

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea

## **Analisi statistica e modellistica di flussi turbolenti**



**Relatori:**

Ing. Stefania Scarsoglio

Prof. Renzo Arina

**Candidato:**

Marco Zurlo



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Le basi della turbolenza</b>	<b>2</b>
1.1 Scale e cascata di energia.....	3
1.2 Le ipotesi di Kolmogorov.....	3
1.3 Analisi statistica dei flussi turbolenti: le funzioni di struttura.....	6
1.4 Funzioni di autocorrelazione.....	8
<b>2 Analisi DNS e descrizione del database</b>	<b>9</b>
2.1 Introduzione alla DNS e descrizione del JHTD.....	9
2.2 Analisi statistica classica.....	13
<b>3 Analisi LES e filtraggio spaziale</b>	<b>20</b>
3.1 Introduzione alla LES e al metodo del filtraggio.....	20
3.2 Il filtro box.....	23
3.3 Campo di moto governato da effetti di galleggiabilità e filtro Favre.....	26
<b>4 Conclusioni</b>	<b>30</b>
<b>Appendice A Codici: pre-processing e analisi statistica classica</b>	<b>31</b>
<b>Appendice B Codici: filtraggio standard e filtraggio con effetti di galleggiabilità</b>	<b>38</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>49</b>

# Lista delle figure

Fig. 1: rappresentazione delle varie scale dimensionali e degli intervalli per Re sufficientemente alti.....	6
Fig. 2: rappresentazione delle componenti di velocità coinvolte nella definizione delle funzioni di struttura longitudinali e trasversali per $\mathbf{r} = \mathbf{e}_1\mathbf{r}$ .....	7
Fig.3: interfaccia della sezione “Download Data Cutout” .....	11
Fig.4: 500x500, z=100. La mappa a colori indica la componente lungo z della velocità mentre i vettori indicano direzione e verso sul piano xy.....	11
Fig.5: 500x500, z=200. La mappa a colori indica la componente lungo z della velocità mentre i vettori indicano direzione e verso sul piano xy.....	12
Fig.6: 500x500, z=300. La mappa a colori indica la componente lungo z della velocità mentre i vettori indicano direzione e verso sul piano xy.....	12
Fig.7: 500x500, z=400. La mappa a colori indica la componente lungo z della velocità mentre i vettori indicano direzione e verso sul piano xy.....	13
Fig.8: correlazione due punti R11 .....	13
Fig.9: funzione di autocorrelazione longitudinale f(u) con $r=e1*\mathbf{r}$ .....	14
Fig.10: funzione di autocorrelazione trasversale g(v) con $r=e1*\mathbf{r}$ .....	15
Fig.11: funzione di autocorrelazione longitudinale f(v) con $r=e2*\mathbf{r}$ .....	15
Fig.12: funzione di autocorrelazione trasversale g(u) con $r=e2*\mathbf{r}$ .....	16
Fig.13: funzioni di autocorrelazioni longitudinali e trasversali.....	16
Fig.14: funzione di autocorrelazione trasversale g(v) ottenuta per via numerica e analitica.....	17
Fig.15: funzione di autocorrelazione trasversale g(u) ottenuta per via numerica e analitica.....	17
Fig.16: confronto R22-R33 per $r=e1*\mathbf{r}$ .....	18
Fig.17: confronto R22-R33 per $r=e2*\mathbf{r}$ .....	18
Fig.18: funzione di autocorrelazione longitudinale lungo e1 e lungo r.....	19
Fig.19: funzione di autocorrelazione longitudinale lungo e2 e lungo r.....	20
Fig.20: andamento della velocità $\mathbf{U}$ e della corrispondente velocità filtrata $\bar{\mathbf{U}}$ .....	22
Fig.21: effetto qualitativo del filtraggio al variare di $\Delta$ .....	22
Fig.22: scarto medio tra il valore $u_i u_j$ e il valore $\overline{u_i u_j}$ .....	25
Fig.23: rappresentazione campo di velocità filtrato attraverso filtro box, z=100.....	25
Fig.24: scarto medio ottenuto per la relazione (3.3.8).....	28
Fig.25:rappresentazione del campo di velocità in un campo di moto costituito da due fluidi a	

densità differenti, $z=100$ .....	28
Fig.26: rappresentazione del campo di velocità, in un campo di moto costituito da fluidi a densità differenti, filtrato attraverso filtro Favre, $z=100$ .....	29
Fig.27:rappresentazione del campo di densità in un campo di moto costituito da due fluidi a densità differenti in fase di mixing, $z=100$ .....	29

# Introduzione

In genere quando si sente parlare di “fenomeni turbolenti” viene spontaneo immaginare qualcosa di altamente disordinato e caotico . In effetti questa visione intuitiva della turbolenza non è del tutto errata o, per meglio dire, è più che corretta. La turbolenza, in generale, può essere descritta come un fenomeno instazionario, irregolare e caotico; in una sola parola: “**casuale**”. Quest’ultimo termine, tuttavia, va utilizzato con una certa cautela. Spesso, infatti, si commette l’errore di utilizzare il termine “casuale” con accezione di “impossibilità”, basandