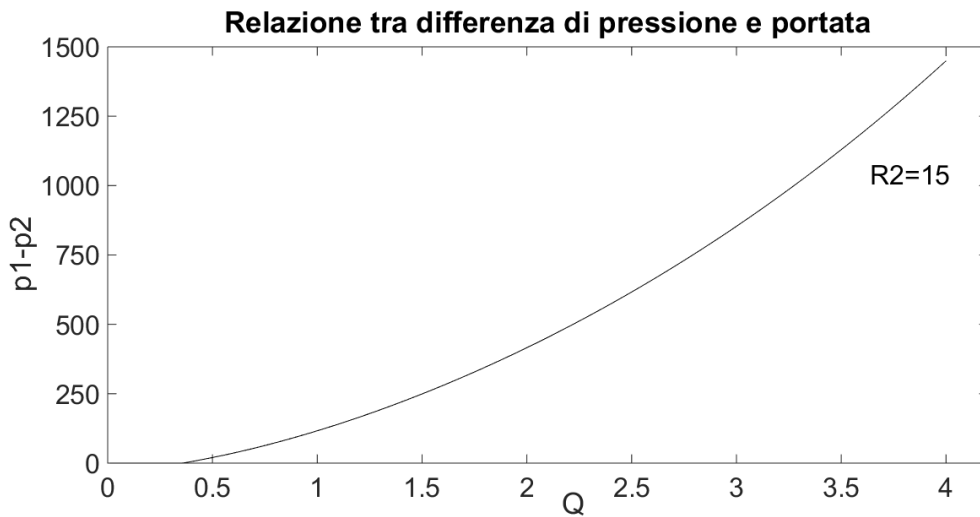


Figura 3.13: *Computazione tramite software Matlab: Grafico differenza di pressione-portata valutato per $R_2 = 15$, $\eta = 0.035$, $I_w = 30.8$, $P_0 = 4$, $p_c = 200$, $l = 10$. Collasso del segmento catastrofico.*

3.4 Stabilità asintotica e oscillazioni

Nel presente paragrafo si andrà ad effettuare lo studio della stabilità del sistema nel caso stazionario, tramite un'analisi per modi normali, che permetta di conoscere il comportamento del modello a tempo infinito. Un'analisi di stabilità asintotica consta di diversi passaggi:

- si introducono delle perturbazioni alle variabili principali;
- si ricavano le equazioni linearizzate che permettono di descrivere la dinamica del sistema perturbato;
- si considerano soluzioni in forma esponenziale nel tempo;
- si studia il comportamento del sistema in esame a tempo infinito (asintotico), tramite uno studio del segno degli autovalori del sistema linearizzato (> 0 , instabile; < 0 , stabile);
- si assegnano valori differenti ai parametri e si studiano le zone di stabilità e instabilità.

Questo approccio costituisce uno strumento molto importante nella ricerca teorica e ha dimostrato di essere efficace nella meccanica dei fluidi (Schmid and Henningston, 2001). La principale caratteristica di questo approccio è rappresentata dal fatto che esso si concentra sul comportamento temporale asintotico delle perturbazioni. L'obiettivo di tale analisi è infatti quello di valutare se il disturbo indotto al sistema tende a zero o a infinito quando il tempo tende a infinito, e di classificare conseguentemente il basic state come stabile o instabile. Tuttavia, nessuna informazione viene acquisita riguardo il comportamento del sistema a tempi finiti, oggetto di trattazione del capitolo seguente.

La stabilità di un basic state e la possibilità che nascano o meno delle oscillazioni quando esso è instabile dipende da quali grandezze vengono mantenute costanti nel momento in cui l'equilibrio viene perturbato. Negli esperimenti effettuati sul resistore di Starling solitamente si mantiene fissa la P_1 , rappresentante il carico nel serbatoio di monte, ma una possibile alternativa è rappresentata dalla velocità

misurata della sezione di controllo del tubo rigido di monte u_1 , la quale risulta equivalente alla portata attraverso lo stesso tubo rigido di monte, in quanto l'area dello stesso è assunta unitaria. Scegliere l'una o l'altra quantità sarebbe equivalente nel caso in cui la resistenza a monte R_1 fosse infinita. Nei calcoli effettuati da Pedley è stata mantenuta costante la P_1 .

Per esaminare la stabilità dell'equilibrio si indicano col pedice zero i valori di equilibrio o basic states di tutte le variabili principali e si suppone che questi siano soggetti a delle piccole perturbazioni che presentino delle variazioni temporali con andamento esponenziale.

Come già spiegato nella Sezione 3.2, Pedley scelse come variabili principali l'area A del punto in cui il restringimento è massimo, la velocità u della corrente relativa allo stesso punto e la velocità u_2 relativa alla sezione di controllo nel tubo rigido a valle del restringimento e pose:

$$\begin{aligned} A &= A_0 + a'e^{\sigma t}; \\ u &= u_0 + u'e^{\sigma t}; \\ u_2 &= Q_0 + u_2'e^{\sigma t}; \end{aligned} \tag{3.23}$$

Lo stesso studioso effettuò queste sostituzioni nel sistema principale descrivente il modello e effettuò la linearizzazione dello stesso trascurando i termini non lineari dovuti alle perturbazioni. Riconducendosi a risolvere un problema agli autovalori, come verrà spiegato in dettaglio nel prossimo paragrafo, gli esponenziali associati alle perturbazioni vengono semplificati dalle equazioni, perché risultano moltiplicare tutti i termini, e ciò che si ottiene è un polinomio caratteristico costituito da un'equazione cubica in funzione di σ del tipo:

$$C_3\sigma^3 + C_2\sigma^2 + C_1\sigma + C_0 = 0;$$

Per riprodurre i risultati ottenuti da Pedley, in questo lavoro, in accordo con la scrittura delle equazioni finali del modello (3.19), le variabili fondamentali utilizzate sono state l'area A , la y , variazione nel tempo della sezione nel punto in cui si raggiunge il massimo restringimento e infine la velocità u_2 . Di conseguenza la

linearizzazione del modello viene effettuata utilizzando le seguenti definizioni:

$$\begin{aligned}A &= A_0 + a'e^{\sigma t}; \\u_2 &= Q_0 + u'_2e^{\sigma t}; \\y &= y'e^{\sigma t};\end{aligned}\tag{3.24}$$

Ponendo $\varepsilon = e^{\sigma t}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}A &= A_0 + \varepsilon a'; \\u_2 &= Q_0 + \varepsilon u'_2; \\y &= \varepsilon y';\end{aligned}\tag{3.25}$$

E infine il sistema linearizzato, verificato tramite il software Wolfram Mathematica

8:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon a'}{dt} &= \varepsilon y'; \\
\frac{d\varepsilon u'_2}{dt} &= \frac{1}{I_2} \left\{ p_c + P(A_0) + P'(A_0)\varepsilon a' - R_2 Q_0 - R_2 \varepsilon u'_2 + f(A_0)Q_0^2 + 2f(A_0)Q_0\varepsilon u'_2 + \right. \\
&\quad \left. + f'(A_0)Q_0^2\varepsilon a' \right\}; \\
\frac{d\varepsilon y'}{dt} &= \frac{2}{l \left(I_1 + \frac{l}{1+A_0} \right)} \left\{ P_1 - p_c + \frac{1}{2}Q_0^2 - \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{A_0^2} - R_1 Q_0 - P(A_0) - \frac{I_1}{I_2} [p_c + P(A_0) + \right. \\
&\quad \left. - R_2 Q_0 + f(A_0)Q_0^2] + l \left\{ +2\frac{Q_0}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{I_2}\frac{1}{1+A_0} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f(A_0)Q_0^2] \right\} - \frac{1}{4}lR(A_0)\frac{Q_0}{A_0} \right\} + \frac{2}{l} \left\{ \frac{l\varepsilon a'}{(I_1 + l + A_0 I_1)^2} \left\{ P_1 - p_c + \frac{1}{2}Q_0^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2}Q_0^2 A_0^2 - R_1 Q_0 - P(A_0) - \frac{I_1}{I_2} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + f(A_0)Q_0^2] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + l \left\{ +2\frac{Q_0}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{I_2}\frac{1}{1+A_0} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + f(A_0)Q_0^2] \right\} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{4}lR(A_0)\frac{Q_0}{A_0} \right\} + \frac{1}{I_1 + \frac{l}{1+A_0}} \left\{ Q_0 \varepsilon u'_2 - R_1 \varepsilon u'_2 + \frac{1}{A_0^3} [Q_0^2 \varepsilon a' - A_0 Q_0 \varepsilon u'_2] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}lQ_0 \varepsilon y' - \frac{1}{2}lR_1 \varepsilon y' - P'(A_0)\varepsilon a' + \frac{I_1}{I_2} [R_2 \varepsilon u'_2 - 2f(A_0)Q_0 \varepsilon u'_2 + \right. \\
&\quad \left. - f'(A_0)Q_0^2 \varepsilon a' - P'(A_0)\varepsilon a'] + l \left[\frac{2}{(1+A_0)^3} [-2Q_0 \varepsilon a' + \varepsilon u'_2 + A_0 \varepsilon u'_2] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{l}{2(1+A_0)^2} \varepsilon y' - \frac{2}{I_2} \left[-\frac{\varepsilon a'}{(1+A_0)^2} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + f(A_0)Q_0] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{1+A_0} (-R_2 \varepsilon u'_2 + 2f(A_0)Q_0 \varepsilon u'_2 + f'(A_0)Q_0^2 \varepsilon a' + P'(A_0)\varepsilon a') \right] \right] + \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{4A_0^2} [lQ_0 R(A_0)\varepsilon a' - lA_0 R(A_0)\varepsilon u'_2 - lA_0 Q_0 R'(A_0)\varepsilon a'] \right\} \right\};
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Il sistema linearizzato può essere riscritto in forma matriciale nel modo seguente:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = [\mathbf{A}]\vec{y} + [\mathbf{B}];$$

Dove:

$$\begin{aligned}
\vec{y} &= \left\{ \frac{d\varepsilon a'}{dt}; \frac{d\varepsilon u'_2}{dt}; \frac{d\varepsilon y'}{dt}; \right\} = \left\{ \frac{d(a'e^{\sigma t})}{dt}; \frac{d(u'_2 e^{\sigma t})}{dt}; \frac{d(y'e^{\sigma t})}{dt}; \right\}; \\
\vec{y} &= \{\varepsilon a'; \varepsilon u'_2; \varepsilon y';\} = \{a'e^{\sigma t}; u'_2 e^{\sigma t}; y'e^{\sigma t};\};
\end{aligned} \tag{3.27}$$

La matrice \mathbf{A} è del tipo 3x3 ed e può essere rappresentata schematicamente nel modo seguente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

In particolare i termini di cui è composta sono:

$$A_{11} = 0;$$

$$A_{12} = 0;$$

$$A_{13} = 1;$$

$$A_{21} = \frac{Q_0^2 f'(A_0) + P'(A_0)}{I_2};$$

$$A_{22} = \frac{-R_2 + 2Q_0 f(A_0)}{I_2};$$

$$A_{23} = 0;$$

$$\begin{aligned} A_{31} = & + \frac{2}{l} \left\{ \frac{l}{(I_1 + l + A_0 I_1)^2} \left\{ P_1 - p_c + \frac{1}{2} Q_0^2 - \frac{1}{2} Q_0^2 A_0^2 - R_1 Q_0 + \right. \right. \\ & - P(A_0) - \frac{I_1}{I_2} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + f(A_0) Q_0^2] + \\ & + l \left\{ + 2 \frac{Q_0}{(1 + A_0)^2} - \frac{2}{I_2} \frac{1}{1 + A_0} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + \right. \\ & \left. \left. f(A_0) Q_0^2] \right\} - \frac{1}{4} l R(A_0) \frac{Q_0}{A_0} \right\} + \frac{1}{I_1 + \frac{l}{1 + A_0}} \left\{ + \frac{Q_0^2}{A_0^3} - P'(A_0) + \right. \\ & + \frac{I_1}{I_2} [-f'(A_0) Q_0^2 - P'(A_0)] + l \left\{ - \frac{4Q_0}{(1 + A_0)^3} + \right. \\ & - \frac{2}{I_2} \left[- \frac{1}{(1 + A_0)^2} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + f(A_0) Q_0] + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{1 + A_0} (+f'(A_0) Q_0^2 + P'(A_0)) \right] \right\} + \\ & \left. + \frac{1}{4A_0^2} [lQ_0 R(A_0) - lA_0 Q_0 R'(A_0)] \right\}; \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} A_{32} = & \frac{2}{l \left[I_1 + \frac{l}{1 + A_0} \right]} \left\{ Q_0 - R_1 + \frac{Q_0}{A_0^2} + \frac{I_1}{I_2} [R_2 - 2f(A_0) Q_0] + \right. \\ & \left. + l \left\{ \frac{2}{(1 + A_0)^2} - \frac{2}{I_2} \frac{1}{1 + A_0} [-R_2 + 2f(A_0) Q_0] \right\} - \frac{lR(A_0)}{4A_0} \right\}; \end{aligned}$$

$$A_{33} = \frac{2}{l \left[I_1 + \frac{l}{1 + A_0} \right]} \left\{ \frac{1}{2} l Q_0 - \frac{1}{2} l R_1 + \frac{l^2}{2[1 + A_0]^2} \right\};$$

Mentre la matrice \mathbf{B} è del tipo 3x1. Sinteticamente può essere espressa come:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

In maniera esplicita:

$$\begin{aligned} B_1 &= 0; \\ B_2 &= \frac{1}{I_2} \{p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + f(A_0) Q_0^2\}; \\ B_3 &= \frac{2}{l \left(I_1 + \frac{l}{1+A_0} \right)} \left\{ P_1 - p_c + \frac{1}{2} Q_0^2 - \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{A_0^2} - R_1 Q_0 - P(A_0) - \frac{I_1}{I_2} [p_c + P(A_0) + \right. \\ &\quad \left. - R_2 Q_0 + f(A_0) Q_0^2] + l \left\{ +2 \frac{Q_0}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{I_2} \frac{1}{1+A_0} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f(A_0) Q_0^2] \right\} - \frac{1}{4} l R(A_0) \frac{Q_0}{A_0} \right\}; \end{aligned} \tag{3.29}$$

Il sistema può essere ricondotto a un problema agli autovalori. Infatti, se si sostituiscono nelle equazioni linearizzate i valori di basic state di Q_0 e A_0 la matrice \mathbf{B} scompare e si ottiene:

$$[\mathbf{I}] \left\{ \vec{y}' \right\} - [\mathbf{A}] \left\{ \vec{y} \right\} = 0; \tag{3.30}$$

Dove la matrice $[\mathbf{I}]$ è una matrice identità del tipo 3x3:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ricordando le (3.27), portando al di fuori dei vettori il termine a fattor comune ed effettuando la differenziazione si può scrivere:

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{y}' \right\} &= \sigma e^{\sigma t} \left\{ \frac{da'}{dt}; \frac{du'_2}{dt}; \frac{dy'}{dt}; \right\}; \\ \left\{ \vec{y} \right\} &= e^{\sigma t} \left\{ \varepsilon a'; \varepsilon u'_2; \varepsilon y'; \right\}; \end{aligned} \tag{3.31}$$

Inoltre indicando con $\left\{ \vec{y}' \right\}$:

$$\left\{ \vec{y}' \right\} = \left\{ \varepsilon a'; \varepsilon u'_2; \varepsilon y'; \right\};$$

Sostituendo nella (3.30) si ottiene:

$$\sigma e^{\sigma t} [\mathbf{I}] \left\{ \vec{y}' \right\} - e^{\sigma t} [\mathbf{A}] \left\{ \vec{y}' \right\} = 0;$$

Il termine esponenziale, essendo possibile raccoglierlo a fattore comune, si elide:

$$\begin{aligned} \sigma [\mathbf{I}] \left\{ \vec{y}' \right\} - [\mathbf{A}] \left\{ \vec{y}' \right\} &= 0; \\ \sigma ([\mathbf{I}] - [\mathbf{A}]) \left\{ \vec{y}' \right\} &= 0; \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ci si è dunque ricondotti alla risoluzione di un problema agli autovalori in cui il polinomio caratteristico risulta essere di terzo grado:

$$C_3 \sigma^3 + C_2 \sigma^2 + C_1 \sigma + C_0 = 0;$$

La stabilità o l'instabilità dell'equilibrio a tempo infinito risulta strettamente correlata al segno assunto dalla parte reale delle soluzioni del polinomio. Infatti se almeno una delle soluzioni presenta parte reale positiva la perturbazione applicata si amplificherà esponenzialmente nel tempo portando a una condizione di instabilità, mentre se tutte hanno segno negativo le stesse perturbazioni si affievoliranno nel tempo fino a scomparire e si parlerà di equilibrio stabile.

Per effettuare un'indagine in questo senso si propone il *metodo di Routh*, il quale afferma che, partendo dal polinomio caratteristico, se il fattore C_3 è positivo, allora:

- Se $C_0 < 0$, l'equazione ha almeno una radice reale positiva. In questo caso l'instabilità è del tipo esponenziale in quanto in essa i disturbi crescono monotonamente e senza oscillazioni.;
- Se $C_0 > 0$, e $C_2 < 0$ oppure $C_2 C_1 - C_3 C_0 < 0$ (o entrambi), l'equazione ha due radici con parte reale positiva. Queste radici possono essere reali o complesse. Nel caso in cui siano complesse, l'instabilità si manifesterà tramite delle oscillazioni crescenti. Se tutti i termini C sono positivi e $C_2 C_1 - C_3 C_0 < 0$, allora le due radici che hanno parte positiva reale saranno complesse.

L'uso del criterio di Routh dimostra che l'instabilità può comparire quando la resistenza complessiva è non negativa, risultato che non sembra essere stato notato precedentemente in questo contesto. Questa instabilità potrebbe essere indotta dalle

oscillazioni in quanto sono presenti altre condizioni di equilibrio per il valore dato di P_1 . I coefficienti dell'equazione cubica risultano essere troppo complicati per l'utilizzo di criteri basati sullo studio dei parametri del sistema, anche se il calcolo numerico delle radici dell'equazione conferma la possibilità che si sviluppi instabilità per valori realistici dei parametri.

Prima che le radici dell'equazione possano essere computate è necessario assegnare dei valori ai parametri I_2, I_1, R_2 . Se la differenza di pressione necessaria per sottoporre in fluido nel tubo rigido di valle a un'accelerazione media $\frac{d(\hat{u}_2)}{dt}$ risulta pari a $\frac{\hat{I}_2 d(\hat{u}_2)}{dt}$, allora $I_2 = \frac{\hat{I}_2}{\rho \hat{a}_0}$. Si stima \hat{I}_2 come la massa di fluido nel segmento a valle divisa per l'area della sezione dello stesso. Quindi risulta che $I_2 = \frac{\hat{l}_2}{\hat{a}_0}$, dove \hat{l}_2 rappresenta la lunghezza del segmento. Conrad non riporta il valore di \hat{l}_2 ma si deduce dai suoi diagrammi che risulta pari a due volte e mezza la lunghezza del tubo collassabile. In questi calcoli si sceglie di porre $I_2 = 25$. Conrad inoltre non dà alcun dettaglio riguardo al tubo rigido di monte usato, in quanto esso non mostra nessuna importanza nella sua teoria semplificata. In accordo con l'ipotesi che entrambi i segmenti rigidi siano lunghi e stretti, si considerano uguali i rapporti I_1/I_2 e R_1/R_2 , pari a un valore chiamato $\beta = 1.5, 1.0, 0.5$.

Caso di studio: lumped parameter model di Pedley con termini inerziali e viscoelastici

Si prosegue, parallelamente allo studio del sistema utilizzato da Pedley nella sua analisi, allo sviluppo delle analisi sul lumped parameter model di Pedley con termini inerziali e viscoelastici.

Anche in questo caso si è proceduto prima all'applicazione delle perturbazioni ai valori di basic state del modello principale, poi alla linearizzazione dello stesso e infine alla soluzione del problema agli autovalori tramite il metodo di Routh.

Il modello linearizzato assume la seguente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon a'}{dt} &= \varepsilon y'; \\
\frac{d\varepsilon u'_2}{dt} &= \frac{1}{I_2} \left\{ p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + f(A_0) Q_0^2 \right\} + \\
&\quad \frac{I_w}{I_2} \frac{1}{\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2 l I_w}{(1+A_0) I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0}} \\
&\quad \left\{ P_1 - p_c + \frac{Q_0^2}{2} - \frac{Q_0^2}{2 A_0^2} + Q_0 R_1 - P(A_0) - \frac{I_1}{I_2} [p_c - Q_0 R_2 + \right. \\
&\quad \left. + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] + l \left\{ \frac{2 Q_0}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{(1+A_0) I_2} [p_c + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] \right\} - \frac{l Q_0 R(A_0)}{4 A_0} \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{I_2} \left\{ -R_2 \varepsilon u'_2 + 2 Q_0 f(A_0) \varepsilon u'_2 + \eta \varepsilon y' + Q_0^2 f'(A_0) \varepsilon a' + P'(A_0) \varepsilon a' \right\} + \\
&\quad + \frac{I_w}{I_2} \left\{ I_2 \left[2 I_w l + \frac{1}{2} I_2 l^2 \right] \varepsilon a' / [I_1 I_w + A_0 I_1 I_w + I_2 I_w + A_0 I_2 I_w + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} I_1 I_2 l + \frac{1}{2} A_0 I_1 I_2 l + 2 I_w l + \frac{1}{2} I_2 l^2 \right]^2 \left\{ P_1 - p_c + \frac{Q_0^2}{2} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{Q_0^2}{2 A_0^2} - Q_0 R_1 - P(A_0) - \frac{I_1}{I_2} [p_c - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] + \right. \\
&\quad \left. l \left\{ \frac{2 Q_0}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{(1+A_0) I_2} [p_c - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] \right\} + \right. \\
&\quad \left. - \frac{l Q_0 R(A_0)}{4 A_0} \right\} + 1 / \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2 l I_w}{(1+A_0) I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \\
&\quad \left\{ Q_0 \varepsilon u'_2 - R_1 \varepsilon u'_2 + \frac{Q_0^2}{A_0^3} \varepsilon a' - \frac{Q_0}{A_0^2} \varepsilon u'_2 - \eta \varepsilon y' + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} l Q_0 \varepsilon y' - \frac{1}{2} l R_1 \varepsilon y' - P'(A_0) \varepsilon a' + \frac{I_1}{I_2} [R_2 \varepsilon u'_2 - 2 Q_0 f(A_0) \varepsilon u'_2 + \right. \\
&\quad \left. - \eta \varepsilon y' + Q_0^2 f'(A_0) \varepsilon a' - P'(A_0) \varepsilon a'] + l \left\{ -\frac{4 Q_0}{(1+A_0)^3} \varepsilon a' + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2}{(1+A_0)^2} \varepsilon u'_2 \frac{1}{2} \frac{l}{(1+A_0)^2} \varepsilon y' + \frac{2}{I_2 (1+A_0)^2} \varepsilon a' [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + f(A_0) Q_0^2 \right] - \frac{2}{I_2 (1+A_0)} [-R_2 \varepsilon u'_2 + 2 Q_0 f(A_0) \varepsilon u'_2 + \eta \varepsilon y' + \right. \\
&\quad \left. Q_0^2 f'(A_0) \varepsilon a' + P'(A_0) \varepsilon a'] \right\} + \frac{1}{4 A_0^2} [l Q_0 R(A_0) \varepsilon a' - l A_0 R(A_0) \varepsilon u'_2 + \\
&\quad \left. - l A_0 Q_0 R'(A_0) \varepsilon a'] \right\};
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon y'}{dt} = & \frac{1}{\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2 l I_w}{(1+A_0) I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0}} \\
& \left\{ P_1 - p_c + \frac{Q_0^2}{2} - \frac{Q_0^2}{2 A_0^2} + Q_0 R_1 - P(A_0) - \frac{I_1}{I_2} [p_c - Q_0 R_2 + \right. \\
& + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] + l \left\{ \frac{2 Q_0}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{(1+A_0) I_2} [p_c + \right. \\
& - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] \left. \right\} - \frac{l Q_0 R(A_0)}{4 A_0} \left. \right\} + \\
& + \frac{1}{I_2} \left\{ -R_2 \varepsilon u'_2 + 2 Q_0 f(A_0) \varepsilon u'_2 + \eta \varepsilon y' + Q_0^2 f'(A_0) \varepsilon a' + P'(A_0) \varepsilon a' \right\} + \\
& + \left\{ I_2 \left[2 I_w l + \frac{1}{2} I_2 l^2 \right] \varepsilon a' 1 / [I_1 I_w + A_0 I_1 I_w + I_2 I_w + A_0 I_2 I_w + \right. \\
& + \frac{1}{2} I_1 I_2 l + \frac{1}{2} A_0 I_1 I_2 l + 2 I_w l + \frac{1}{2} I_2 l^2] \left. \right\}^2 \left\{ P_1 - p_c + \frac{Q_0^2}{2} + \right. \\
& + \frac{Q_0^2}{2 A_0^2} + Q_0 R_1 - P(A_0) - \frac{I_1}{I_2} [p_c - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] + \\
& l \left\{ \frac{2 Q_0}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{(1+A_0) I_2} [p_c - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] \right\} + \\
& - \frac{l Q_0 R(A_0)}{4 A_0} \left. \right\} + 1 / \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2 l I_w}{(1+A_0) I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \\
& \left\{ Q_0 \varepsilon u'_2 - R_1 \varepsilon u'_2 + \frac{Q_0^2}{A_0^3} \varepsilon a' - \frac{Q_0}{A_0^2} \varepsilon u'_2 - \eta \varepsilon y' + \right. \\
& + \frac{1}{2} l Q_0 \varepsilon y' - \frac{1}{2} l R_1 \varepsilon y' - P'(A_0) \varepsilon a' + \frac{I_1}{I_2} [R_2 \varepsilon u'_2 - 2 Q_0 f(A_0) \varepsilon u'_2 + \\
& - \eta \varepsilon y' + Q_0^2 f'(A_0) \varepsilon a' - P'(A_0) \varepsilon a'] + l \left\{ -\frac{4 Q_0}{(1+A_0)^3} \varepsilon a' + \right. \\
& + \frac{2}{(1+A_0)^2} \varepsilon u'_2 \frac{1}{2} \frac{l}{(1+A_0)^2} \varepsilon y' + \frac{2}{I_2 (1+A_0)^2} \varepsilon a' [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + \\
& + f(A_0) Q_0^2] - \frac{2}{I_2 (1+A_0)} [-R_2 \varepsilon u'_2 + 2 Q_0 f(A_0) \varepsilon u'_2 + \eta \varepsilon y' + \\
& Q_0^2 f'(A_0) \varepsilon a' + P'(A_0) \varepsilon a'] \left. \right\} + \frac{1}{4 A_0^2} [l Q_0 R(A_0) \varepsilon a' - l A_0 R(A_0) \varepsilon u'_2 + \\
& - l A_0 Q_0 R'(A_0) \varepsilon a'] \left. \right\} ;
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Che si può esprimere sinteticamente come nella (3.30):

$$[\mathbf{I}] \left\{ \vec{y} \right\} - [\mathbf{A}] \left\{ \vec{y} \right\} = 0;$$

Dove la matrice $[\mathbf{I}]$ è una matrice identità del tipo 3x3:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E la matrice $[\mathbf{A}]$ è una matrice del tipo 3x3:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

In particolare i termini di cui è composta sono:

$$A_{11} = 0;$$

$$A_{12} = 0;$$

$$A_{13} = 1;$$

$$\begin{aligned}
A_{21} = & \frac{1}{I_2} \left\{ +Q_0^2 f'(A_0) + P'(A_0) \right\} + \\
& + \frac{I_w}{I_2} \left\{ I_2 \left[2I_w l + \frac{1}{2} I_2 l^2 \right] 1/ [I_1 I_w + A_0 I_1 I_w + I_2 I_w + A_0 I_2 I_w + \right. \\
& + \frac{1}{2} I_1 I_2 l + \frac{1}{2} A_0 I_1 I_2 l + 2I_w l + \frac{1}{2} I_2 l^2 \left. \right]^2 \left\{ P_1 - p_c + \frac{Q_0^2}{2} + \right. \\
& - \frac{Q_0^2}{2A_0^2} - Q_0 R_1 - P(A_0) - \frac{I_1}{I_2} [p_c - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] + \\
& l \left\{ \frac{2Q_0}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{(1+A_0)I_2} [p_c - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] \right\} + \\
& - \frac{l Q_0 R(A_0)}{4A_0} \left. \right\} + 1/ \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2l I_w}{(1+A_0)I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \\
& \left\{ + \frac{Q_0^2}{A_0^3} - P'(A_0) + \frac{I_1}{I_2} [Q_0^2 f'(A_0) - P'(A_0)] + l \left\{ - \frac{4Q_0}{(1+A_0)^3} + \right. \right. \\
& \frac{2}{I_2(1+A_0)^2} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + f(A_0) Q_0^2] + \\
& - \frac{2}{I_2(1+A_0)} [Q_0^2 f'(A_0) + P'(A_0)] \left. \right\} + \frac{1}{4A_0^2} [l Q_0 R(A_0) + \\
& - l A_0 Q_0 R'(A_0)] \left. \right\}; \tag{3.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} = & \frac{1}{I_2} \left\{ -R_2 + 2Q_0 f(A_0) \right\} + \\
& + \frac{I_w}{I_2} \left\{ +1/ \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2l I_w}{(1+A_0)I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \right. \\
& \left\{ Q_0 - R_1 - \frac{Q_0}{A_0^2} + \frac{I_1}{I_2} [R_2 - 2Q_0 f(A_0)] + \right. \\
& + l \left\{ + \frac{2}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{I_2(1+A_0)} [-R_2 + 2Q_0 f(A_0)] \right\} + \\
& + \frac{1}{4A_0^2} [-l A_0 R(A_0)] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{23} = & \frac{\eta}{I_2} + \frac{I_w}{I_2} \left\{ +1/ \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2l I_w}{(1+A_0)I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \right. \\
& \left\{ -\eta + \frac{1}{2} l Q_0 - \frac{1}{2} l R_1 - \eta \frac{I_1}{I_2} + l \left\{ \frac{1}{2} \frac{l}{(1+A_0)^2} - \frac{2\eta}{I_2(1+A_0)} \right\} \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{31} = & \left\{ I_2 \left[2I_w l + \frac{1}{2} I_2 l^2 \right] 1 / [I_1 I_w + A_0 I_1 I_w + I_2 I_w + A_0 I_2 I_w + \right. \\
& + \frac{1}{2} I_1 I_2 l + \frac{1}{2} A_0 I_1 I_2 l + 2I_w l + \frac{1}{2} I_2 l^2 \left. \right]^2 \left\{ P_1 - p_c + \frac{Q_0^2}{2} + \right. \\
& - \frac{Q_0^2}{2A_0^2} - Q_0 R_1 - P(A_0) - \frac{I_1}{I_2} [p_c - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] + \\
& l \left\{ \frac{2Q_0}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{(1+A_0)I_2} [p_c - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] \right\} + \\
& - \frac{l Q_0 R(A_0)}{4A_0} \left. \right\} + 1 / \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2l I_w}{(1+A_0)I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \\
& \left\{ + \frac{Q_0^2}{A_0^3} - P'(A_0) + \frac{I_1}{I_2} [Q_0^2 f'(A_0) - P'(A_0)] + l \left\{ - \frac{4Q_0}{(1+A_0)^3} + \right. \right. \\
& \frac{2}{I_2(1+A_0)^2} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + f(A_0) Q_0^2] + \\
& - \frac{2}{I_2(1+A_0)} [Q_0^2 f'(A_0) + P'(A_0)] \left. \right\} + \frac{1}{4A_0^2} [l Q_0 R(A_0) + \\
& - l A_0 Q_0 R'(A_0)] \left. \right\} ; \tag{3.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{32} = & \left\{ +1 / \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2l I_w}{(1+A_0)I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \right. \\
& \left\{ Q_0 - R_1 - \frac{Q_0}{A_0^2} + \frac{I_1}{I_2} [R_2 - 2Q_0 f(A_0)] + \right. \\
& + l \left\{ + \frac{2}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{I_2(1+A_0)} [-R_2 + 2Q_0 f(A_0)] \right\} + \\
& \left. \left. + \frac{1}{4A_0^2} [-l A_0 R(A_0)] \right\} \right\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{33} = & \left\{ +1 / \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2l I_w}{(1+A_0)I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \right. \\
& \left\{ -\eta + \frac{1}{2} l Q_0 - \frac{1}{2} l R_1 - \eta \frac{I_1}{I_2} + l \left\{ \frac{1}{2} \frac{l}{(1+A_0)^2} - \frac{2\eta}{I_2(1+A_0)} \right\} \right\} \left. \right\} ;
\end{aligned}$$

A questo punto è possibile applicare nuovamente il criterio di Routh per effettuare lo studio della stabilità.

3.5 Analogie e differenze riscontrate rispetto ai risultati in letteratura

Lo studioso Pedley si occupò di effettuare dei calcoli sulla stabilità marginale del modello in esame per diverse configurazioni di parametri, individuando volta per volta degli intervalli in cui si riscontra stabilità o instabilità.

Caso 1

Nel primo caso di studio si utilizzano i seguenti parametri:

- Carico nel serbatoio $P_0 = 4$;
- Pressione nella camera $p_c = 200$;
- Resistenza nella sezione di controllo nel tubo rigido di valle $R_2 = 150$

Questo corrisponde alla condizione di equilibrio studiata in Figura 3.3. Pedley ha riscontrato che queste condizioni portano a una situazione di stabilità per tutti i valori di portata Q e tutti i valori di β utilizzati (0.5, 1, 1.5).

Nel riprodurre i risultati dello studioso, per questo caso ci si è concentrati nello studiare il comportamento del sistema nell'intervallo di portate compreso tra $0.98 < Q < 1.35$. Oltre alla stabilità da egli indicata si è trovata una zona di instabilità per un intervallo di portate comprese tra $1.15 < Q < 1.32$. Questa corrisponde alla parte finale della curva in Figura 3.3. Estendendo lo studio a un intervallo di pressioni nella camera $p_c = [175 : 205]$ e a dei valori del parametro β compresi tra $[0.45:1.60]$ i risultati della computazione effettuata tramite il software Matlab sono riportati nei grafici in Figura da 3.14 a 3.19 nei quali si può individuare l'evoluzione dell'instabilità al variare dei parametri p_c , β , Q .

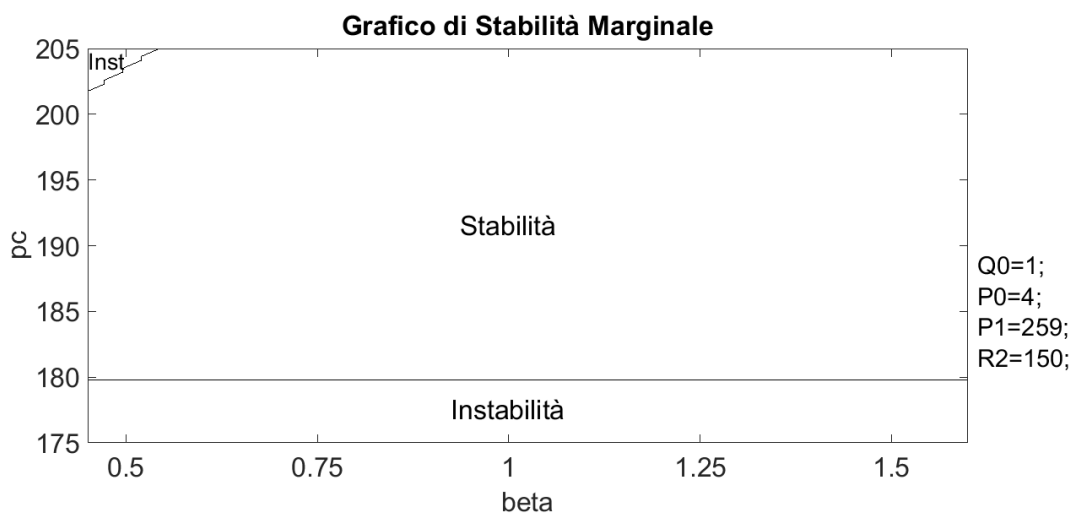


Figura 3.14: *Caso 1: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.00, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 150$.*

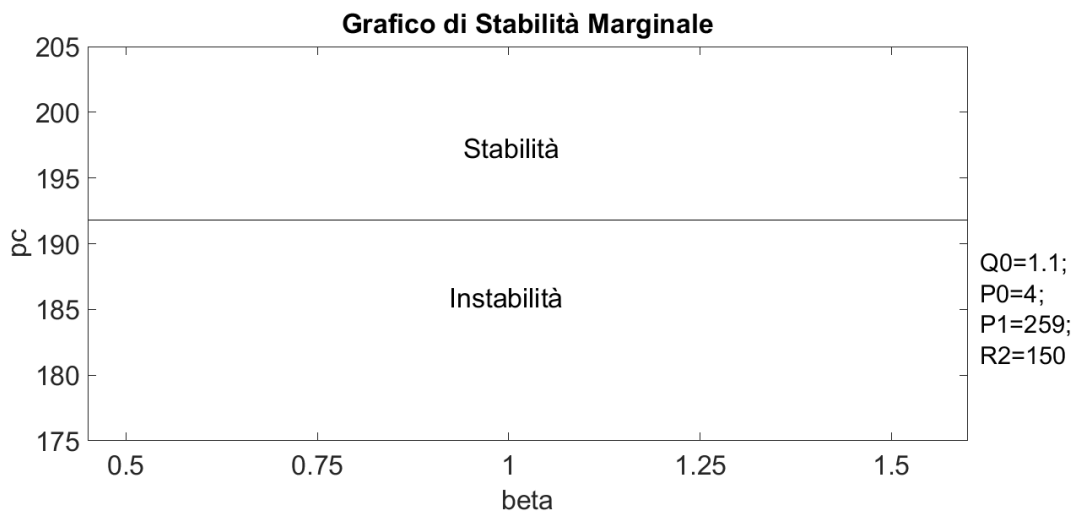


Figura 3.15: *Caso 1: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.09, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 150$.*

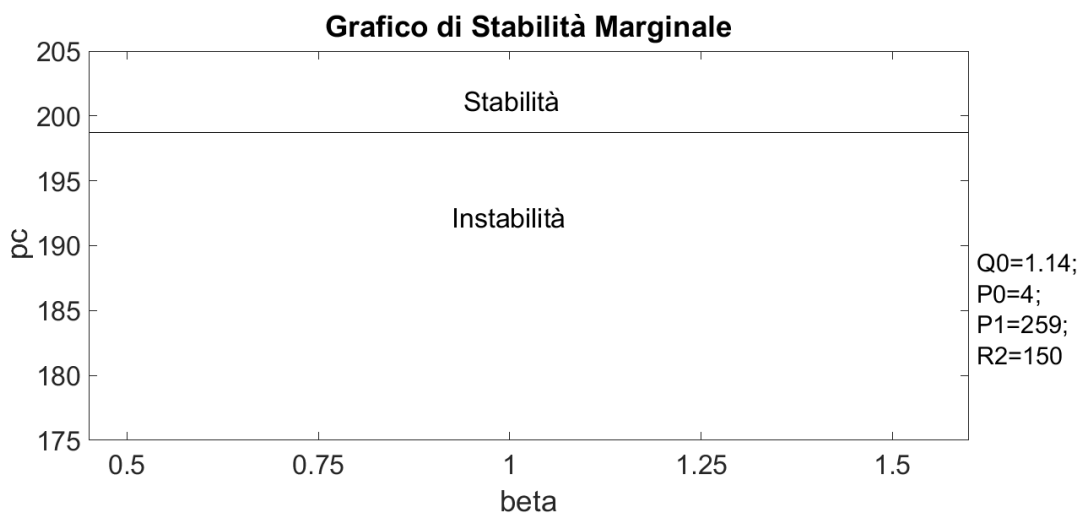


Figura 3.16: *Caso 1: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.14, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 150$.*

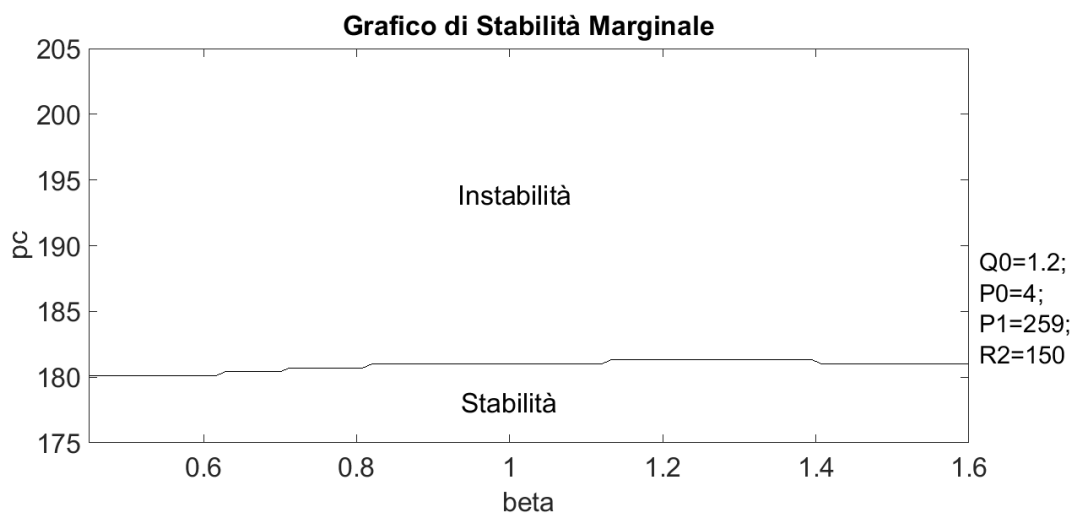


Figura 3.17: *Caso 1: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.20, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 150$.*

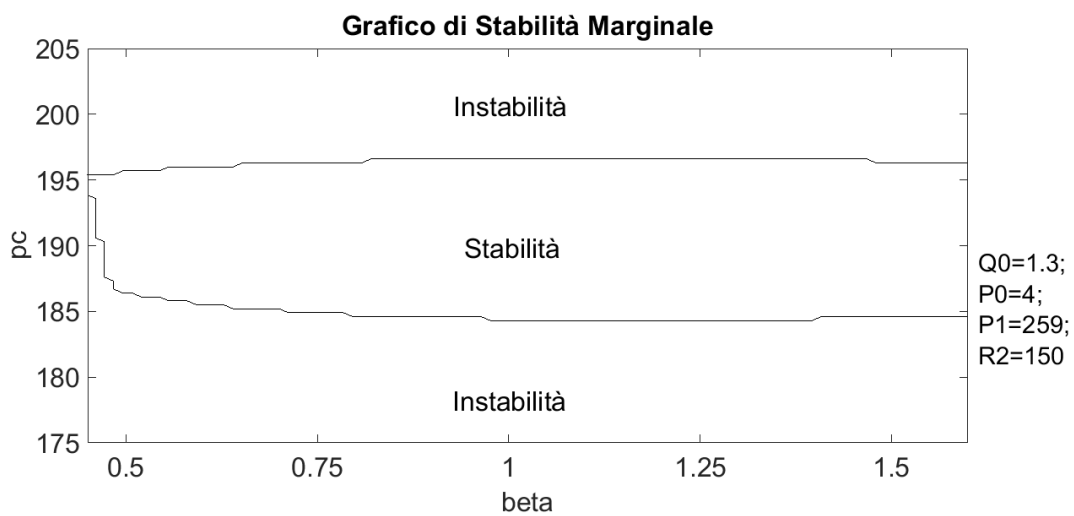


Figura 3.18: *Caso 1: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.30, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 150$.*

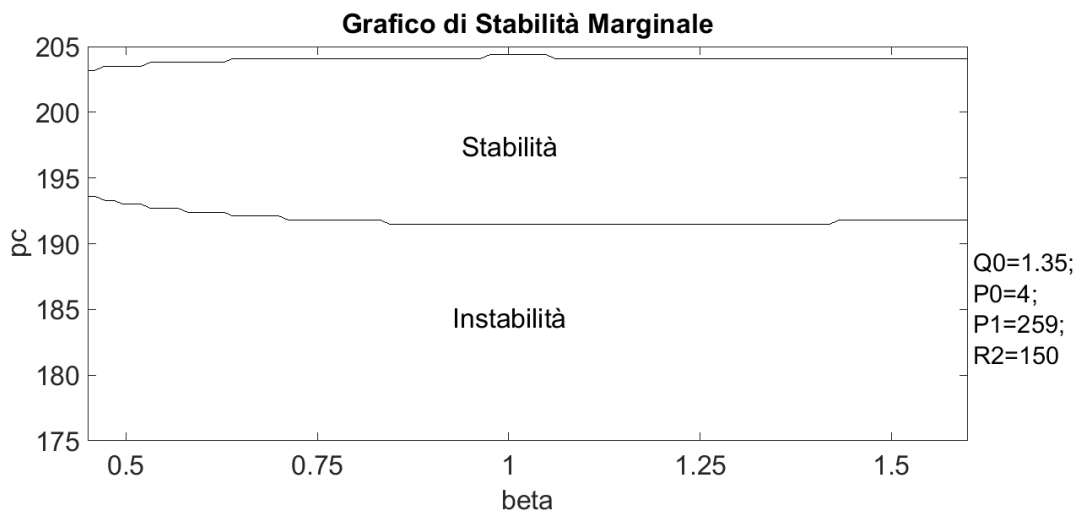


Figura 3.19: *Caso 1: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.35, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 150$.*

Caso 2

Il secondo caso studiato è quello corrispondente alla prima curva degli equilibrium states riportata in Figura 3.4, in cui i parametri utilizzati risultano:

- Carico nel serbatoio $P_0 = 4$;
- Pressione nella camera $p_c = 200$;
- Resistenza nella sezione di controllo nel tubo rigido di valle $R_2 = 75$

In questo caso il problema viene affrontato da Pedley considerando le diverse zone di instabilità per i tre diversi valori assunti dal parametro β , cioè 1.5, 1.0, 0.5.

Per $\beta = 1.5$ Pedley riscontra una situazione di instabilità in un ridotto intervallo di portate Q , in particolare per $2.51 < Q < 2.67$. Non si verificano altre instabilità e ciò risulta essere in accordo con l'evidenza sperimentale tale per cui le instabilità nascono solo per valori di R_2 sufficientemente ridotti. Per $\beta = 1.5$ si verifica instabilità in un range di portate simile al precedente ma più esteso verso valori di portate minori, $2.43 < Q < 2.67$, e che si amplifica ulteriormente per $\beta = 0.5$ in cui risulta $2.32 < Q < 2.67$. Utilizzando il software Matlab, si è studiato il comportamento del sistema per un intervallo di portate Q comprese tra $Q=[2.55:3.10]$. I grafici di stabilità marginale derivanti dalla computazione sono riportati in Figura 3.20, 3.21, 3.22. Come si può notare in Figura 3.20, per $Q=2.55$, $p_c = 200$ e tutti e tre i valori di β citati il sistema risulta essere instabile. Nella stessa figura si notano due zone di stabilità, relative a pressioni in camera p_c più basse. Considerando portate crescenti ma comprese nell'intervallo di instabilità indicato da Pedley, la computazione riporta lo stesso risultato, seppure si sia incontrata una ridottissima area di stabilità nell'intervallo $Q=[2.64:2.65]$ che si esaurisce già per $Q=2.66$, come indicato in Figura 2.21. Infine, per portate superiori a quelle indicate da Pedley nel suo intervallo di instabilità, si evince la concordanza tra questa computazione e la letteratura (Figura 3.22).

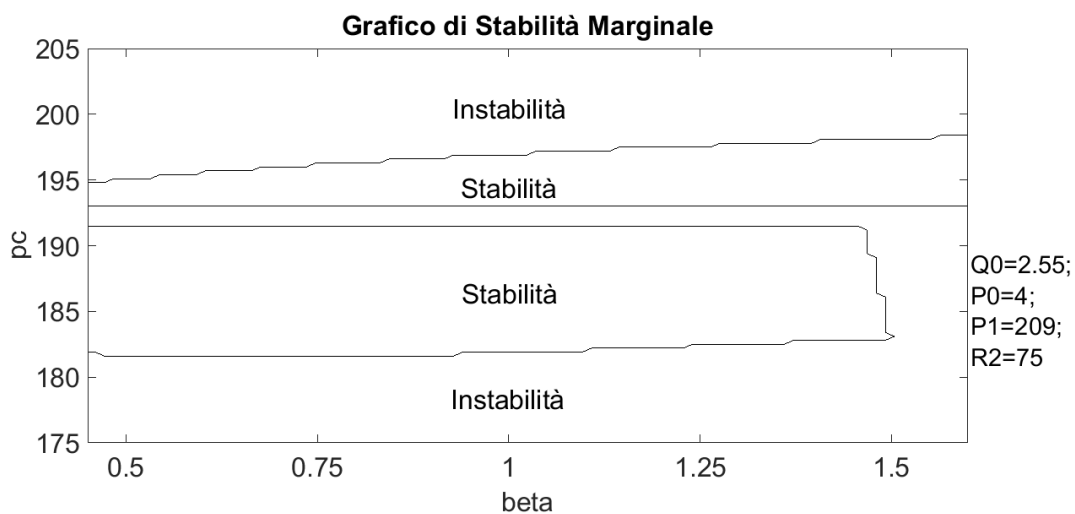


Figura 3.20: *Caso 2: Grafico di stabilità marginale per $Q = 2.55, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 75$.*

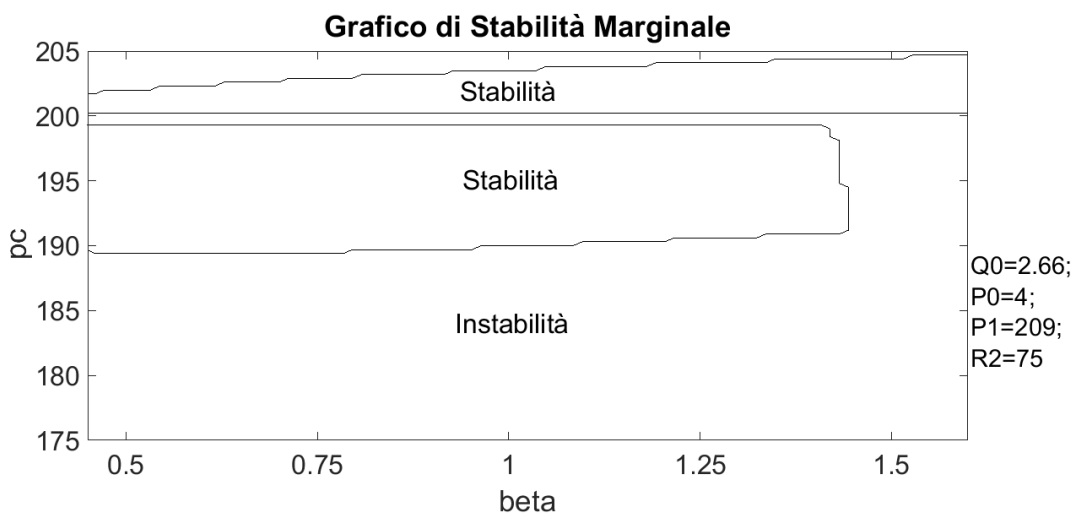


Figura 3.21: *Caso 2: Grafico di stabilità marginale per $Q = 2.66, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 75$.*

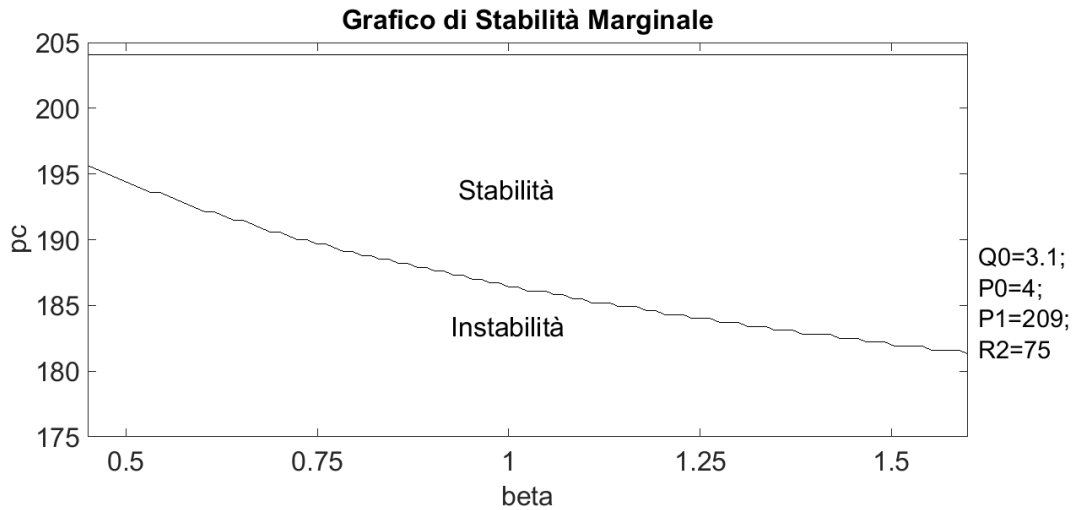


Figura 3.22: *Caso 2: Grafico di stabilità marginale per $Q = 3.10, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 75$.*

Caso 3

Utilizzando i seguenti valori dei parametri:

- Carico nel serbatoio $P_0 = 4$;
- Pressione nella camera $p_c = 200$;
- Resistenza nella sezione di controllo nel tubo rigido di valle $R_2 = 50$

si arriva ad affrontare il caso di collasso catastrofico, già riportato in Figura 3.5. In questo caso la resistenza complessiva cresce con la portata Q , fino a portate $Q=4$, dopodiché crolla drammaticamente nonostante si raggiunga un equilibrio stabile con area $A > 1$. L'equilibrio nel range di portate $Q=[0:4]$ risulta essere instabile in quasi tutto l'intervallo in quanto si ha $C_2C_1 - C_3C_0 < 0$. Pedley trova un intervallo di basse portate, $Q=[0:0.62]$, per cui si giunge a un equilibrio stabile. Nella computazione questo non viene individuato, ritrovando in tutto l'intervallo di portate $Q=0:4$ una situazione di instabilità, come riportato in Figura 3.23.

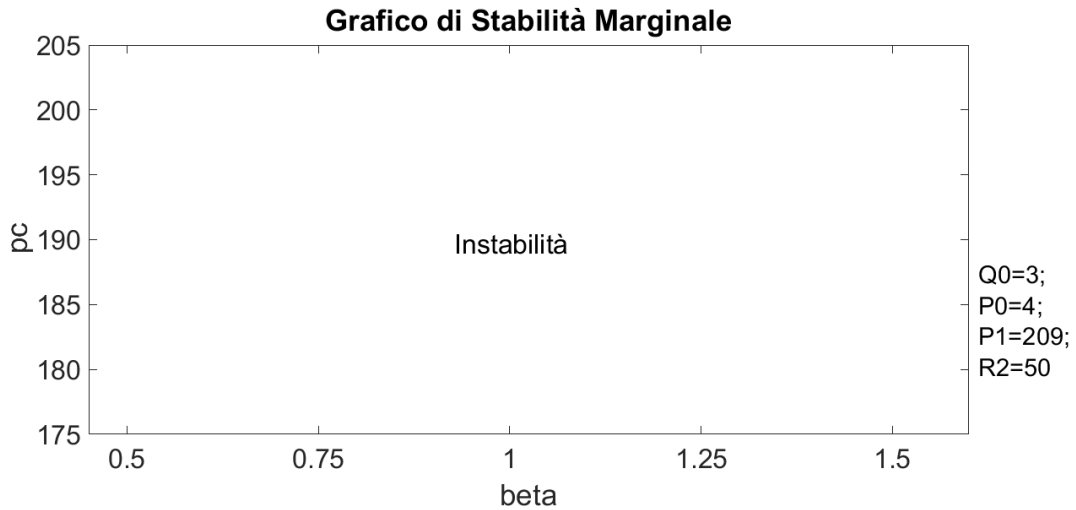


Figura 3.23: *Caso 3: Grafico di stabilità marginale per $Q = 3.00, P_1 = 209, P_0 = 4, R_2 = 50$.*

Caso 4

Infine, l'ultimo caso in studio presenta i seguenti valori dei parametri:

- Carico nel serbatoio $P_0 = 1$;
- Pressione nella camera $p_c = 180$;
- Resistenza nella sezione di controllo nel tubo rigido di valle $R_2 = 170$.

Con questi valori Pedley è riuscito a ottenere la massima convergenza tra le sue computazioni e i risultati sperimentali di Conrad. Per $\beta = 1.5$ non viene prevista alcuna instabilità, mentre per $\beta = 1.0$ nasce una resistenza negativa e si trova una zona di instabilità non oscillatoria per $Q=[0.88:1.05]$. I risultati della computazione effettuata in questo lavoro di tesi coincidono con le indicazioni di Pedley, come è possibile osservare in Figura 3.24, 3.25.

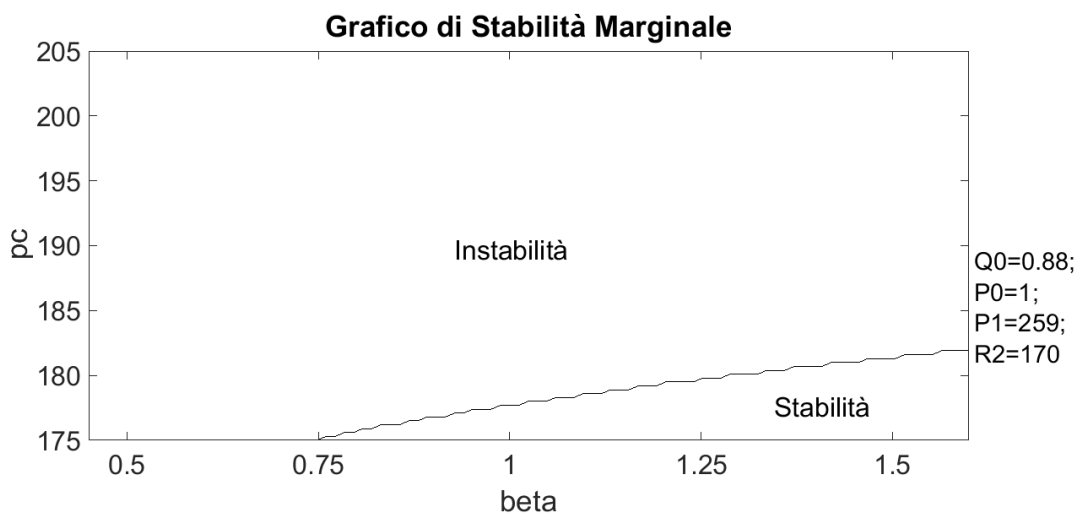


Figura 3.24: *Caso 4: Grafico di stabilità marginale per $Q = 0.88, P_1 = 259, P_0 = 1, R_2 = 50$.*

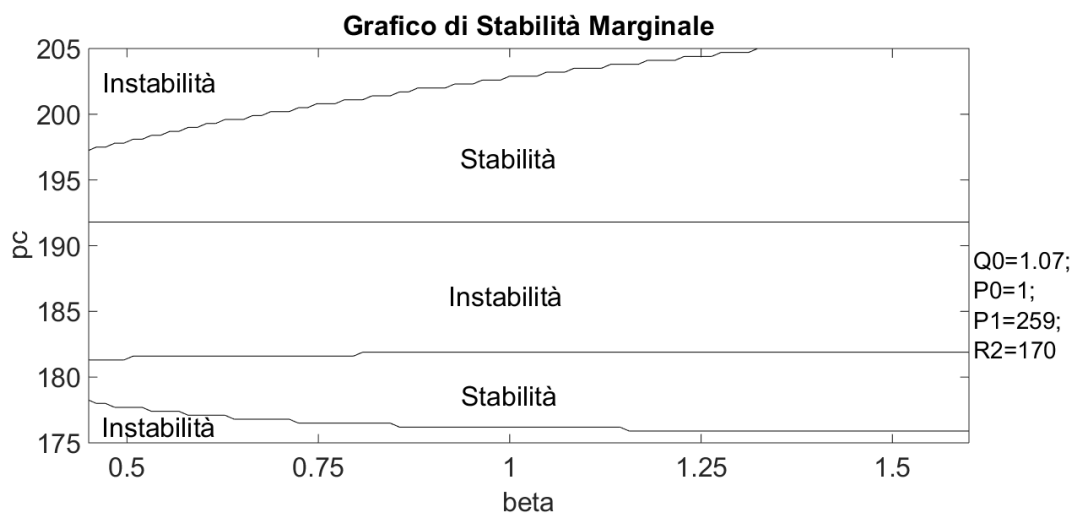


Figura 3.25: *Caso 4: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.065, P_1 = 259, P_0 = 1, R_2 = 50$.*

Oscillazioni nello steady state

I risultati mostrano che i valori delle resistenze e delle inerzie dei tubi rigidi hanno un forte effetto sull'instabilità del flusso e sul tipo di instabilità che nasce. Inoltre essi influenzano il moto non lineare che si sviluppa successivamente all'instabilità. Come riportano sia Conrad (1969) che Ur e Gordon (1970), si possono ottenere dei range di frequenze di oscillazione adattando il valore dei parametri. D'altro canto la forma delle oscillazioni è dominata dalle non linearità e invece poco influenzata dalle caratteristiche dei tubi rigidi.

Alcuni esempi preliminari, computati dal Dr C. D. Bertram sono stati riportati nei grafici in Figura 3.26, 3.27, 3.32, 3.33. I parametri standard sono gli stessi in tutti i casi e in particolare:

- Carico nel serbatoio $P_0 = 4$;
- Pressione nella camera $p_c = 200$;
- Lunghezza del segmento $l = 10$;

mentre la resistenza del segmento rigido di valle R_2 e il parametro β variano di volta in volta.

Nelle Figure 3.26, 3.27 sono riportate le oscillazioni che nascono nel collasso catastrofico allorché l'equilibrio soffre di un'instabilità oscillatoria. In questo caso $R_2 = 50$, $\beta = 1.5$ e $P_1 = 209$. Ciò corrisponde a una portata $Q = 1.0$ nella Figura 3.5.

Tramite il software Matlab si sono riprodotti questi risultati, procedendo all'integrazione del sistema principale tramite la funzione *ode45* e utilizzando come condizioni iniziali i valori delle curve ottenute dalla computazione di Bertram per il tempo $t=0$. Dopo una prima zona, che si estende per circa 3 unità temporali adimensionalizzate, in cui si verifica un transitorio è possibile osservare le oscillazioni di area A (Figura 3.28, 3.29) e velocità di valle u_2 (Figura 3.30, 3.31) che si possono confrontare con quelle riportate in letteratura.

Per quanto riguarda il confronto delle oscillazioni nell'area A si considerino le Figure 3.26 e 3.29. Si nota che entrambe presentano il punto di massimo per un

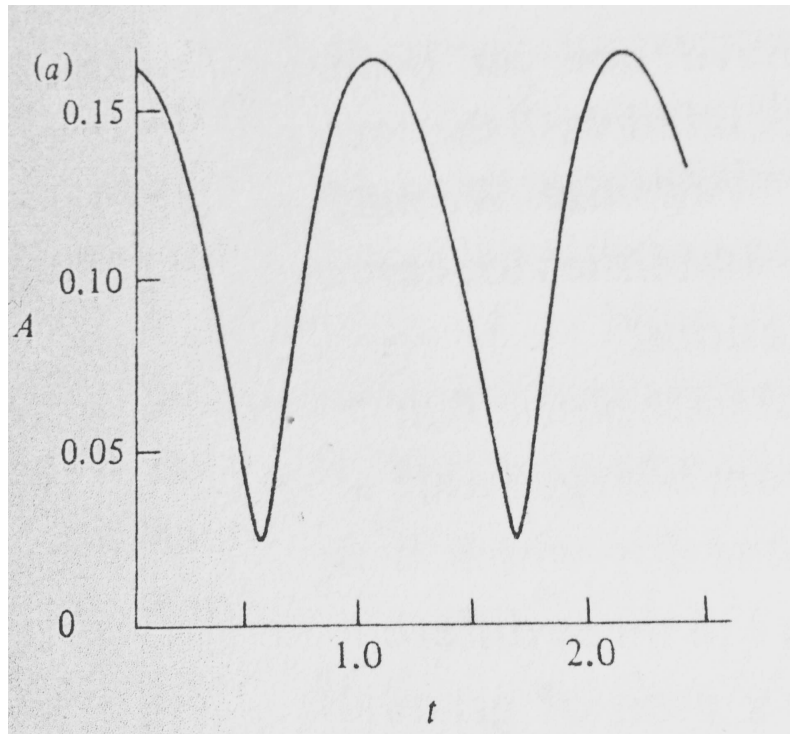


Figura 3.26: *Steady state oscillations dell'area A in funzione del tempo t, frutto della computazione di Bertram. $R_2 = 50$, $\beta = 1.5$ e $P_1 = 209$.*

valore di area A pari a 0.16, il punto di minimo per un valore poco superiore a $A=0.02$ e un periodo di circa 1.25 unità temporali adimensionalizzate.

Nei grafici rappresentanti l'andamento della velocità u_2 (Figure 3.27 e 3.31) si nota ancora un buon riscontro tra letteratura e computazione effettuata in questo lavoro.

Un secondo caso studiato è quello corrispondente a un processo di collasso graduale per il quale si sono utilizzati i parametri $R_2 = 75$, $\beta = 0.5$ e $P_1 = 259$, Figura 3.32, 3.33. Questo rappresenta il comportamento assunto dal sistema per $Q=1.5$ in Figura 3.4.

Nell'effettuare la riproduzione delle computazioni questa volta non si sono ottenuti dei risultati tanto soddisfacenti come nel caso precedente. Infatti per quanto riguarda il confronto del comportamento dell'area A tra computazione (Figura 3.34, 3.35) e risultato di letteratura (Figura 3.32) si nota che, seppure il periodo in entrambi i casi si mantenga intorno alle 2.25 unità temporali, nella computazione l'ampiezza dell'oscillazione risulta minore di quella riportata in letteratura in quan-

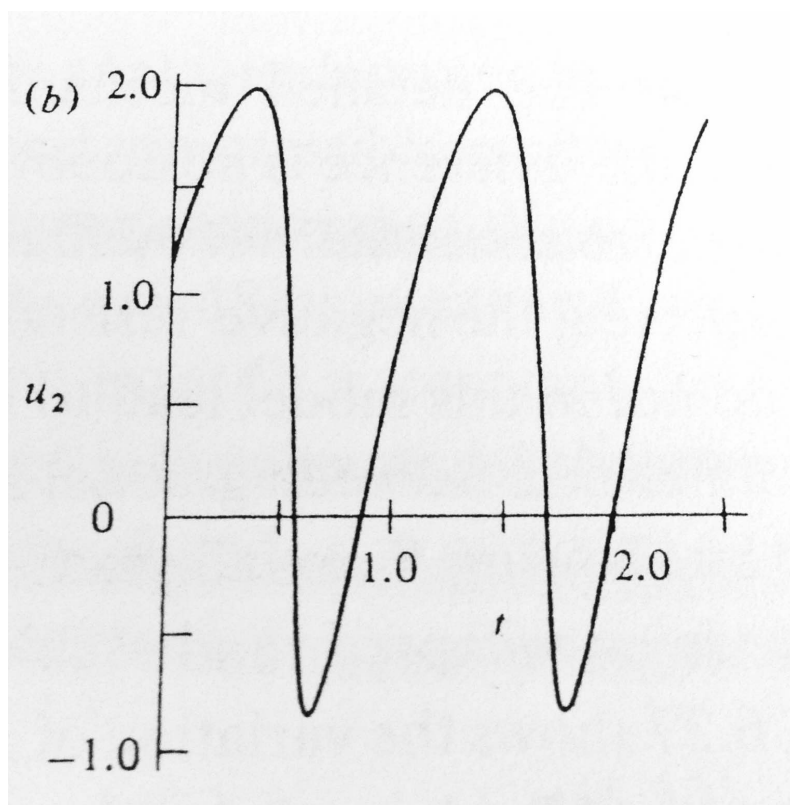


Figura 3.27: *Steady state oscillations della velocità u_2 in funzione del tempo t , frutto della computazione di Bertram. $R_2 = 50$, $\beta = 1.5$ e $P_1 = 209$.*

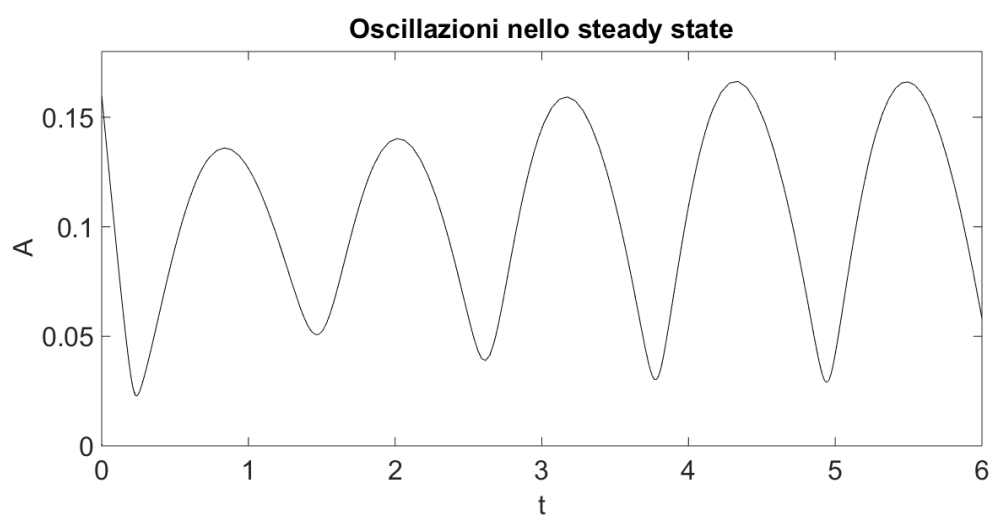


Figura 3.28: *Steady state oscillations dell'area A in funzione del tempo t , con transitorio, frutto della computazione effettuata in questo lavoro. $R_2 = 50$, $\beta = 1.5$ e $P_1 = 209$.*

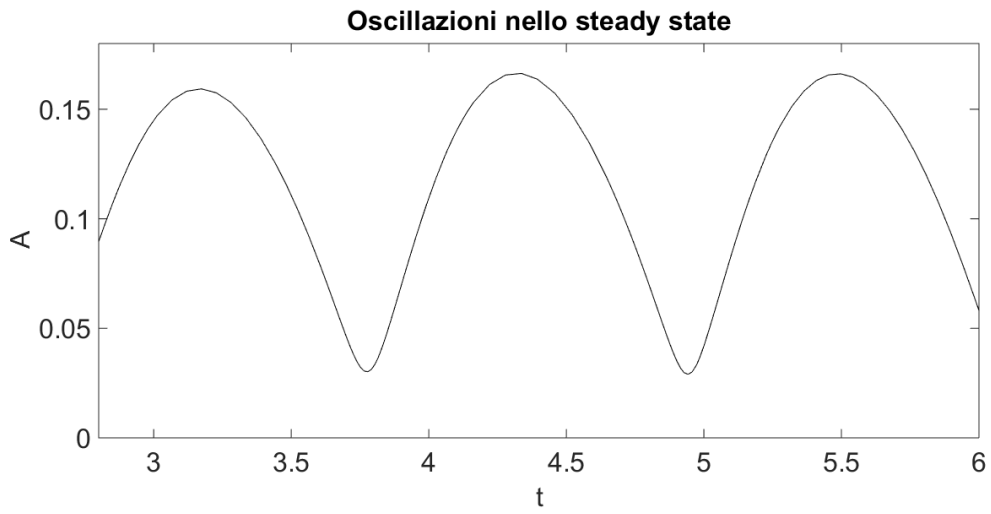


Figura 3.29: *Steady state oscillations dell'area A in funzione del tempo t , frutto della computazione effettuata in questo lavoro. $R_2 = 50$, $\beta = 1.5$ e $P_1 = 209$.*

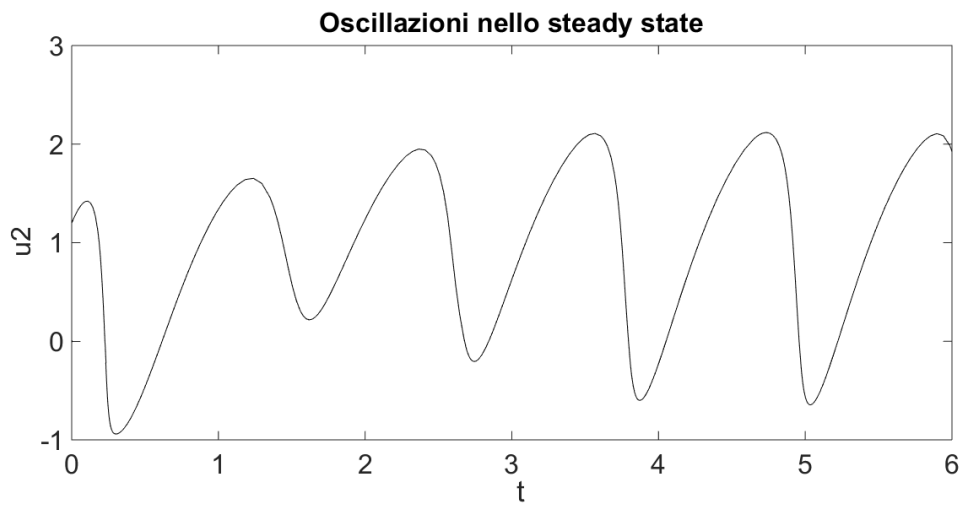


Figura 3.30: *Steady state oscillations della velocità u_2 in funzione del tempo t , con transitorio, frutto della computazione effettuata in questo lavoro. $R_2 = 50$, $\beta = 1.5$ e $P_1 = 209$.*

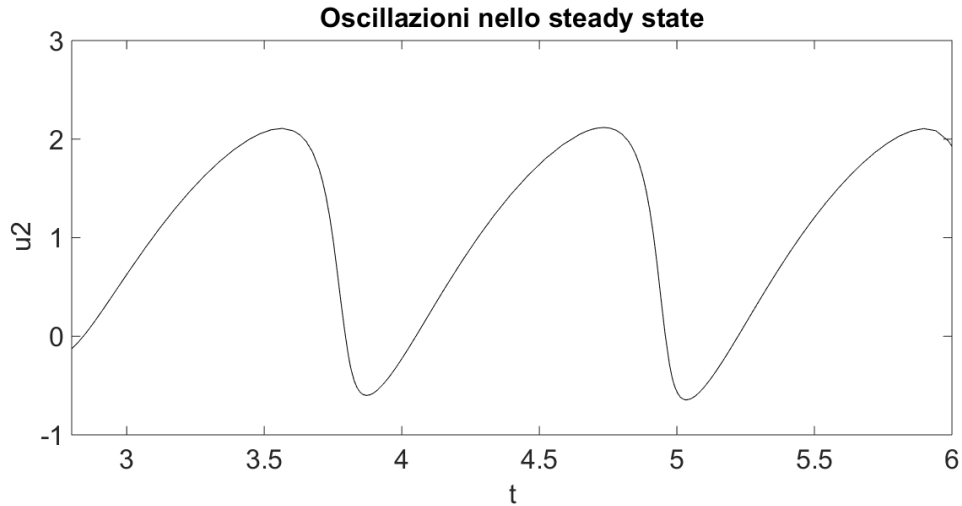


Figura 3.31: *Steady state oscillations della velocità u_2 in funzione del tempo t , frutto della computazione effettuata in questo lavoro. $R_2 = 50$, $\beta = 1.5$ e $P_1 = 209$.*

to i punti di massimo si mantengono su valori leggermente minori e al contrario i punti di minimo su valori leggermente superiori a quelli di Bertram.

Se si considerano gli andamenti nelle velocità u_2 (rispettivamente Figura 3.36, 3.37 per le computazioni di questo lavoro e Figura 3.33 computazione in letteratura) si nota che anche in questo caso il periodo è lo stesso nei due casi, ma nella computazione effettuata tramite Matlab si ottiene l'inversione del segno della velocità solo nel transitorio, mentre quando il sistema è a regime u_2 non scende al di sotto dei 0.5.

Le oscillazioni hanno diverse ampiezze e frequenze, e a volte diversa forma, sebbene in ogni caso il tubo tenda a rimanere aperto allorquando la velocità attraverso di esso sia relativamente alta. Inoltre considerando un ciclo il tubo si mantiene aperto per un tempo maggiore di quanto non resti quasi chiuso.

Si noti inoltre che in tutti i casi mostrati da Bertram si ha un breve periodo in cui il flusso cambia direzione seguendo un moto contrario a quello iniziale. Questa situazione si verifica poco dopo l'istante in cui si raggiunge la minima area nel restringimento. Sebbene questi risultati siano solo preliminari, indicano che, nonostante sia soggetto a numerose semplificazioni, il presente modello riesce a descrivere un gran numero di fenomeni fisici, alcuni dei quali non ancora pienamente compresi o mostrati sperimentalmente.

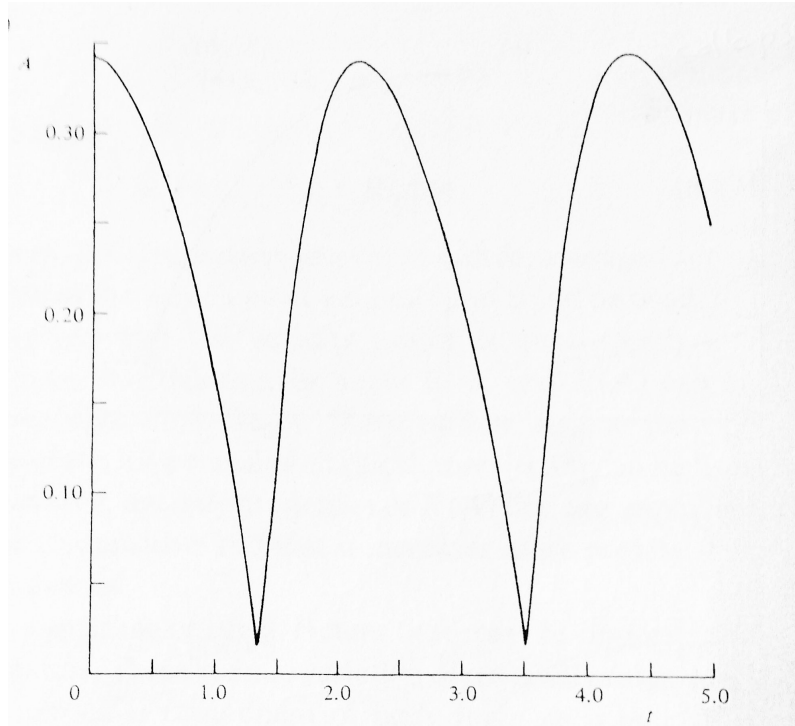


Figura 3.32: *Steady state oscillations dell'area A in funzione del tempo t , frutto della computazione di Bertram. $R_2 = 75$, $\beta = 0.5$ e $P_1 = 259$.*

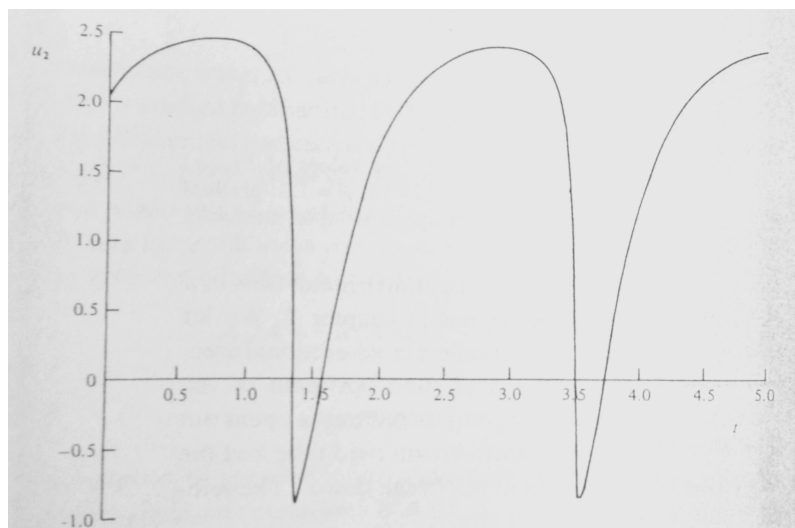


Figura 3.33: *Steady state oscillations della velocità u_2 in funzione del tempo t , frutto della computazione di Bertram. $R_2 = 75$, $\beta = 0.5$ e $P_1 = 259$.*

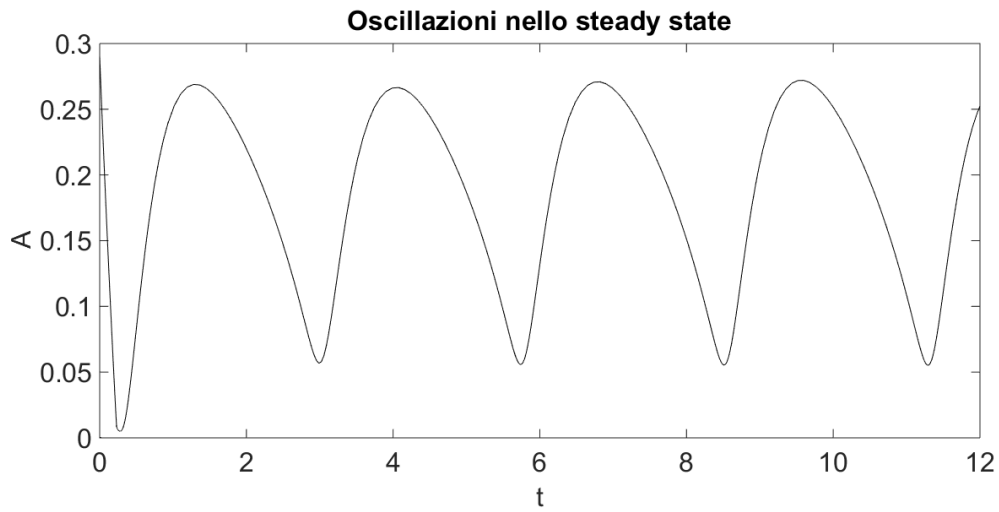


Figura 3.34: *Steady state oscillations dell'area A in funzione del tempo t, con transitorio, frutto della computazione effettuata in questo lavoro.* $R_2 = 75$, $\beta = 0.5$ e $P_1 = 259$.

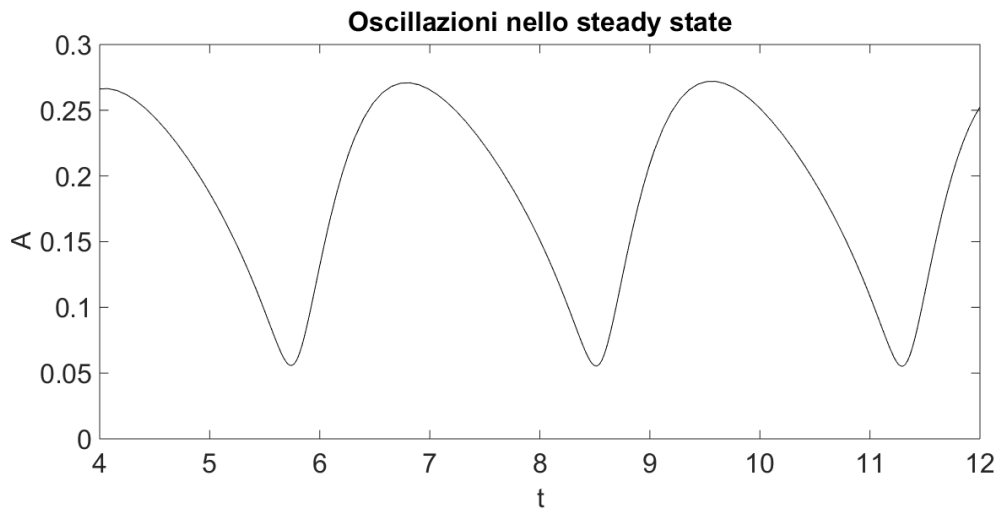


Figura 3.35: *Steady state oscillations dell'area A in funzione del tempo t, frutto della computazione effettuata in questo lavoro.* $R_2 = 75$, $\beta = 0.5$ e $P_1 = 259$.

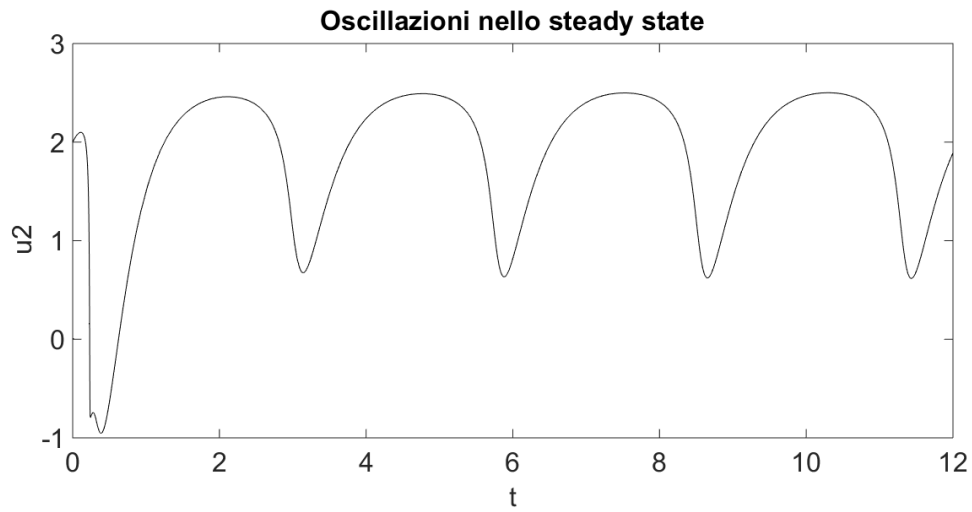


Figura 3.36: *Steady state oscillations della velocità u_2 in funzione del tempo t , con transitorio, frutto della computazione effettuata in questo lavoro. $R_2 = 75$, $\beta = 0.5$ e $P_1 = 259$.*

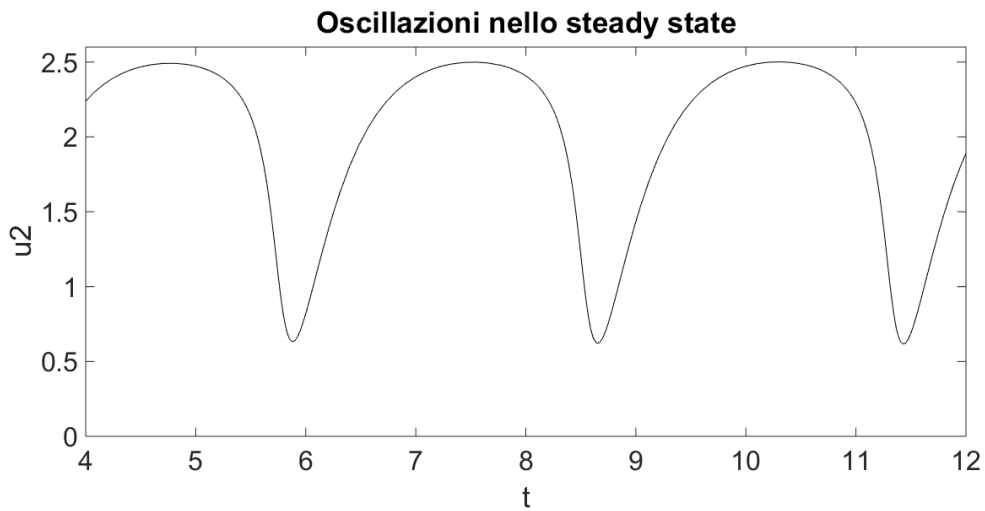


Figura 3.37: *Steady state oscillations della velocità u_2 in funzione del tempo t , frutto della computazione effettuata in questo lavoro. $R_2 = 75$, $\beta = 0.5$ e $P_1 = 259$.*

3.5.1 Caso di studio: lumped parameter model di Pedley con termini inerziali e viscoelastici

Si studino ora i risultati dell'analisi di stabilità marginale applicata al lumped parameter model di Pedley con termini inerziali e viscoelastici e li si confronti con quelli appena ottenuti.

Caso 1

Ricordando che nel primo caso di studio si utilizzano i seguenti parametri:

- Carico nel serbatoio $P_0 = 4$;
- Pressione nella camera $p_c = 200$;
- Resistenza nella sezione di controllo nel tubo rigido di valle $R_2 = 150$

che corrisponde alla condizione di equilibrio studiata in Figura 3.3 per la quale Pedley ha riscontrato una situazione di stabilità per tutti i valori di portata Q e tutti i valori di β utilizzati (0.5, 1, 1.5).

L'intervallo di portate studiato è compreso tra $0.98 < Q < 1.35$. In questo caso, oltre alla stabilità da egli indicata si è trovata una zona di instabilità per un intervallo di portate comprese tra $0.98 < Q < 1.30$, e l'evoluzione delle zone di stabilità e instabilità è leggermente diverso rispetto a quello riscontrato nelle computazione e riportato nelle Figure dalla 3.14 alla 3.19. I risultati della computazione effettuata col presente modello tramite il software Matlab sono riportati nei grafici in Figura da 3.38 a 3.43.

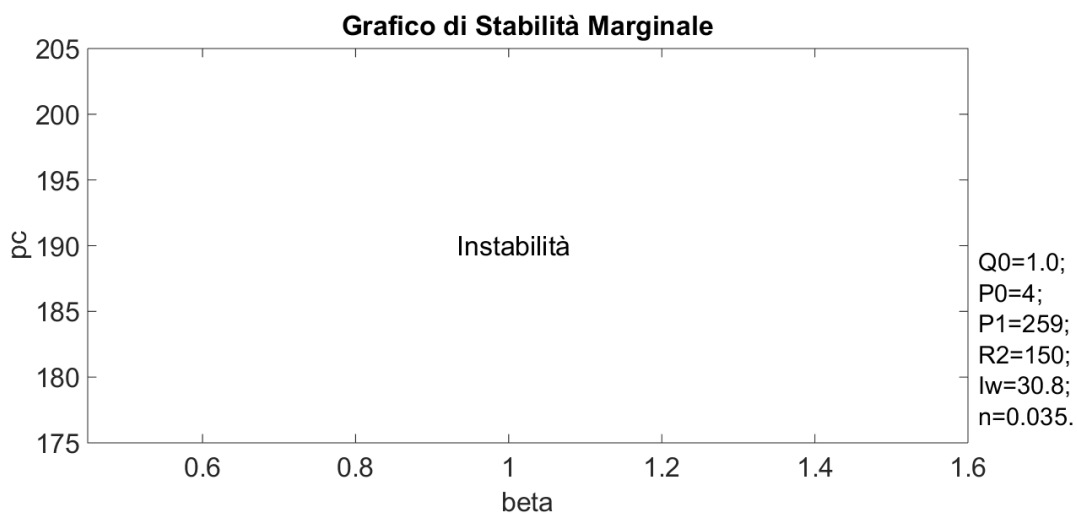


Figura 3.38: *Caso 1: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.00$, $\eta = 0.035$, $I_w = 30.8$, $P_1 = 259$, $P_0 = 4$, $R_2 = 150$.*

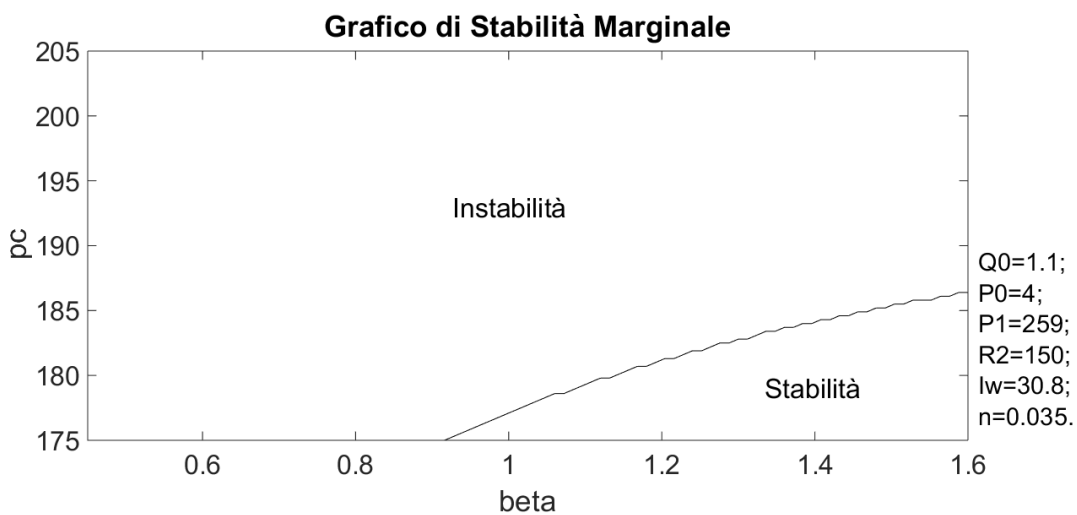


Figura 3.39: *Caso 1: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.09$, $\eta = 0.035$, $I_w = 30.8$, $P_1 = 259$, $P_0 = 4$, $R_2 = 150$.*

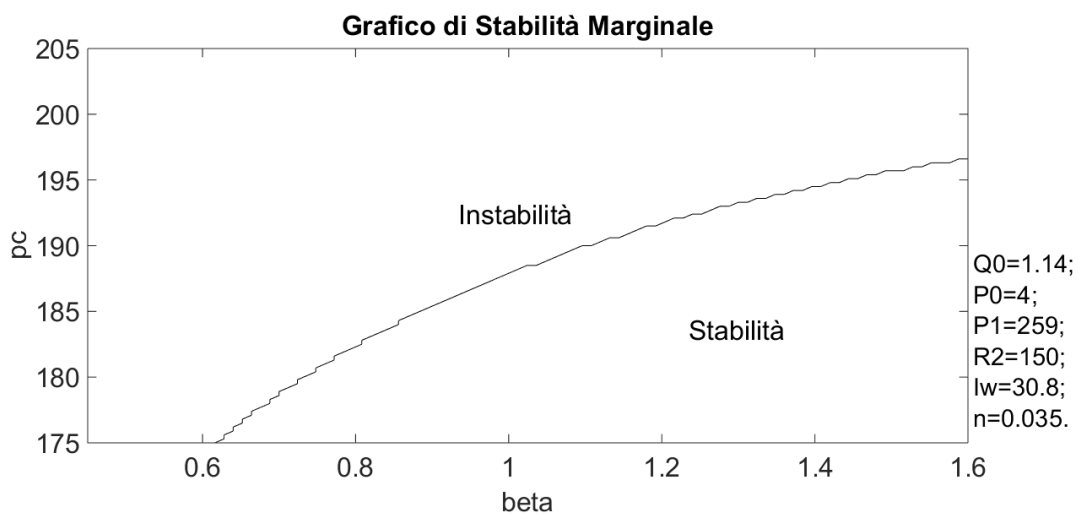


Figura 3.40: *Caso 1: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.14, \eta = 0.035, I_w = 30.8, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 150$.*

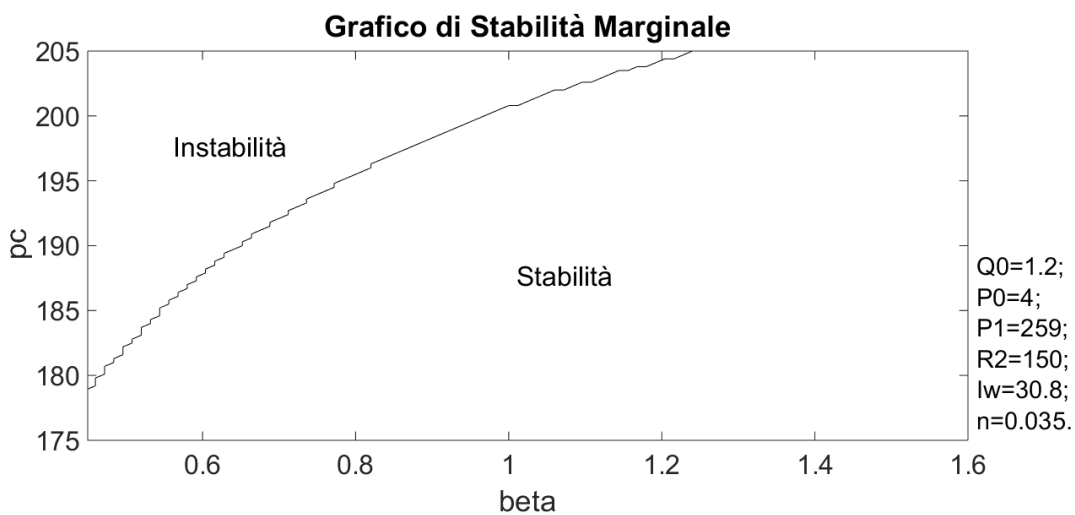


Figura 3.41: *Caso 1: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.20, \eta = 0.035, I_w = 30.8, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 150$.*

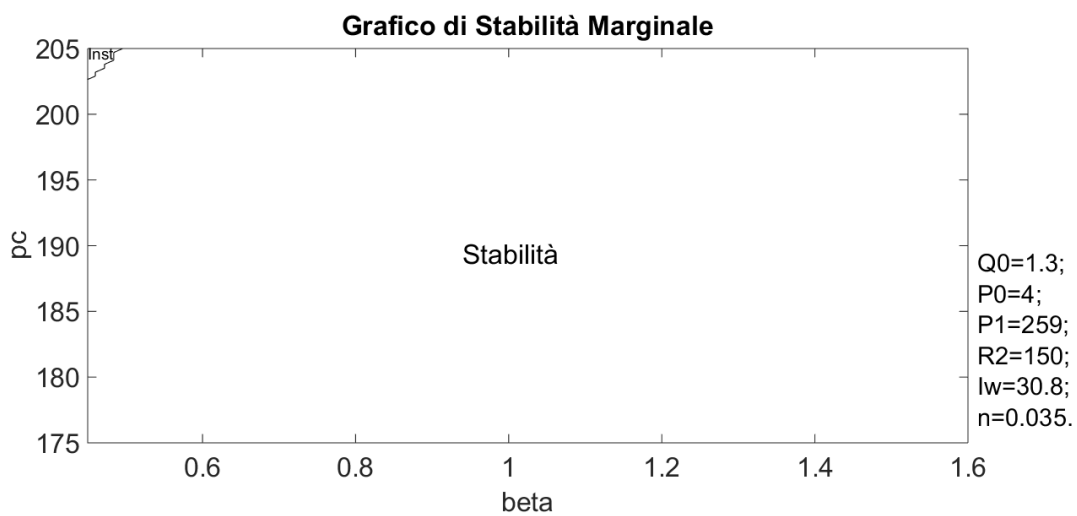


Figura 3.42: *Caso 1: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.30, \eta = 0.035, I_w = 30.8, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 150$.*

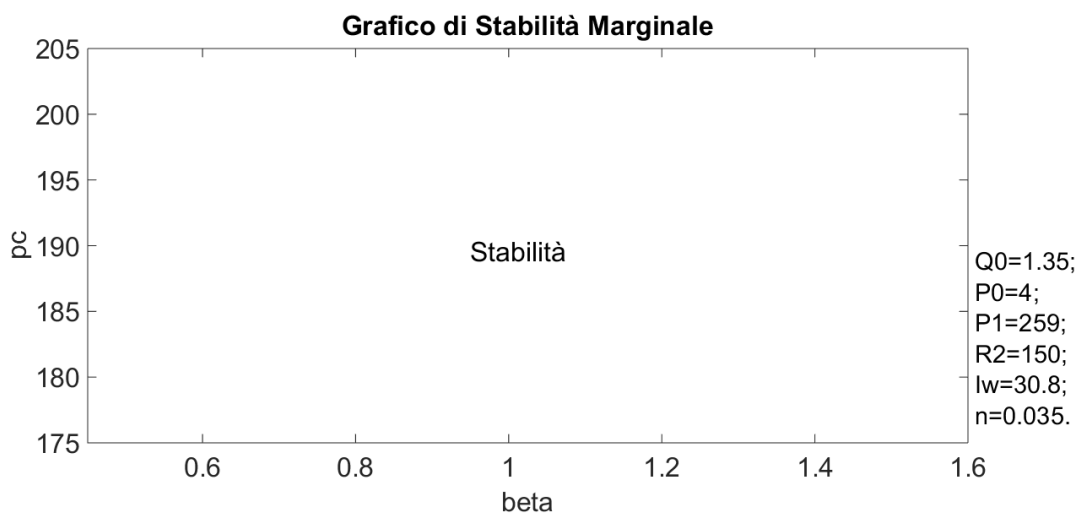


Figura 3.43: *Caso 1: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.35, \eta = 0.035, I_w = 30.8, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 150$.*

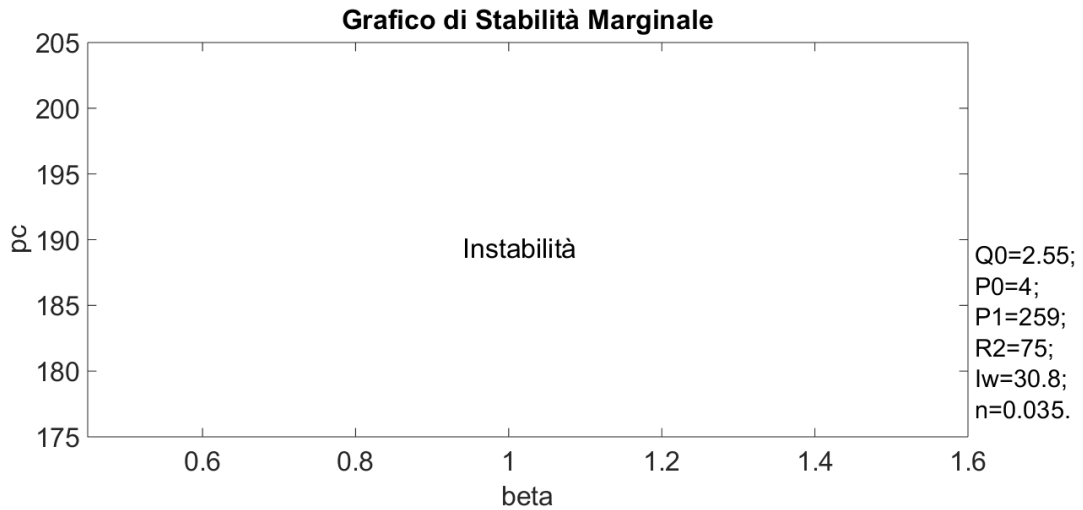


Figura 3.44: *Caso 2: Grafico di stabilità marginale per $Q = 2.55, \eta = 0.035, I_w = 30.8, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 75$.*

Caso 2

Nel secondo caso studiato, corrispondente alla prima curva degli equilibrium states riportata in Figura 3.4, i parametri utilizzati sono:

- Carico nel serbatoio $P_0 = 4$;
- Pressione nella camera $p_c = 200$;
- Resistenza nella sezione di controllo nel tubo rigido di valle $R_2 = 75$

Si è studiata la stabilità marginale considerando le portate $Q=2.55$ (Figura 3.44) e $Q=2.66$ (Figura 3.45) per le quali si è ottenuta instabilità per tutti e tre i valori di β in accordo coi risultati di Pedley.

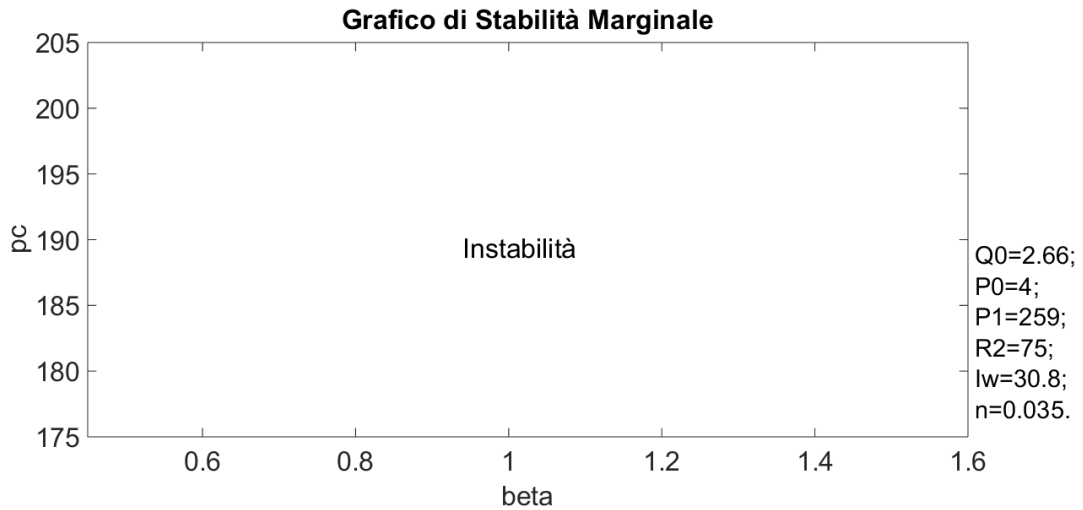


Figura 3.45: *Caso 2: Grafico di stabilità marginale per $Q = 2.66, \eta = 0.035, I_w = 30.8, P_1 = 259, P_0 = 4, R_2 = 75$.*

Caso 3

Utilizzando i seguenti valori dei parametri:

- Carico nel serbatoio $P_0 = 4$;
- Pressione nella camera $p_c = 200$;
- Resistenza nella sezione di controllo nel tubo rigido di valle $R_2 = 50$

I risultati ottenuti da Pedley indicano che l'equilibrio nel range di portate $Q=[0:4]$ risulta essere instabile in quasi tutto l'intervallo in quanto si ha $C_2C_1 - C_3C_0 < 0$. La computazione (Figura 3.46) risulta, come nel caso in Figura 3.23, in accordo coi suoi risultati.

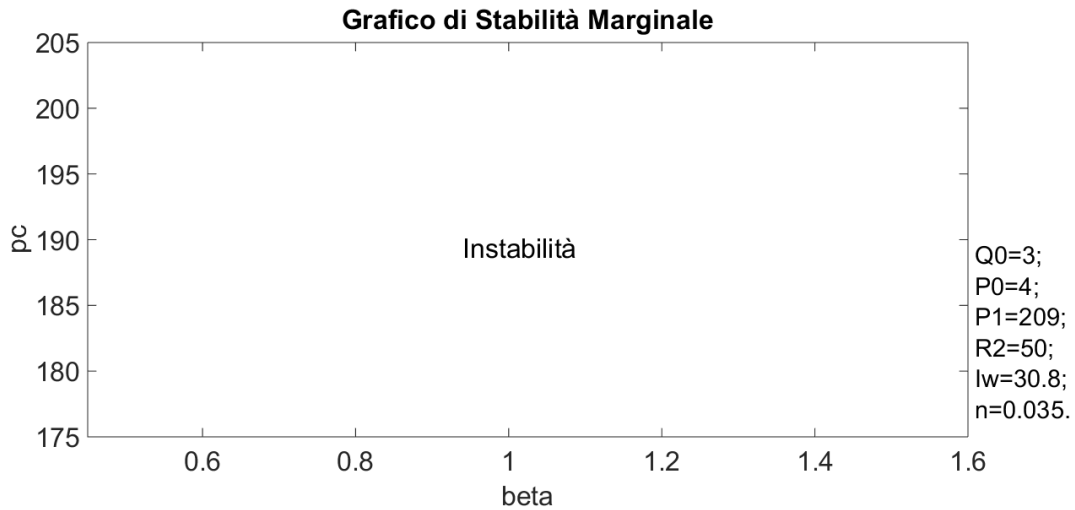


Figura 3.46: *Caso 3: Grafico di stabilità marginale per $Q = 3.00, \eta = 0.035, I_w = 30.8, P_1 = 209, P_0 = 4, R_2 = 50$.*

Caso 4

L'ultimo caso in studio presenta i seguenti valori dei parametri:

- Carico nel serbatoio $P_0 = 1$;
- Pressione nella camera $p_c = 180$;
- Resistenza nella sezione di controllo nel tubo rigido di valle $R_2 = 170$.

Per $\beta = 1.5$ non viene prevista alcuna instabilità, ma in questa computazione, si verifica per $Q=0.88$. Mentre per $\beta = 1.0$ nasce una resistenza negativa e si trova una zona di instabilità non oscillatoria per $Q=[0.88:1.05]$ e ciò è in accordo con la computazione effettuata riportata nelle Figure 3.47, 3.48.

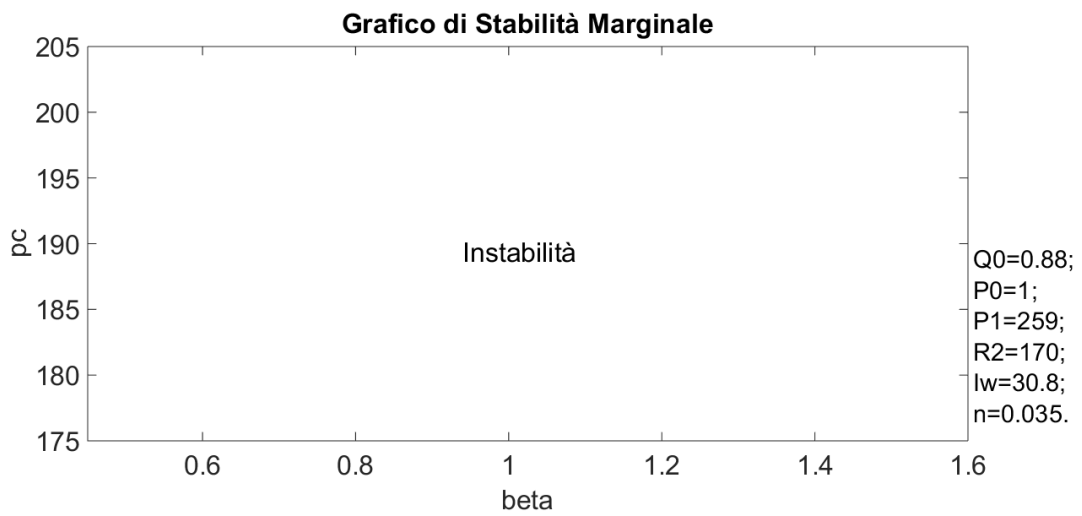


Figura 3.47: *Caso 4: Grafico di stabilità marginale per $Q = 0.88, \eta = 0.035, I_w = 30.8, P_1 = 259, P_0 = 1, R_2 = 50$.*

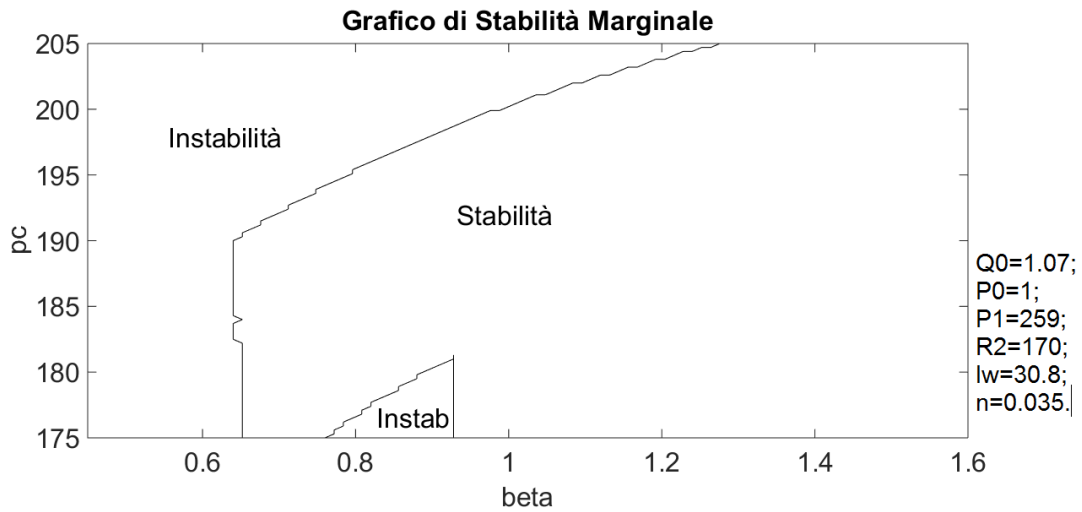


Figura 3.48: *Caso 4: Grafico di stabilità marginale per $Q = 1.065, \eta = 0.035, I_w = 30.8, P_1 = 259, P_0 = 1, R_2 = 50$.*

Oscillazioni nello steady state

Si confrontino infine i risultati relativi alle oscillazioni nello steady state nel caso in cui si considerino proprietà inerziali e viscoelastiche rammentando che i parametri standard sono gli stessi in tutti i casi e in particolare:

- Carico nel serbatoio $P_0 = 4$;
- Pressione nella camera $p_c = 200$;
- Lunghezza del segmento $l = 10$;

mentre la resistenza del segmento rigido di valle R_2 e il parametro β variano di volta in volta.

Per quanto riguarda il confronto delle oscillazioni nell'area A rispetto ai risultati riportati nelle Figure 3.26 e 3.29 in cui in entrambi i casi il punto di massimo raggiunge un valore di area A pari a 0.16, il punto di minimo un valore poco superiore a $A=0.02$ e il periodo risulta di circa 1.25 unità temporali adimensionalizzate, se si effettua la medesima computazione considerando proprietà viscoelastiche e inerziali (Figura 3.49) si raggiunge un'ampiezza di oscillazione leggermente maggiore ma il periodo si mantiene pressoché uguale.

Nel grafico rappresentante l'andamento della velocità u_2 (Figura 3.50) si nota ancora una maggiore ampiezza di oscillazione rispetto ai risultati delle Figure 3.27 e 3.31 ma sostanzialmente si ha un buon riscontro tra letteratura e computazione effettuata in questo lavoro.

Nel secondo caso studiato ($R_2 = 75$, $\beta = 0.5$ e $P_1 = 259$), le oscillazioni dell'area A (Figura 3.51) in questo caso raggiungono dei valori di massimo e minimo simili a quelli riportati in letteratura e indicati nella Figura 3.32 ma il periodo risulta maggiore di circa una unità.

Se si considerano gli andamenti nelle velocità u_2 (Figura 3.52) nella computazione effettuata tramite Matlab questa volta non si ottiene l'inversione del segno della velocità neanche nel transitorio e, come per l'area A, il periodo aumenta.

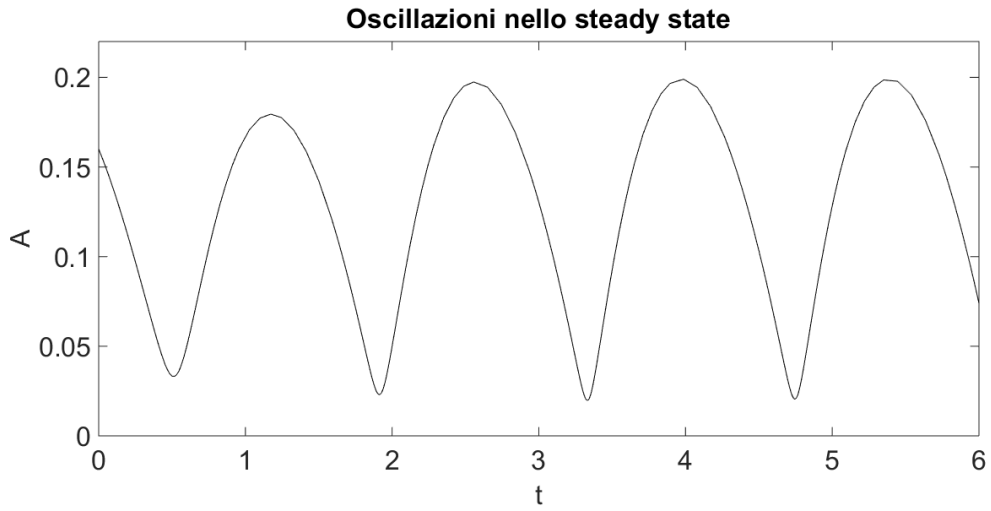


Figura 3.49: *Steady state oscillations dell'area A in funzione del tempo t , con transitorio, frutto della computazione effettuata in questo lavoro.* $R_2 = 50, \eta = 0.035, I_w = 30.8, \beta = 1.5$ e $P_1 = 209$.

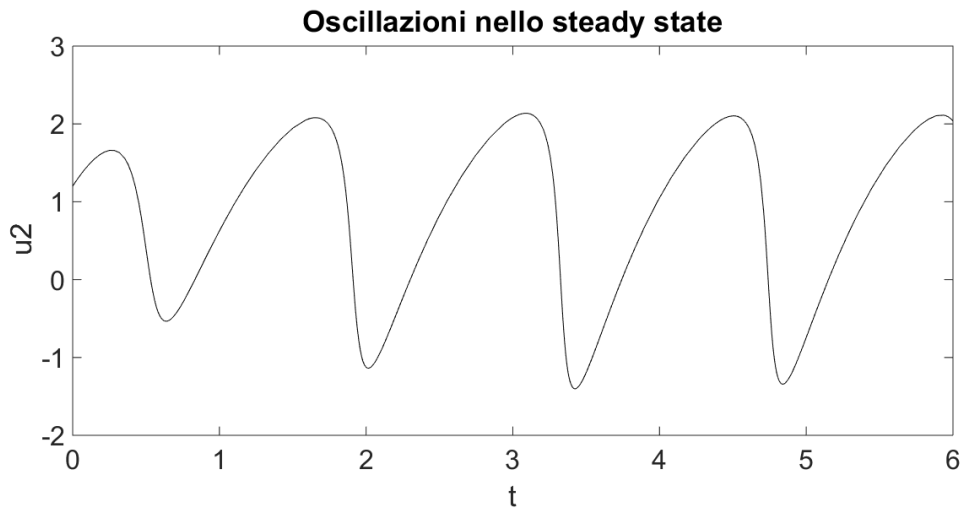


Figura 3.50: *Steady state oscillations della velocità u_2 in funzione del tempo t , con transitorio, frutto della computazione effettuata in questo lavoro.* $R_2 = 50, \eta = 0.035, I_w = 30.8, \beta = 1.5$ e $P_1 = 209$.

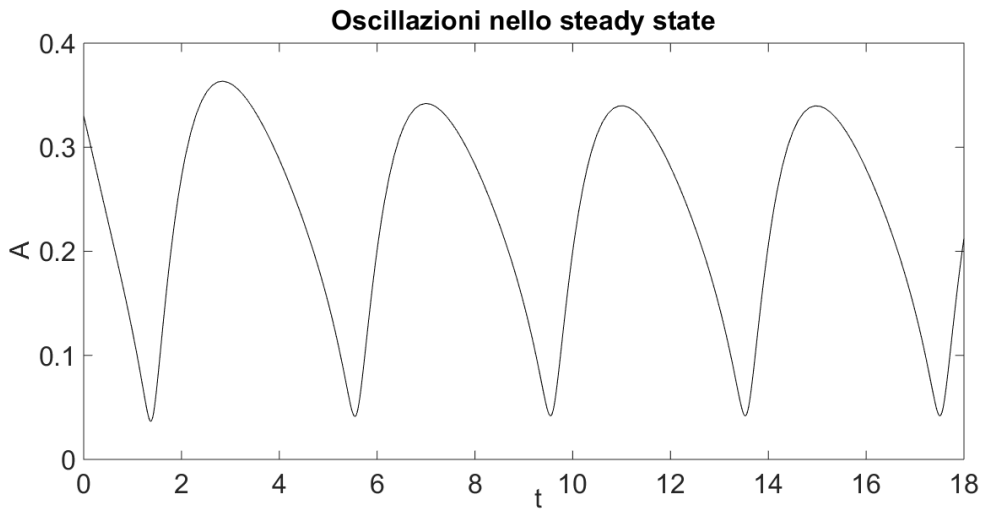


Figura 3.51: *Steady state oscillations dell'area A in funzione del tempo t , con transitorio, frutto della computazione effettuata in questo lavoro.* $R_2 = 75, \eta = 0.035, I_w = 30.8, \beta = 0.5$ e $P_1 = 259$.

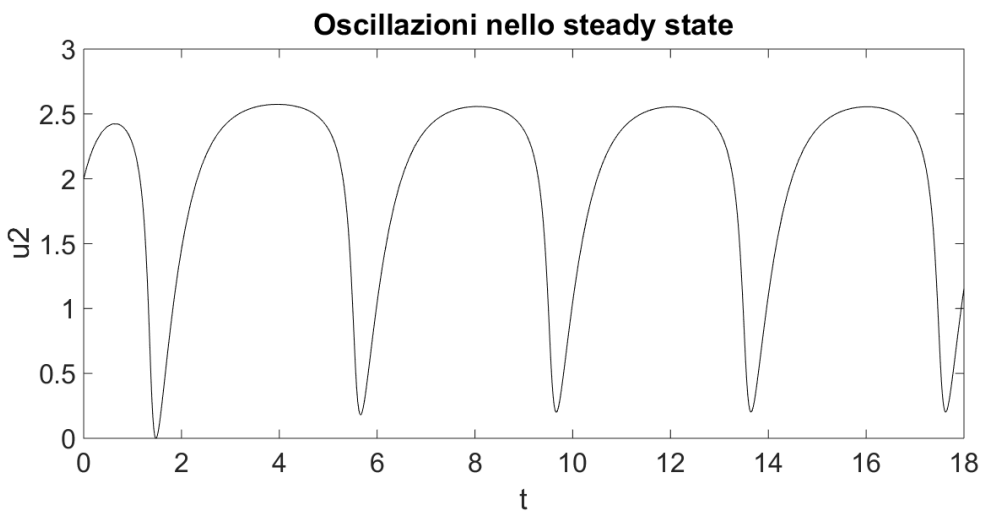


Figura 3.52: *Steady state oscillations della velocità u_2 in funzione del tempo t , con transitorio, frutto della computazione effettuata in questo lavoro.* $R_2 = 75, \eta = 0.035, I_w = 30.8, \beta = 0.5$ e $P_1 = 259$.

Capitolo 4

Analisi di stabilità non normale

4.1 Introduzione

Nel capitolo precedente si è condotta un'analisi per modi normali, partendo dall'ipotesi di piccole perturbazioni. Questa è consistita nell'applicare delle perturbazioni al modello iniziale e nel linearizzarlo per poter applicare il criterio di Routh. Ciò ha permesso di individuare le condizioni parametriche che provocano la stabilità e l'instabilità del sistema a tempo infinito, ma nessuna informazione è stata ottenuta per ciò che concerne il comportamento del modello per tempi finiti.

Recenti studi hanno dimostrato che, nei casi asintoticamente stabili, la non normalità degli operatori differenziali può provocare un decadimento non monotono delle perturbazioni imposte e la nascita di crescite transitorie.

Nella Figura 4.1 si mostrano due diversi tipi di comportamento, senza crescita transitoria (caso A) o con crescita transitoria (caso B), che portano entrambi a una decrescita delle perturbazioni tendente asintoticamente a zero. Questa differenza è spiegata matematicamente attraverso il grado di non-normalità degli autovettori della matrice che descrive le perturbazioni dinamiche. Nel caso A gli autovettori sono ortogonali e le perturbazioni, che possono essere espresse come combinazioni lineari degli autovettori, decrescono monotonicamente nel tempo. Nel caso B, invece, gli autovettori sono non ortogonali e a ciò consegue che, nonostante il singolo autovettore decada monotonicamente nel tempo, alcune perturbazioni possano essere soggette a crescite transitorie.

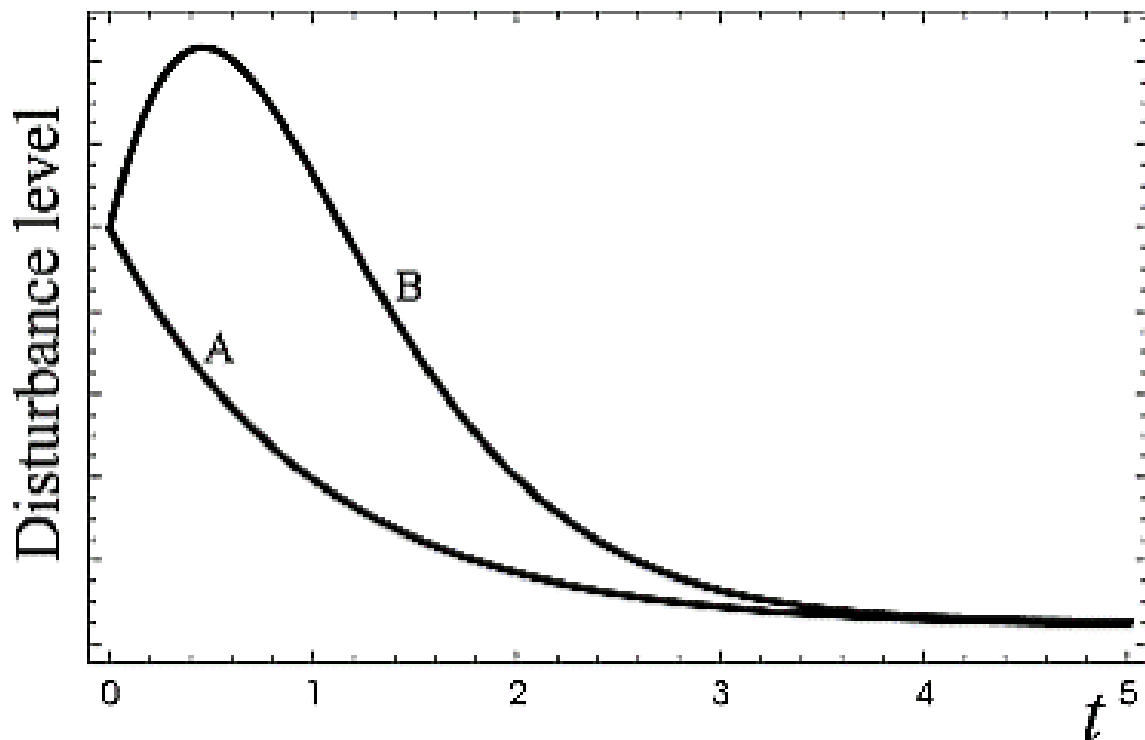


Figura 4.1: *Due possibili tipologie di comportamento transitorio per perturbazioni asintoticamente decrescenti. Nel caso A la perturbazione tende monotonicamente a zero, mentre nel caso B si nota un transitorio per tempi finiti. (Camporeale e Ridolfi, 2009)*

Un'analisi di stabilità condotta per modi normali porta in entrambi i casi all'individuazione di autovalori negativi, in quanto a tempo infinito il comportamento è identico e non si apprezza il diverso andamento che assumono le due curve per tempi finiti. Quindi nonostante a lungo termine il comportamento del sistema sia correttamente descritto dal modo meno stabile, l'analisi basata sugli autovalori non consente di effettuare una buona descrizione degli andamenti transitori delle fluttuazioni nel caso in cui gli autovettori non formino un set ortogonale. Questo spiega perché il concetto di non ortogonalità degli autovettori risulta essere così strettamente correlato all'esistenza di crescite transitorie nell'analisi di stabilità.

La differenza tra dinamiche temporali monotone o non monotone potrebbe apparire trascurabile. Invece possono essere trovate almeno tre ragioni che spieghino la sua importanza.

In primo luogo la crescita transitoria potrebbe innescare instabilità non lineari e il problema che risultasse asintoticamente stabile utilizzando un'analisi per modi normali, potrebbe essere invece instabile a causa dell'amplificazione delle perturbazioni che rende i termini non lineari significativi. Questo processo è chiamato *bypass transition* nell'instabilità idrodinamica.

In secondo luogo, è possibile che le crescite transitorie si sviluppino per tempi comparabili con quelli di interesse nello studio del problema. Si potrebbe quindi giudicare il *basic state* instabile finché le perturbazioni non diminuiscono.

Infine, questo tipo di crescita transitoria è descritto da un meccanismo lineare dunque può essere spiegata tramite concetti lineari, senza dover considerare non linearità.

Per tutte queste ragioni negli ultimi anni gli studi sulle non normalità hanno suscitato notevole interesse nella fisica e in particolare nella meccanica dei fluidi. Inoltre la maggior parte degli operatori idrodinamici che derivano da un'analisi di stabilità lineare sono non normali. Come conseguenza, la sovrapposizione algebrica del decadimento dei modi normali subcritici può condurre a crescite transitorie. Questi aspetti sono già stati investigati da Camporeale e Ridolfi (2009) per le equazioni di Saint-Venant-Exner sia in condizioni di letto fisso che di letto mobile.

Non risulta che metodi di questo tipo siano stati applicati al *lumped parameter*

model di Pedley, quindi nel presente capitolo si proseguirà l'indagine in questo senso. Si considererà in primo luogo il modello privato dei termini di inerzia e viscoelasticità e secondariamente il modello che invece li comprende.

4.2 Definizione dell'energia del sistema

Lo studio del comportamento transitorio e della nonnormalità richiede la scelta di una norma che descriva l'evoluzione della crescita. È fisicamente significativo fare riferimento all'evoluzione dell'energia totale associata alle perturbazioni imposte al sistema (Reddy et Henningson 1993, Olsson et Henningson 1995).

Si rammenti che nel capitolo precedente è stata effettuata la linearizzazione del sistema rispetto alle variabili perturbate:

$$\begin{aligned}A &= A_0 + \varepsilon a'; \\u_2 &= Q_0 + \varepsilon u'_2; \\y &= \varepsilon y';\end{aligned}\tag{4.1}$$

in cui i termini col pedice zero sono i valori dei basic states per un determinato set di parametri, e i restanti rappresentano le perturbazioni applicate. Si è arrivati a scrivere il modello linearizzato nella forma:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = [\mathbf{A}]\vec{y} + [\mathbf{B}];$$

Dove il vettore dei termini noti $[\mathbf{B}]$ diventa pari a zero quando vengono sostituiti i valori dei basic states e può quindi essere trascurato nella presente analisi.

L'energia totale del sistema è costituita dalla somma dell'energia del fluido E_F e dell'energia della parete della tubazione E_S .

In forma adimensionale la prima risulta pari a:

$$E_F = \rho U_0^2 \left[p + \frac{u_2^2}{2} \right]\tag{4.2}$$

In cui:

- ρ rappresenta la densità del fluido;
- U_0 rappresenta la velocità di riferimento rispetto la quale è stata effettuata l'adimensionalizzazione del modello;
- p comprende i termini di pressione del modello e risulta pari a:

$$p = p_c + P_0 \left(1 - \left(\frac{A_c}{A} \right) \right);$$

- u_2 la velocità nel tubo rigido di valle.

Il primo contributo, legato alla pressione p , è un'energia di tipo potenziale, mentre il secondo, legato alla velocità u_2 , rappresenta l'energia cinetica del fluido.

Per quanto riguarda l'energia della parete E_S , questa può essere interpretata come il contributo cinetico offerto dalla parete nel momento in cui essa oscilla. Quindi facendo riferimento a un concio infinitesimo di tubazione avente spessore s tanto sottile da poter essere trascurato e massa m_s si può scrivere in termini dimensionali:

$$E_S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} m_s \left(\frac{d\tilde{R}}{dr} \right)^2 d\theta \quad (4.3)$$

Dove:

- \tilde{R} rappresenta il raggio dimensionale del concio, pari alla distanza tra baricentro del concio stesso e retta baricentrica della tubazione;
- θ è l'angolo di apertura del concio.

Poiché assumiamo che la parete solida sia incomprimibile, la massa del concio:

$$m_s = \rho_s \tilde{R} s d\theta$$

risulta essere costante, dove con ρ_s si intende la densità del materiale costituente il tubo, solitamente latex.

Quindi si può esprimere l'energia della parete come:

$$E_s = \frac{1}{2} 2\pi \rho_s s \tilde{R} \left(\frac{d\tilde{R}}{dr} \right)^2 = \pi \rho \alpha s \tilde{R} (\dot{\tilde{R}})^2 ;$$

Dove $\alpha = \rho/\rho_s$. Poiché l'area dimensionale della sezione del tubo è definita come:

$$\tilde{A} = \pi \tilde{R}^2 ;$$

E di conseguenza \tilde{R} può essere scritto come:

$$\tilde{A} = \sqrt{\frac{\tilde{A}}{\pi}} ;$$

La derivata dell'area sarà pari a:

$$\dot{\tilde{A}} = 2\pi \tilde{R} (\dot{\tilde{R}}) \Rightarrow \pi \tilde{R} (\dot{\tilde{R}})^2 = \frac{(\dot{\tilde{A}})^2}{4\pi \tilde{R}} = \frac{(\dot{\tilde{A}})^2}{4\sqrt{\pi \tilde{A}}} ;$$

Sostituendo nella definizione dell'energia della parete solida E_s ed effettuando l'adimensionalizzazione (i termini adimensionalizzati perdono la tilde) si ottiene:

$$E_s = \frac{\rho\alpha s}{4\sqrt{\pi}} \frac{(\dot{A})^2}{\sqrt{\tilde{A}}} = \frac{\rho\alpha s}{4\sqrt{\pi}} \frac{A_0^2}{a_0^2} U_0^2 \frac{1}{\sqrt{A_0}} \frac{(\dot{A})^2}{\sqrt{A}};$$

E infine ponendo:

$$\gamma = \frac{\alpha s}{4\sqrt{\pi}A_0} \frac{A_0^2}{a_0^2};$$

Si ottiene la formulazione conclusiva di E_s :

$$E_s = \rho U_0^2 \gamma \frac{(\dot{A})^2}{\sqrt{A}}; \quad (4.4)$$

Dove si ricorda che:

- A rappresenta la sezione del tubo più ristretta e adimensionalizzata rispetto all'area della tubazione indisturbata A_0 ;
- a_0 è il raggio del tubo indisturbato, rispetto al quale vengono effettuate le adimensionalizzazioni dei raggi dimensionali \tilde{R} .

Sommando i vari contributi e dividendo per ρU_0^2 l'energia totale adimensionalizzata del sistema risulta:

$$\frac{E_{TOT}}{\rho U_0^2} = p + \frac{u_2^2}{2} + \gamma \frac{(\dot{A})^2}{\sqrt{A}}; \quad (4.5)$$

Applicando a quest'ultima le perturbazioni di variabile delle definizioni al (4.1), rammentando che:

$$\dot{A} = y;$$

e sviluppando i termini in serie di Taylor arrestandosi al secondo ordine si ottiene:

$$\frac{E_{TOT}}{\rho U_0^2} = \sigma_0 + \frac{Q_0^2}{2} + \varepsilon(\sigma_1 a' + Q_0 u_2') + \varepsilon^2 \left[\sigma_2 a'^2 + \frac{u_2'^2}{2} + \frac{\gamma}{\sqrt{A_0}} y'^2 \right]; \quad (4.6)$$

Nella quale:

- $\sigma_0 = P_0 - \frac{A_c}{A_0} \left(\frac{A_c}{A_0} \right)^{\frac{3}{2}} P_0 + p_c$;
- $\sigma_1 = \frac{3}{2} \frac{A_c}{(A_0)^2} \sqrt{\frac{A_c}{A_0}} P_0$;
- $\sigma_2 = -\frac{15}{8} \frac{A_c}{(A_0)^3} P_0 \sqrt{\frac{A_c}{A_0}}$.

In sintesi si può affermare che:

$$\frac{E_{TOT}}{\rho U_0^2} = E_0 + \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2; \quad (4.7)$$

Per procedere con l'analisi e ricondursi all'espressione della norma si ha l'esigenza di costruire un'espressione dell'energia che sia in forma quadratica, cioè del tipo $E_0 + \varepsilon^2 E_2$, in cui non compaia il termine di primo grado.

Ricordando che le equazioni del modello, espresse in forma linearizzata, possono essere scritte sinteticamente come:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\varepsilon a'}{dt} \\ \frac{d\varepsilon u'_2}{dt} \\ \frac{d\varepsilon y'}{dt} \end{bmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{bmatrix} \varepsilon a' \\ \varepsilon u'_2 \\ \varepsilon y' \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$[\vec{y}] = [\mathbf{A}] [\vec{y}]$$

È possibile effettuare il seguente cambio di variabili:

$$[\vec{y}] = [\mathbf{M}] [\vec{x}]$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon a' \\ \varepsilon u'_2 \\ \varepsilon y' \end{bmatrix} = [\mathbf{M}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Dove la matrice $[\mathbf{M}]$ è stata ottenuta imponendo che il termine di primo grado dell'espressione dell'energia totale (4.6) fosse pari a zero. Questa è costituita come segue:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{Q_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2} + Q_0^2 \sigma_2}} \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2} + Q_0^2 \sigma_2}} \\ \sqrt{\frac{\sqrt{A_0}}{\gamma}} & \sqrt{\frac{\sqrt{A_0}}{\gamma}} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Partendo dal modello linearizzato iniziale espresso nella (4.8) ed applicando il cambio di variabile si ottiene:

$$[\mathbf{M}] [\vec{x}] = [\mathbf{A}] [\mathbf{M}] [\vec{x}]; \quad (4.11)$$

A questo punto, essendo i termini che costituiscono la matrice \mathbf{A} differenti, è necessario proseguire l'analisi distinguendo i due casi trattati:

- il lumped parameter model di Pedley in cui si trascurano caratteristiche viscoelastiche e inerziali;
- lo stesso lumped parameter model di Pedley in cui i termini di viscoelasticità e inerzia vengono considerati.

4.2.1 Lumped parameter model di Pedley

Si consideri l'equazione (4.11) e in essa si indichi con $[\mathbf{K}]$ la matrice data dal prodotto riga per colonna tra le matrici $[\mathbf{A}]$ ed $[\mathbf{M}]$. Esprimendo simbolicamente i termini all'interno delle matrici la (4.11) diventa:

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{M}] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = [\mathbf{K}] \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}; \\
 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ c & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & d & 0 \\ 0 & 0 & e \\ f & f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

I termini della matrice $[\mathbf{K}]$, indicati per esteso, assumono i seguenti valori:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} d & d & 0 \\ 0 & 0 & e \\ f & f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
K_{11} &= A_{13}M_{31} = \sqrt{\frac{\sqrt{A_0}}{\gamma}}; \\
K_{12} &= A_{13}M_{32} = \sqrt{\frac{\sqrt{A_0}}{\gamma}}; \\
K_{13} &= 0; \\
K_{21} &= 0; \\
K_{22} &= 0; \\
K_{23} &= A_{21}M_{13} + A_{22}M_{23} = \\
&\quad \frac{Q_0^2 f'(A_0) + P'(A_0)}{I_2} \frac{Q_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2} + Q_0^2 \sigma_2}} + \\
&\quad \frac{-R_2 + 2Q_0 f(A_0)}{I_2} - \frac{\sigma_1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2} + Q_0^2 \sigma_2}}; \tag{4.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{31} &= A_{33}M_{31} = \\
&\quad \frac{2}{l \left[I_1 + \frac{l}{1+A_0} \right]} \left\{ \frac{1}{2} l Q_0 - \frac{1}{2} l R_1 + \frac{l^2}{2 [1 + A_0]^2} \right\} \\
&\quad \sqrt{\frac{\sqrt{A_0}}{\gamma}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{32} &= A_{33}M_{32} = \\
&\quad \frac{2}{l \left[I_1 + \frac{l}{1+A_0} \right]} \left\{ \frac{1}{2} l Q_0 - \frac{1}{2} l R_1 + \frac{l^2}{2 [1 + A_0]^2} \right\} \\
&\quad \sqrt{\frac{\sqrt{A_0}}{\gamma}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{33} = & A_{31}M_{13} + A_{32}M_{23} = \\
& + \frac{2}{l} \left\{ \frac{l}{(I_1 + l + A_0 I_1)^2} \left\{ P_1 - p_c + \frac{1}{2} Q_0^2 - \frac{1}{2} Q_0^2 A_0^2 - R_1 Q_0 + \right. \right. \\
& - P(A_0) - \frac{I_1}{I_2} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + f(A_0) Q_0^2] + \\
& + l \left\{ + 2 \frac{Q_0}{(1 + A_0)^2} - \frac{2}{I_2} \frac{1}{1 + A_0} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + \right. \\
& \left. \left. f(A_0) Q_0^2 \right] \right\} - \frac{1}{4} l R(A_0) \frac{Q_0}{A_0} \left. \right\} + \frac{1}{I_1 + \frac{l}{1 + A_0}} \left\{ + \frac{Q_0^2}{A_0^3} - P'(A_0) + \right. \\
& + \frac{I_1}{I_2} [-f'(A_0) Q_0^2 - P'(A_0)] + l \left\{ - \frac{4 Q_0}{(1 + A_0)^3} + \right. \\
& - \frac{2}{I_2} \left[- \frac{1}{(1 + A_0)^2} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + f(A_0) Q_0] + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{1 + A_0} (+f'(A_0) Q_0^2 + P'(A_0)) \right] \right\} + \\
& \left. + \frac{1}{4 A_0^2} [l Q_0 R(A_0) - l A_0 Q_0 R'(A_0)] \right\} \\
& + \frac{Q_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2} + Q_0^2 \sigma_2}} + \\
& \frac{2}{l \left[I_1 + \frac{l}{1 + A_0} \right]} \left\{ Q_0 - R_1 + \frac{Q_0}{A_0^2} + \frac{I_1}{I_2} [R_2 - 2f(A_0) Q_0] + \right. \\
& + l \left\{ \frac{2}{(1 + A_0)^2} - \frac{2}{I_2} \frac{1}{1 + A_0} [-R_2 + 2f(A_0) Q_0] \right\} - \frac{l R(A_0)}{4 A_0} \left. \right\} \\
& - \frac{\sigma_1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2} + Q_0^2 \sigma_2}};
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Riprendendo per praticità l'analisi con l'utilizzo dei termini simbolici, sviluppando la (4.12) si ottiene:

$$\begin{bmatrix} a\dot{x}_3 \\ b\dot{x}_3 \\ c(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(x_1 + x_2) \\ ex_3 \\ f(x_1 + x_2) + gx_3 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Con questa operazione si ottiene l'eliminazione del termine di primo grado nell'espressione dell'energia totale (4.6), (4.7):

$$\frac{E_{TOT}}{\rho U_0^2} = E_0 + \varepsilon^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2) = E_0 + \varepsilon^2 E_2; \tag{4.17}$$

Ed è possibile esprimere in termine E_2 in forma quadratica:

$$E_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X^T C X; \quad (4.18)$$

A questo punto il termine E_2 può essere ricondotto all'espressione della norma-2 se viene effettuata un'ulteriore sostituzione di variabili:

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 + x_2; \\ q_2 &= x_3; \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ed E_2 diventa:

$$E_2 = q_1^2 + q_2^2 = \|\{q_1, q_2\}\|^2 = \|\vec{q}\|^2; \quad (4.20)$$

Si è cioè eliminato il termine al di fuori della diagonale. Effettuando la sostituzione si ottiene:

$$\begin{bmatrix} a\dot{q}_2 \\ b\dot{q}_2 \\ c\dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dq_1 \\ eq_2 \\ fq_1 + gq_2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

È possibile combinare le prime due righe:

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= \frac{d}{a}q_1 = \frac{e}{b}q_2; \\ q_2 &= \frac{b}{e} \left(\frac{d}{a}q_1 \right); \end{aligned}$$

Estendendo la sostituzione al (4.21) si ottiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left(\frac{f}{c} + \frac{gbd}{cea}\right) q_1 \\ \frac{e}{b}q_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left(\frac{f}{c} + \frac{gbd}{cea}\right) & 0 \\ 0 & \frac{e}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\vec{q}} \end{bmatrix} &= [F] [\vec{q}]; \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.2.2 Lumped parameter model di Pedley con proprietà viscoelastiche e inerzia

Si ripeta l'analisi effettuata nella sottosezione precedente considerando il lumped parameter model di Pedley comprendente i termini che esprimono le caratteristiche viscoelastiche e inerziali.

Si consideri ancora l'equazione (4.11) e in essa si indichi con $[K]$ la matrice data dal prodotto riga per colonna tra le matrici $[A]$ ed $[M]$. Esprimendo simbolicamente i termini all'interno delle matrici la (4.11) diventa:

$$[M] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = [K] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ c & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & h & 0 \\ i & i & l \\ m & m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

I termini della matrice $[K]$, indicati per esteso, assumono i seguenti valori:

$$[K] = \begin{bmatrix} h & h & 0 \\ i & i & l \\ m & m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$K_{11} = A_{13}M_{31} = \sqrt{\frac{\sqrt{A_0}}{\gamma}};$$

$$K_{12} = A_{13}M_{32} = \sqrt{\frac{\sqrt{A_0}}{\gamma}};$$

$$K_{13} = 0;$$

$$K_{21} = A_{23}M_{31} =$$

$$\frac{\eta}{I_2} + \frac{I_w}{I_2} \left\{ +1/ \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2 l I_w}{(1 + A_0) I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1 + A_0} \right] \right. \\ \left. \left\{ -\eta + \frac{1}{2} l Q_0 - \frac{1}{2} l R_1 - \eta \frac{I_1}{I_2} + l \left\{ \frac{1}{2} \frac{l}{(1 + A_0)^2} - \frac{2\eta}{I_2(1 + A_0)} \right\} \right\} \right\} \sqrt{\frac{\sqrt{A_0}}{\gamma}};$$

$$K_{22} = A_{23}M_{32} =$$

$$\frac{\eta}{I_2} + \frac{I_w}{I_2} \left\{ +1/ \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2 l I_w}{(1 + A_0) I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1 + A_0} \right] \right. \\ \left. \left\{ -\eta + \frac{1}{2} l Q_0 - \frac{1}{2} l R_1 - \eta \frac{I_1}{I_2} + l \left\{ \frac{1}{2} \frac{l}{(1 + A_0)^2} - \frac{2\eta}{I_2(1 + A_0)} \right\} \right\} \right\} \sqrt{\frac{\sqrt{A_0}}{\gamma}};$$

(4.25)

$$\begin{aligned}
K_{23} = & A_{21}M_{13} + A_{22}M_{23} = \\
& \frac{1}{I_2} \{ +Q_0^2 f'(A_0) + P'(A_0) \} + \\
& + \frac{I_w}{I_2} \left\{ I_2 \left[2I_w l + \frac{1}{2} I_2 l^2 \right] 1/ [I_1 I_w + A_0 I_1 I_w + I_2 I_w + A_0 I_2 I_w + \right. \\
& + \frac{1}{2} I_1 I_2 l + \frac{1}{2} A_0 I_1 I_2 l + 2I_w l + \frac{1}{2} I_2 l^2 \left. \right]^2 \left\{ P_1 - p_c + \frac{Q_0^2}{2} + \right. \\
& - \frac{Q_0^2}{2A_0^2} - Q_0 R_1 - P(A_0) - \frac{I_1}{I_2} [p_c - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] + \\
& l \left\{ \frac{2Q_0}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{(1+A_0)I_2} [p_c - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] \right\} + \\
& - \frac{l Q_0 R(A_0)}{4A_0} \left. \right\} + 1/ \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2l I_w}{(1+A_0)I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \\
& \left\{ + \frac{Q_0^2}{A_0^3} - P'(A_0) + \frac{I_1}{I_2} [Q_0^2 f'(A_0) - P'(A_0)] + l \left\{ - \frac{4Q_0}{(1+A_0)^3} + \right. \right. \\
& \frac{2}{I_2(1+A_0)^2} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + f(A_0) Q_0^2] + \\
& \left. \left. - \frac{2}{I_2(1+A_0)} [Q_0^2 f'(A_0) + P'(A_0)] \right\} + \frac{1}{4A_0^2} [l Q_0 R(A_0) + \right. \\
& \left. - l A_0 Q_0 R'(A_0)] \right\} \frac{Q_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2} + Q_0^2 \sigma_2}} + \\
& \frac{1}{I_2} \{ -R_2 + 2Q_0 f(A_0) \} + \\
& + \frac{I_w}{I_2} \left\{ +1/ \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2l I_w}{(1+A_0)I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \right. \\
& \left\{ Q_0 - R_1 - \frac{Q_0}{A_0^2} + \frac{I_1}{I_2} [R_2 - 2Q_0 f(A_0)] + \right. \\
& + l \left\{ + \frac{2}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{I_2(1+A_0)} [-R_2 + 2Q_0 f(A_0)] \right\} + \\
& \left. \left. + \frac{1}{4A_0^2} [-l A_0 R(A_0)] \right\} \right\} \left\{ - \frac{\sigma_1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2} + Q_0^2 \sigma_2}} \right\}; \tag{4.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{31} = A_{33}M_{31} = & \\
& \left\{ +1/ \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2l I_w}{(1+A_0)I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \right. \\
& \left. \left\{ -\eta + \frac{1}{2} l Q_0 - \frac{1}{2} l R_1 - \eta \frac{I_1}{I_2} + l \left\{ \frac{1}{2} \frac{l}{(1+A_0)^2} - \frac{2\eta}{I_2(1+A_0)} \right\} \right\} \right\} \\
& \sqrt{\frac{\sqrt{A_0}}{\gamma}};
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
K_{32} = A_{33}M_{32} = & \\
& \left\{ +1/ \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2l I_w}{(1+A_0)I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \right. \\
& \left. \left\{ -\eta + \frac{1}{2} l Q_0 - \frac{1}{2} l R_1 - \eta \frac{I_1}{I_2} + l \left\{ \frac{1}{2} \frac{l}{(1+A_0)^2} - \frac{2\eta}{I_2(1+A_0)} \right\} \right\} \right\} \\
& \sqrt{\frac{\sqrt{A_0}}{\gamma}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{33} = & A_{31}M_{13} + A_{32}M_{23} = \\
& \left\{ I_2 \left[2I_w l + \frac{1}{2} I_2 l^2 \right] 1/ [I_1 I_w + A_0 I_1 I_w + I_2 I_w + A_0 I_2 I_w + \right. \\
& + \frac{1}{2} I_1 I_2 l + \frac{1}{2} A_0 I_1 I_2 l + 2I_w l + \frac{1}{2} I_2 l^2 \left. \right]^2 \left\{ P_1 - p_c + \frac{Q_0^2}{2} + \right. \\
& - \frac{Q_0^2}{2A_0^2} - Q_0 R_1 - P(A_0) - \frac{I_1}{I_2} [p_c - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] + \\
& l \left\{ \frac{2Q_0}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{(1+A_0)I_2} [p_c - Q_0 R_2 + f(A_0) Q_0^2 + P(A_0)] \right\} + \\
& - \frac{l Q_0 R(A_0)}{4A_0} \left. \right\} + 1/ \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2l I_w}{(1+A_0)I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \\
& \left\{ + \frac{Q_0^2}{A_0^3} - P'(A_0) + \frac{I_1}{I_2} [Q_0^2 f'(A_0) - P'(A_0)] + l \left\{ - \frac{4Q_0}{(1+A_0)^3} + \right. \right. \\
& \frac{2}{I_2(1+A_0)^2} [p_c + P(A_0) - R_2 Q_0 + f(A_0) Q_0^2] + \\
& - \frac{2}{I_2(1+A_0)} [Q_0^2 f'(A_0) + P'(A_0)] \left. \right\} + \frac{1}{4A_0^2} [l Q_0 R(A_0) + \\
& - l A_0 Q_0 R'(A_0)] \left. \right\} \frac{Q_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2} + Q_0^2 \sigma_2}} + \\
& \left\{ + 1/ \left[\frac{I_1 I_w}{I_2} + \frac{1}{2} l I_1 + I_w + \frac{2l I_w}{(1+A_0)I_2} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{1+A_0} \right] \right. \\
& \left\{ Q_0 - R_1 - \frac{Q_0}{A_0^2} + \frac{I_1}{I_2} [R_2 - 2Q_0 f(A_0)] + \right. \\
& + l \left\{ + \frac{2}{(1+A_0)^2} - \frac{2}{I_2(1+A_0)} [-R_2 + 2Q_0 f(A_0)] \right\} + \\
& + \frac{1}{4A_0^2} [-l A_0 R(A_0)] \left. \right\} \left. \right\} \left\{ - \frac{\sigma_1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2} + Q_0^2 \sigma_2}} \right\}; \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Riprendendo per praticità l'analisi con l'utilizzo dei termini simbolici, sviluppando la (4.23) si ottiene:

$$\begin{bmatrix} ax_3 \\ bx_3 \\ c(x_1 + x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x_1 + x_2) \\ i(x_1 + x_2) + lx_3 \\ m(x_1 + x_2) + nx_3 \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Con questa operazione si ottiene l'eliminazione del termine di primo grado nell'espressione dell'energia totale (4.6), (4.7):

$$\frac{E_{TOT}}{\rho U_0^2} = E_0 + \varepsilon^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2) = E_0 + \varepsilon^2 E_2; \tag{4.30}$$

Ed è possibile esprimere in termine E_2 in forma quadratica:

$$E_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = X^T C X; \quad (4.31)$$

A questo punto il termine E_2 può essere ricondotto all'espressione della norma-2 se viene effettuata un'ulteriore sostituzione di variabili:

$$q_1 = x_1 + x_2; \quad (4.32)$$

$$q_2 = x_3;$$

Ed E_2 diventa:

$$E_2 = q_1^2 + q_2^2 = \|\{q_1, q_2\}\|^2 = \|\vec{q}\|^2; \quad (4.33)$$

Si è cioè eliminato il termine al di fuori della diagonale. Effettuando la sostituzione si ottiene:

$$\begin{bmatrix} a\dot{q}_2 \\ b\dot{q}_2 \\ c\dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hq_1 \\ iq_1 + lq_2 \\ mq_1 + nq_2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

È possibile combinare le prime due righe:

$$\dot{q}_2 = \frac{h}{a}q_1 = \frac{i}{b}q_1 + \frac{l}{b}q_2;$$

$$q_2 = \left(\frac{h}{a} - \frac{i}{b}\right) \frac{b}{l}q_1;$$

$$q_1 = \left(\frac{1}{\frac{h}{a} - \frac{i}{b}}\right) \frac{l}{b}q_2;$$

Estendendo la sostituzione al (4.34) si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{m}{c} + \left(\frac{h}{a} - \frac{i}{b}\right) \frac{b}{l}\right] & 0 \\ 0 & \left[\frac{hl}{ab} \left(\frac{1}{\frac{h}{a} - \frac{i}{b}}\right)\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{q}} \end{bmatrix} = [F] [\vec{q}];$$

4.3 Analisi dei risultati

In entrambi i casi studiati la matrice $[F]$ risulta di tipo diagonale. Ciò condurrebbe alla conclusione che non esista alcun tipo di scambio energetico tra fluido e parete. È chiaro che questo risulta essere un difetto del modello studiato, probabilmente dovuto alla sua semplicità di formulazione. È quindi doveroso dotarsi di spirito critico nell'analisi di questo risultato.

Da numerosi studi, infatti, son noti meccanismi di interazione tra parete e fluido, tra i quali si cita lo sloshing, già introdotto al punto (2.4.2) che descrive come, nelle oscillazioni, il moto della parete crei degli scambi di flussi tra segmenti rigidi ed elastico. Il fatto che questo fenomeno venga studiato attraverso modelli bidimensionali potrebbe far pensare alla necessità di applicare l'analisi di stabilità non normale a modelli più sofisticati per evitare di ottenere delle matrici singolari.

Capitolo 5

Applicazione di forzanti periodiche

5.1 Introduzione

Dopo aver effettuato le analisi di stabilità asintotiche e non normali è sorta la curiosità di capire quale fosse la reazione del modello all'applicazione di forzanti periodiche. Infatti fino a questo momento si è studiato il comportamento del sistema in casi in cui i set di parametri utilizzati si mantenessero costanti nel tempo. Considerando la stretta connessione tra il comportamento assunto dai tubi collassabili e i vasi venosi del nostro sistema corporeo, si è pensato di far variare sinusoidalmente le forzanti che meglio riproducessero il funzionamento del sistema cardiocircolatorio. Il comportamento assunto dalle variabili principali è stato ricavato tramite l'integrazione del modello originario (non linearizzato) in quanto si è pensato che potessero assumere un aspetto rilevante i termini che normalmente vengono trascurati con la linearizzazione.

I parametri scelti son stati la pressione nella camera p_c e la resistenza nel tubo rigido di monte R_1 .

La pressione nella camera p_c svolge un ruolo importante in quanto rappresenta la pressione applicata esternamente al vaso. Infatti i vasi sanguigni sono circondati e connessi da una guaina continua detta perivascolare. Lo spazio compreso tra la suddetta guaina e la parete del vaso è saturato da un fluido che risulta avere una pressione differente rispetto a quella del sangue all'interno del vaso.

La resistenza del tubo rigido di monte R_1 risulta strettamente correlata alla

pressione di monte p_1 tramite la relazione:

$$P_1 - p_1 = R_1 u_1 + I_1 \frac{du_1}{dt}; \quad (2.8)$$

che rappresenta l'equazione della conservazione della quantità di moto nei tubi rigidi. Quindi tramite il parametro di resistenza R_1 è possibile controllare la pressione all'interno del vaso prima che si raggiunga la costrizione.

Per realizzare delle simulazioni il più conformi possibili si è scelto di far variare i parametri scelti attraverso una legge sinusoidale di questo tipo:

$$k(t) = k_0 \left[1 + \delta \sin \left(\frac{2\pi}{T_0} t \right) \right] \quad (5.1)$$

In cui:

- k_0 rappresenta il valore che il parametro assume nel caso stazionario.
- δ rappresenta l'ampiezza da far assumere volta per volta al termine sinusoidale. In questa trattazione si utilizzano tre valori di δ , rispettivamente 0.1, 0.3, 0.5.
- T_0 rappresenta il periodo di riferimento adimensionalizzato.

Per quanto riguarda l'ultimo termine menzionato, T_0 , questo è stato ottenuto effettuando l'adimensionalizzazione del periodo \hat{T}_0 che rappresenta il periodo di pompaggio del sistema cardiaco. Questo periodo solitamente oscilla tra i 0.7:1.0 secondi e in questa trattazione si è scelto di considerare il valore $\hat{T}_0 = 0.7$.

Si è proceduto poi all'adimensionalizzazione, utilizzando le grandezze scala scelte in precedenza per il presente modello. In particolare:

$$T_0 = \hat{T}_0 \frac{\hat{U}_0}{\hat{a}_0} = 0.7s \frac{0.15m/s}{0.63 \cdot 10^{-2}m} = 16.67 \quad (5.2)$$

A questo punto si analizzano i risultati ottenuti per le diverse configurazioni trattate.

5.2 Effetto della forzante periodica p_c

Si consideri la pressione della camera p_c e la si faccia variare con legge sinusoidale rispetto al valore assunto nel caso stazionario. La legge utilizzata è la seguente:

$$p_c(t) = p_{c0} \left[1 + \delta \sin \left(\frac{2\pi}{T_0} t \right) \right]$$

Dove:

- p_{c0} rappresenta il valore che la pressione assume nel caso stazionario.
- δ rappresenta l'ampiezza da far assumere volta per volta al termine sinusoidale.
In questa trattazione si utilizzano tre valori di δ , rispettivamente 0.1, 0.3, 0.5.
- T_0 rappresenta il periodo di riferimento adimensionalizzato (pari a 16.67).

Per $p_{c0} = 200$ si ottengono gli andamenti rappresentati in Figura 1.

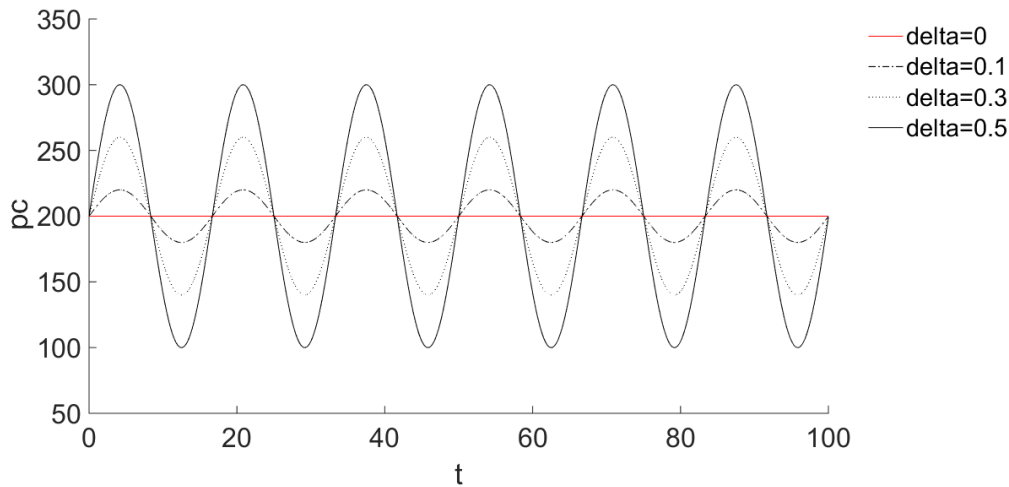


Figura 5.1: *Comportamento della forzante pc per diversi valori di δ .*

Si esplori a questo punto il comportamento assunto da due delle variabili principali, l'area A e la velocità u_2 , per i set di parametri indicati da Pedley nella sua trattazione sulla stabilità asintotica del sistema.

Nel primo caso di studio (caso 1) i parametri assumono i seguenti valori:

- $p_{c0} = 200$;
- $\beta = 1$;
- $P_0 = 4$;
- $P_1 = 259$;
- $R_2 = 150$.

Integrando il sistema principale per $\delta = 0.1, 0.3, 0.5$ si ottengono i seguenti andamenti delle variabili principali A e u_2 .

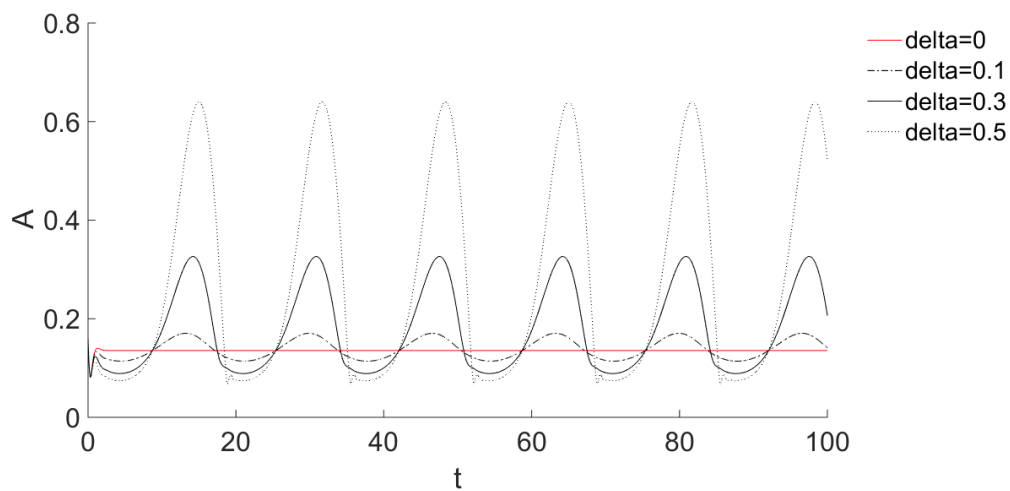


Figura 5.2: *Caso 1 : Comportamento della variabile principale A per sistema sottoposto a forzante sinusoidale p_c . In rosso i valori assunti dalla variabile nel caso stazionario.*

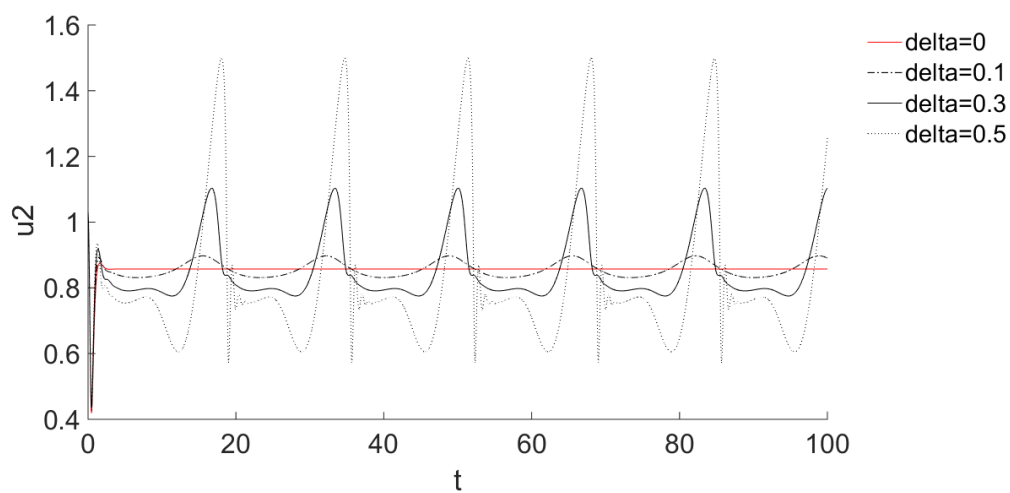


Figura 5.3: *Caso 1 : Comportamento della variabile principale u_2 per sistema sottoposto a forzante sinusoidale p_c . In rosso i valori assunti dalla variabile nel caso stazionario.*

Nel secondo caso di studio (caso 2) i parametri assumono i seguenti valori:

- $p_{c0} = 200$;
- $\beta = 1$;
- $P_0 = 4$;

- $P_1 = 259$;
- $R_2 = 75$.

Integrando il sistema principale per $\delta = 0.1, 0.3, 0.5$ si ottengono i seguenti andamenti delle variabili principali A e u_2 .

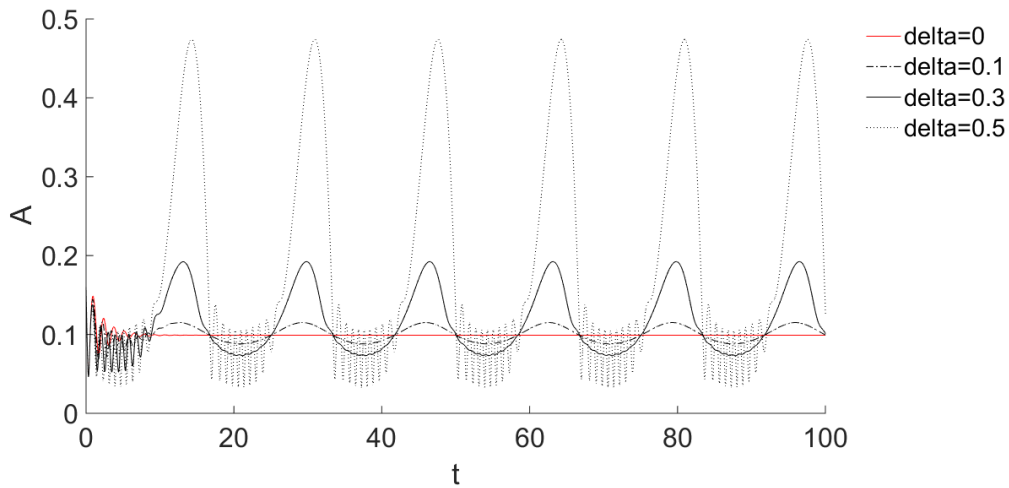


Figura 5.4: *Caso 2 : Comportamento della variabile principale A per sistema sottoposto a forzante sinusoidale pc . In rosso i valori assunti dalla variabile nel caso stazionario.*

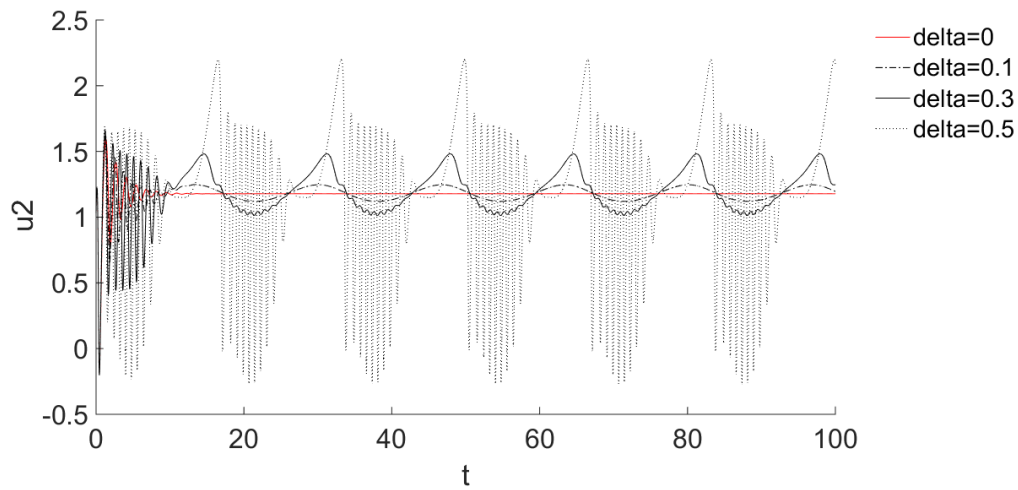


Figura 5.5: *Caso 2 : Comportamento della variabile principale u_2 per sistema sottoposto a forzante sinusoidale p_c . In rosso i valori assunti dalla variabile nel caso stazionario.*

Infine si tratti il terzo caso (caso 4) e si proceda come in precedenza. I parametri assumono le seguenti caratteristiche:

- $p_{c0} = 180$;
- $\beta = 1$;
- $P_0 = 1$;
- $P_1 = 259$;
- $R_2 = 170$.

In questa situazione la forzante p_c si assume i seguenti valori, in quanto varia il parametro p_{c0} :

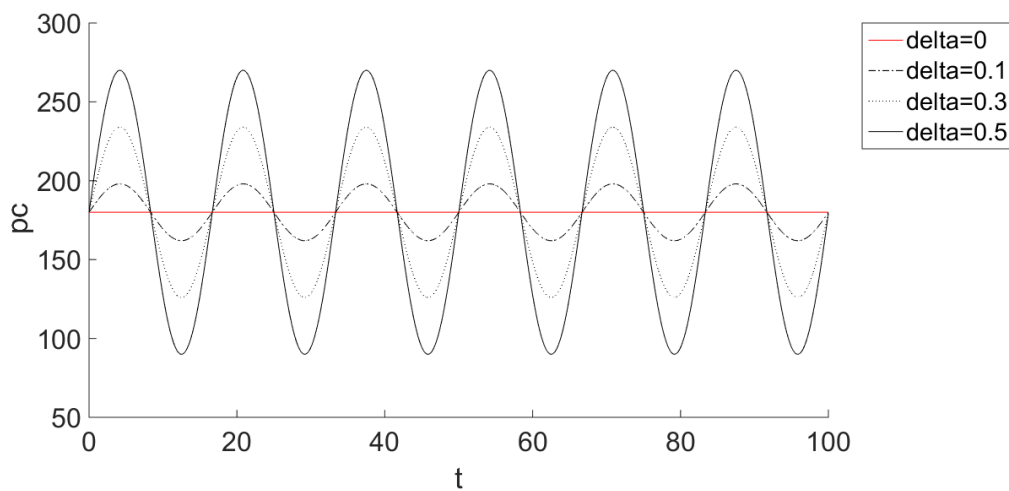


Figura 5.6: *Comportamento della forzante pc per diversi valori di δ .*

Tramite l'integrazione del sistema si ottengono gli andamenti delle variabili principali A e u_2 .

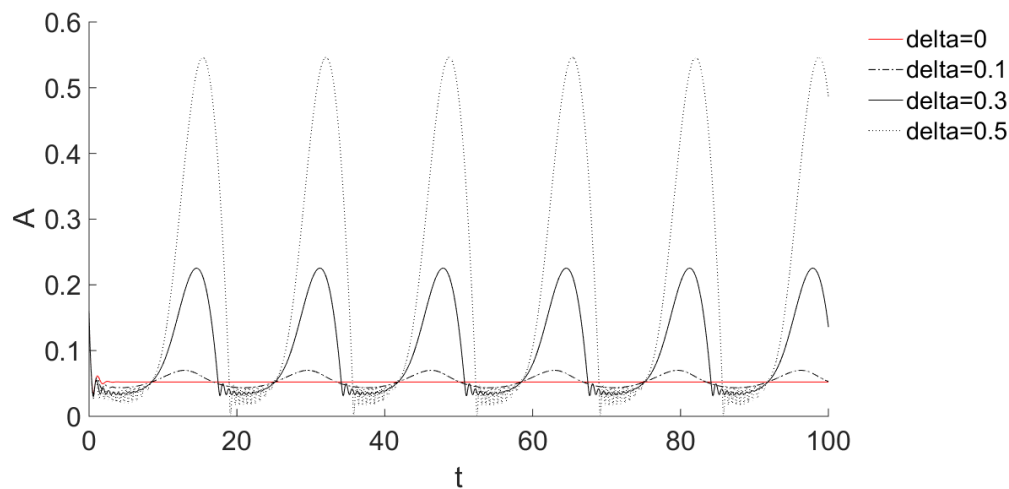


Figura 5.7: *Caso 4 : Comportamento della variabile principale A per sistema sottoposto a forzante sinusoidale pc . In rosso i valori assunti dalla variabile nel caso stazionario.*

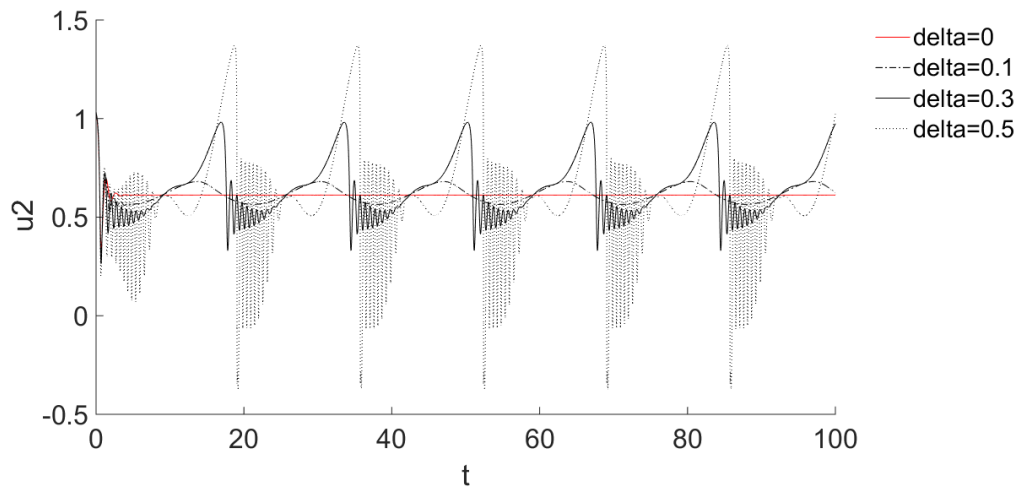


Figura 5.8: *Caso 4* : Comportamento della variabile principale u_2 per sistema sottoposto a forzante sinusoidale pc . In rosso i valori assunti dalla variabile nel caso stazionario.

5.3 Effetto della forzante periodica R_1

Si consideri ora la resistenza della tubazione rigida a monte R_1 e la si faccia variare con legge sinusoidale rispetto al valore assunto nel caso stazionario. La legge utilizzata è la seguente:

$$R_1(t) = R_{10} \left[1 + \delta \sin \left(\frac{2\pi}{T_0} t \right) \right]$$

Dove:

- R_{10} rappresenta il valore che la resistenza assume nel caso stazionario.
- δ rappresenta l'ampiezza da far assumere volta per volta al termine sinusoidale. In questa trattazione si utilizzano tre valori di δ , rispettivamente 0.1, 0.3, 0.5.
- T_0 rappresenta il periodo di riferimento adimensionalizzato (pari a 16.67).

Per $R_{10} = 150$ si ottengono gli andamenti rappresentati qui di seguito.

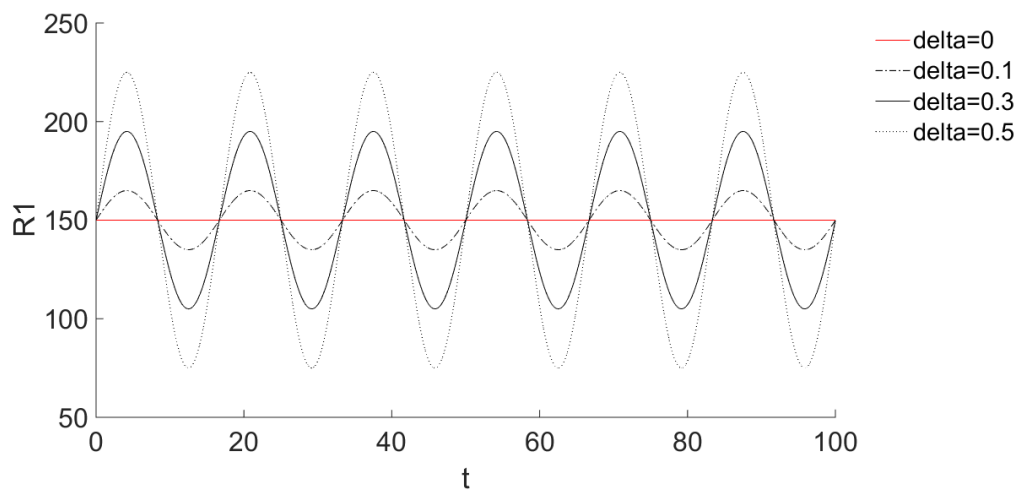


Figura 5.9: *Comportamento della forzante R_1 per diversi valori di δ .*

Si proceda come nel caso in cui la forzante era pc e si analizzino i casi a, b ed e trattati da Pedley, i cui valori dei parametri sono già stati ricordati in precedenza.

I valori assunti dalle variabili principali A e u_2 ottenuti tramite l'integrazione del sistema per il set di parametri del caso a sono i seguenti:

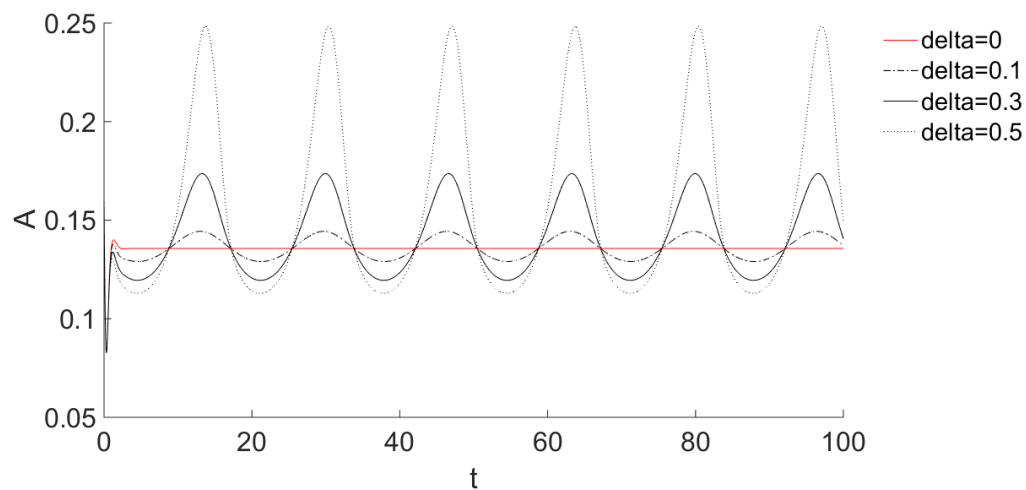


Figura 5.10: *Caso 1 : Comportamento della variabile principale A per sistema sottoposto a forzante sinusoidale R_1 . In rosso i valori assunti dalla variabile nel caso stazionario.*

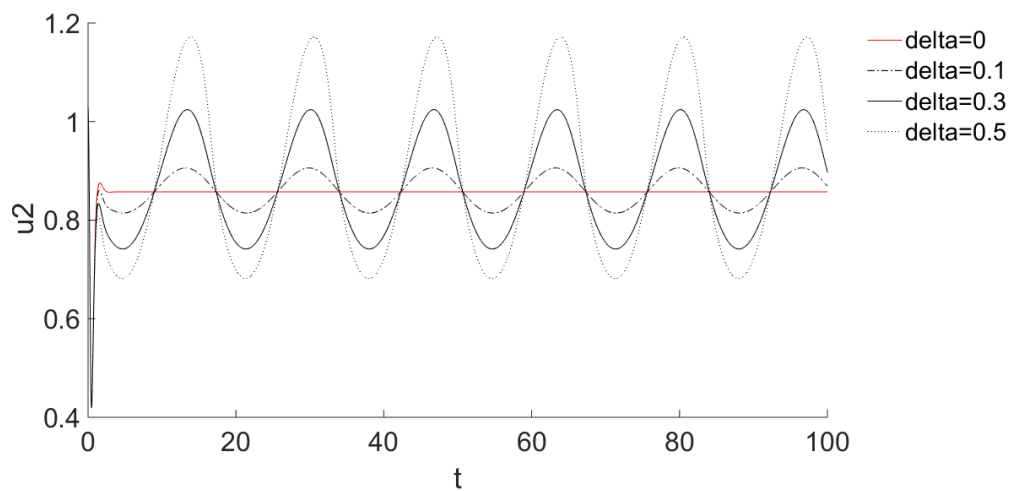


Figura 5.11: *Caso 1* : Comportamento della variabile principale u_2 per sistema sottoposto a forzante sinusoidale R_1 . In rosso i valori assunti dalla variabile nel caso stazionario.

Per il caso 2, invece, la forzante R_1 assume dei valori differenti rispetto al caso precedente in quanto $R_{10} = 75$.

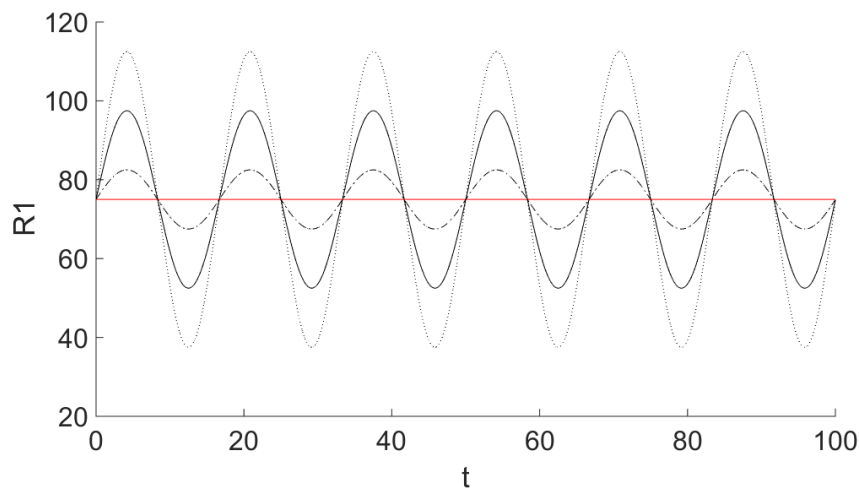


Figura 5.12: Comportamento della forzante R_1 per diversi valori di δ .

Integrando il sistema per il nuovo set di parametri si ottiene:

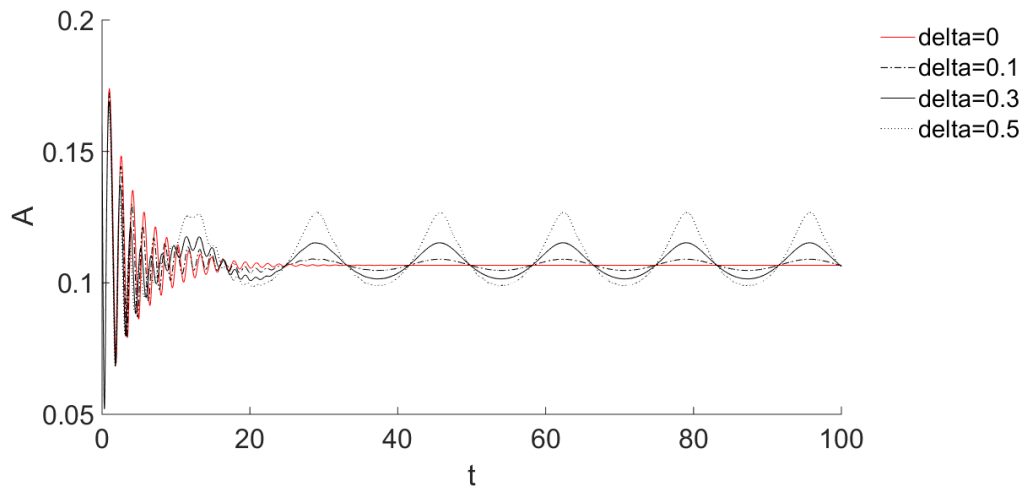


Figura 5.13: *Caso 2* : Comportamento della variabile principale A per sistema sottoposto a forzante sinusoidale R_1 . In rosso i valori assunti dalla variabile nel caso stazionario.

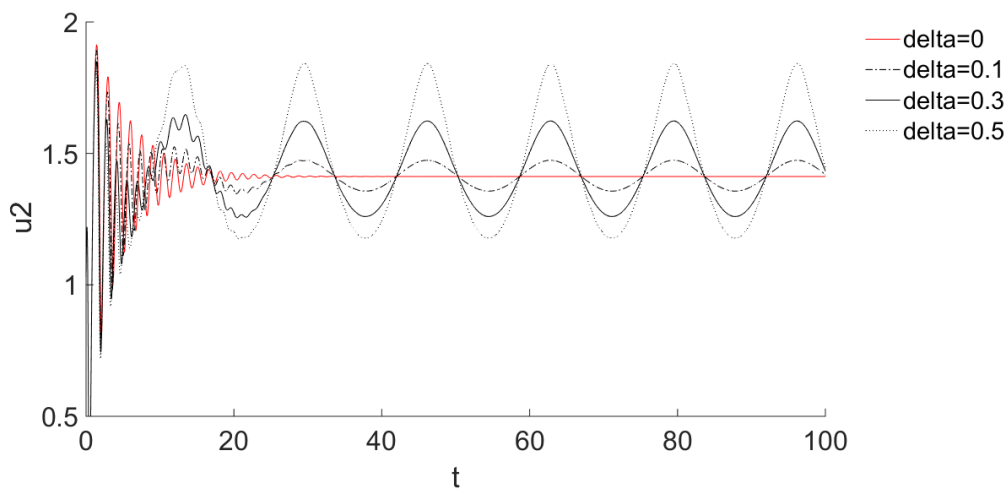


Figura 5.14: *Caso 2* : Comportamento della variabile principale u_2 per sistema sottoposto a forzante sinusoidale R_1 . In rosso i valori assunti dalla variabile nel caso stazionario.

Infine nell'ultimo caso trattato (caso 4) la forzante R_1 assume dei valori ancora differenti in quanto $R_{10} = 170$.

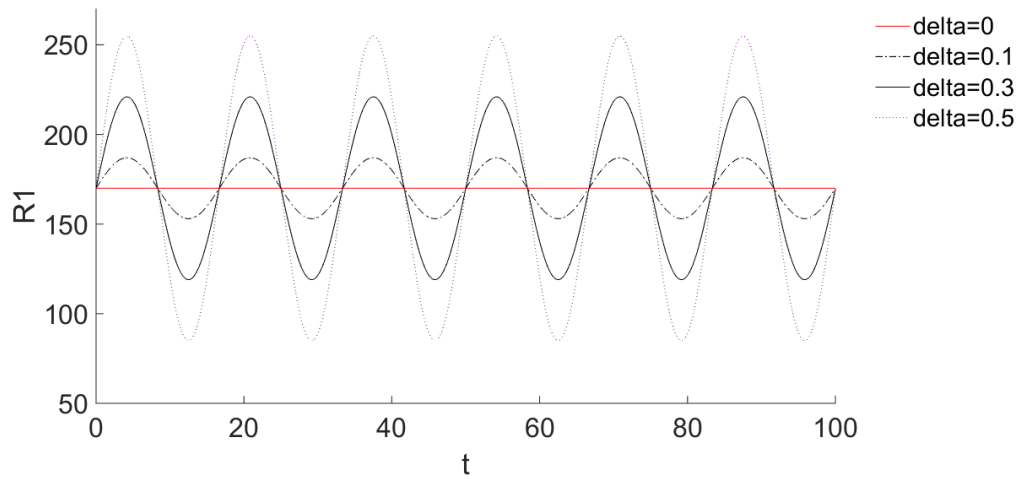


Figura 5.15: *Comportamento della forzante R_1 per diversi valori di δ .*

Integrando il sistema per il nuovo set di parametri si ottiene:

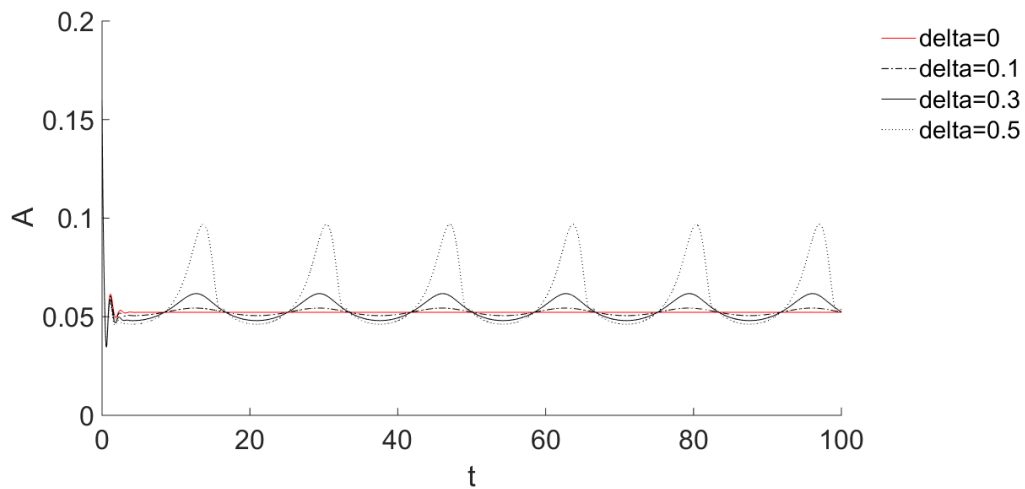


Figura 5.16: *Caso 4 : Comportamento della variabile principale A per sistema sottoposto a forzante sinusoidale R_1 . In rosso i valori assunti dalla variabile nel caso stazionario.*

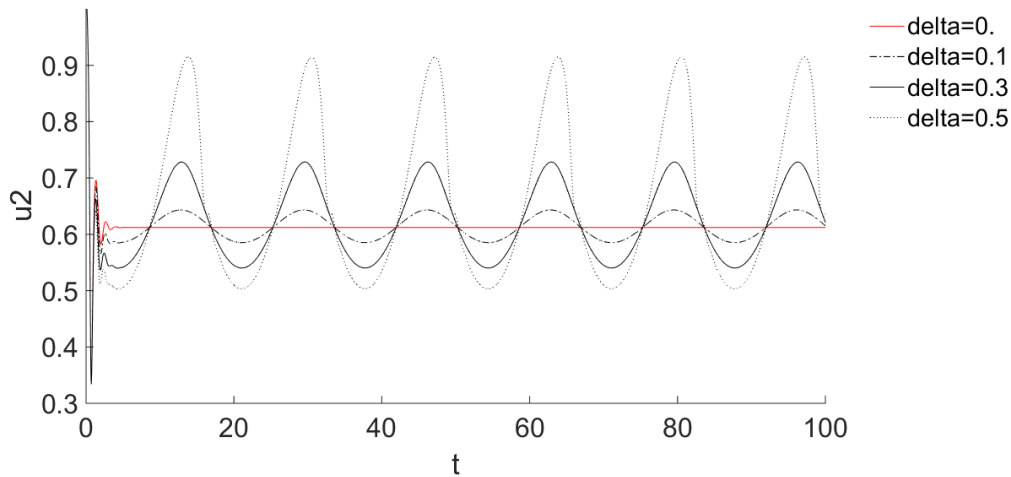


Figura 5.17: *Caso 4* : Comportamento della variabile principale u_2 per sistema sottoposto a forzante sinusoidale R_1 . In rosso i valori assunti dalla variabile nel caso stazionario.

5.4 Analisi dei risultati

Le variabili principali mantengono lo stesso periodo della forzante applicata e in alcuni casi è possibile individuare la comparsa di fluttuazioni che si presentano anch'esse con il medesimo periodo della forzante. L'applicazione di sollecitazioni sinusoidali non conduce il sistema, che, per i set di parametri trattati in questo capitolo, nel caso stazionario presentava una configurazione stabile, a situazioni di instabilità. Ciò risulta in accordo coi risultati ottenuti per questo modello tramite l'analisi non normale, la quale ha sancito l'impossibilità di nascita di crescite transitorie per tempi finiti che possano portare a instabilità.

Capitolo 6

Conclusioni

La tesi svolta ha avuto lo scopo di investigare la stabilità dei tubi collassabili sottoposti a diverse condizioni parametriche. Si è fatto uso del *lumped parameter model* introdotto da Pedley nel 1978. Il vantaggio dell'uso di questo sistema, costituito da equazioni differenziali di terzo grado, consiste nella semplicità che si ritrova nell'utilizzare dei metodi matematici complessi.

Il primo obiettivo perseguito è stato quello di verificare i risultati ottenuti da Pedley nelle sue computazioni sulla stabilità asintotica. Tramite la riformulazione del modello originario, si sono ripercorse le simulazioni effettuate dallo studioso e si sono confrontati i risultati ottenuti con quelli da egli riportati.

Poiché nel presente modello non vengono considerate le caratteristiche inerziali e viscoelastiche della tubazione, si è proceduto alla definizione di questi parametri, con l'obiettivo di implementarli nel modello originario e poter ristudiare la stabilità asintotica in queste condizioni. In questo modo si è potuto realizzare un confronto tra i risultati della presente computazione e di quella esplicita in precedenza. Le computazioni effettuate nei due casi conducono a risultati simili, dimostrando l'adeguatezza della decisione di Pedley di trascurare questi termini, i quali provocano unicamente una diminuzione del livello di robustezza del modello.

La parte successiva del lavoro ha avuto come obiettivo quello di studiare la non normalità del modello originario e di quello modificato comprendente caratteristiche inerziali e viscoelastiche. La non normalità risulta strettamente correlata all'energia delle perturbazioni imposte al sistema. In entrambi i casi studiati la matrice in studio

risulta essere di tipo diagonale e ciò condurrebbe alla conclusione che non esista alcun tipo di scambio energetico tra fluido e parete. È chiaro che questo risulta essere un difetto del modello studiato, probabilmente dovuto alla sua semplicità di formulazione. È quindi doveroso dotarsi di spirito critico nell'analisi di questo risultato, in quanto da numerosi studi reperibili in letteratura è noto che esistono dei meccanismi dovuti proprio all'interazione energetica tra parete del tubo e fluido.

Infine, per avere una visione completa del comportamento del modello, si è deciso di sottoporlo a delle forzanti che presentassero legge sinusoidale, ricadendo in un caso in cui il sistema risulta in regime non stazionario. Pensando di simulare il comportamento dei vasi venosi del nostro sistema corporeo, si è scelto di far variare sinusoidalmente le forzanti che meglio riproducessero il funzionamento dell'apparato cardiocircolatorio e di osservare il differente comportamento delle variabili principali rispetto al caso stazionario. Queste sono state ricavate tramite l'integrazione del modello originario non lineare, in quanto si è pensato che potessero assumere un aspetto rilevante i termini che normalmente vengono trascurati con la linearizzazione. Le variabili principali mantengono lo stesso periodo della forzante applicata e in alcuni casi è possibile individuare la comparsa di fluttuazioni che si presentano anch'esse con il medesimo periodo della forzante. L'applicazione di sollecitazioni sinusoidali non conduce il sistema, che, per i set di parametri trattati in questo capitolo, nel caso stazionario presentava una configurazione stabile, a situazioni di instabilità. Ciò risulta in accordo coi risultati ottenuti per il presente modello tramite l'analisi non normale, la quale ha sancito l'impossibilità di nascita di crescite transitorie per tempi finiti che possano portare a instabilità.

Bibliografia

Adolph, I., Katz, Yu, C., Augusto, H., 1969. *Flow through a collapsible tube. Experimental analysis and mathematical model*, Biophysical Journal, Volume 9.

Bertram, C.D., Pedley, T.J., 1982. *A mathematical model of unsteady collapsible tube behaviour*, Journal of Biomechanics, Volume 15, Issue 1, Pages 39-50.

Bertram, C.D., Godbole, S.A., 1997. *LDA measurements of velocities in a simulated collapsed tube*, J. Biomech. Eng.-Trans. ASME, 119, Pages 357-63.

Bertram, C.D., Castles, R.J., 1999. *Flow limitation in uniform thick-walled collapsible tubes*, J. Fluid Struct., 13, Pages 399-418.

Bertram, C.D., Truong, N., Hall, S.D., 2008. *PIV measurements of the flow field just downstream of an oscillating collapsible tube*, J. Biomech. Eng., 130:061011.

Bull, J.L., Reickert, C.A., Tredici, S., Komori, E., Frank, E.L., et al., 2005. *Flow limitation in liquid-filled lungs: effects of liquid properties*, J. Biomech. Eng., 127, Pages 630-36.

Camporeale, C.V., Ridolfi, L., 2009. *Nonnormality and transient behaviour of the Saint Venant Exner equations*, Water Resour. Res. 45, W08418-W08418.

Cancelli, C., Pedley, T.J., 1985. *A separated-flow model for collapsible-tube oscillations*, J. Fluid Mech., 157, Pages 375-404.

Carpenter, P.W., Garrad, A.D., 1985. *The hydrodynamic instability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 1. Tollmien-Schlichting instabilities*, Journal of Fluid Mechanics, 155, Pages 465-510.

Carpenter, P.W., Garrad, A.D., 1986. *The hydrodynamic instability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 2. Flow-induced surface instabilities*, Journal of Fluid Mechanics, 170, Pages 199-232.

Conrad, William, A., 1969. *Pressure-Flow Relationships in Collapsible Tubes*, Biomedical Engineering.

Doare, O., de Langre, E., 2004. *Local and global instability of fluid-conveying pipes on elastic foundations*, J. Fluid Struct., 16, Pages 1-14.

Doare, O., de Langre, E., 2006. *The role of boundary conditions in the instability of one-dimensional systems*, Eur. J. Mech. B Fluids, 25, Pages 948-59.

Flaherty, J.E., Keller, J.B., Rubinow, S.I., 1972. *Postbuckling behavior of elastic tubes and rings with opposite sides in contact*, SIAM J. Appl. Math., 23, Pages 446-55.

Fullana, J.M., Zaleski, S., 2009. *A branched one-dimensional model of vessel networks*, J. Fluid Mech., 621, Pages 183-204.

Gavriely, N., Shee, T.R., Cugell, D.W., Grotberg, J.B., 1989. *Flutter in flow-limited collapsible tubes. A mechanism for generation of weezes*, J. Appl. Physiol., 66, Pages 2251-61.

Grotberg, J.B., Jensen, O.E., 2004. *Biofluid mechanics in flexible tubes*, Annu. Rev. Fluid Mech., 36, Pages 121-47.

Hayashi, S., Hayase, T., Kawamura, H., 1998. *Numerical analysis for stability and self-excited oscillation in collapsible tube flow*, J. Biomech. Eng.-Tran. ASME, 120, Pages 468-75.

Hazel, A.L., Heil, M., 2003. *Three-dimensional airway reopening: the steady propagation of a semi-infinite bubble into a buckled elastic tube*, J. Fluid Mech., 478, Pages 47-70.

Hazel, A.L., Heil, M., 2003. *Steady finite Reynolds-number flows in three-dimensional collapsible tubes*, J. Fluid Mech., 486, Pages 79-103.

- Heil, M., 1997. *Stokes flow in collapsible tubes: computation and experiment*, J. Fluid Mech., 353, Pages 285-312.
- Heil, M., Jensen, O.E., 2003. *Flows in deformable tubes and channels: theoretical models and biological applications*, See Pedley and Carpenter 2003, Pages 15-49.
- Heil, M., Hazel, A.L., 2011. *Fluid-Structure Interaction in Internal Physiological Flows*, Annual Review of Fluid Mechanics, 43, Pages 141-62.
- Heil, M., Waters, S.L., 2006. *Transverse flows in rapidly oscillating, elastic cylindrical shells*, J. Fluid Mech., 547, Pages 185-214.
- Heil, M., Waters, S.L., 2008. *How rapidly oscillating collapsible tubes extract energy from a viscous mean flow*, J. Fluid Mech., 601, Pages 199-227.
- Heil, M., Pedley, T.J., 1996. *Large post-buckling deformations of cylindrical shells conveying viscous flow*, J. Fluid Struct., 10, Pages 565-99.
- Hoepffner, J., Bottaro, A., Favier, J., 2010. *Mechanism of non-modal energy amplification in channel flow between compliant walls*, J. Fluid Mech., 642, Pages 489-507.
- Jensen, O.E., 1990. *Instability of flow in a collapsed tube*, J. Fluid Mech., 220, Pages 623-59.
- Jensen, O.E., 1992. *Chaotic oscillations in a simple collapsible tube model*, J. Biomech. Eng.-Tran. ASME, 114, Pages 55-59.
- Jensen, O.E., Heil, M., 2003. *High-frequency self-excited oscillations in a collapsible-channel flow*, J. Fluid Mech., 481, Pages 235-68.
- Liu, H.F., Luo, X.Y., Cai, Z.X., Pedley, T.J., 2009, *Sensitivity of unsteady collapsible channel flows to modelling assumptions*, Commun. Numer. Methods Eng., 25, Pages 483-504.
- Luo, H., Mittal, R., Zheng, X., Bielamowicz, S.A., Walsh, R.J., Hahn, J.K., 2008a. *An immersed-boundary method for flow-structure interaction in biological systems with application to phonation*, J. Comput. Phys., 227, Pages 9303-32.

- Luo, X.Y., Cai, Z.X., Li, W.G., Pedley, T.J., 2008b. *The cascade structure of linear instability in collapsible channel flows*, J. Fluid Mech., 600, Pages 45-76.
- Luo, X.Y., Pedley, T.J., 1996. *A numerical simulation of unsteady flow in a two-dimensional collapsible channel*, J. Fluid Mech., 314, Pages 191-225.
- Luo, X.Y., Pedley, T.J., 1998. *The effect of wall inertia on flow in a two-dimensional collapsible channel*, J. Fluid Mech., 363, Pages 253-80.
- Luo, X.Y., Pedley, T.J., 2000. *Multiple solutions and flow limitation in collapsible channel flows*, J. Fluid Mech., 420, Pages 301-24.
- Manuilovich, S.V., 2004. *Propagation of a Tollmien-Schlichting wave over the junction between rigid and compliant surfaces*, Fluid Dyn., 39, Pages 702-17.
- Pedley, T.J., 1978. *The fluid mechanics of large blood vessels*, Cambridge University Press.
- Pedley, T.J., Luo, X.Y., 1998. *Modelling flow and oscillations in collapsible tubes*, Theor, Comput. Fluid Dyn., 10, Pages 277-94.
- Pedley, T.J., Carpenter, P.W., eds 2003. *Flows in collapsible tubes and past other highly compliant boundaries*, Dordrecht: Kluwer.
- Pedley, T.J., Stephanoff, K.D., 1985. *Flow along a channel with a time-dependent indentation in one wall: the generation of vorticity waves*, J. Fluid Mech., 160, Pages 337-67.
- Rosenfeld, M., 1995. *A numerical study of pulsating flow behind a constriction*, J. Fluid Mech., 301, Pages 203-23.
- Shapiro, A.H., 1977a. *Physiologic and medical aspects of flow in collapsible tubes*, Proc. 6th Can. Congr. Appl. Mech., Vancouver.
- Shapiro, A.H., 1977b. *Steady flow in collapsible tubes*, J. Biomech. Eng.-Trans. ASME, 99, Pages 126-47.

Shim, E.B., Kamm, R.D., 2002. *Numerical simulation of steady flow in a compliant tube or channel with tapered wall thickness*, J. Fluid Struct., 16, Pages 1009-27.

Stewart, P.S., Waters, S.L., Jensen, O.E., 2009. *Local and global instabilities of flow in a flexible-walled channel*, Eur. J. Mech. B Fluids, 28, Pages 541-47.

Stewart, P.S., Heil, M., Waters, S.L., Jensen, O.E., 2010. *Sloshing and slamming oscillations in collapsible channel flow*, J. Fluid Mech.

Ur, A., Gordon, M., 1970. *Origin of Korotkoff sounds*, Am. J. Physiol., 218, Pages 524-529.

Venugopal, A.M., Quick, C.M., Laine, G.A., Stewart, R.H., 2009 *Optimal postnodal lymphatic network structure that maximizes active propulsion of lymph*, Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol. 296:H303-9.

Whittaker, R.J., Heil, M., Jensen, O.E., Waters, S.L., 2010a. *Predicting the onset of high-frequency self-excited oscillations in elastic-walled tubes*, Proc. R. Soc. A. In press; doi:10.1098/rspa.2009.0641.

Whittaker, R.J., Heil, M., Jensen, O.E., Waters, S.L., 2010b. *A rational derivation of a tube law from shell theory*, Q. J. Mech. Appl. Math. In press; doi:10.1093/qjmam/hbq020.

Whittaker, R.J., Waters, S.L., Jensen, O.E., Boyle, J., Heil, M., 2010c. *The energetics of flow through a rapidly oscillating tube. Part I: general theory*, J. Fluid Mech., 648, Pages 83-121.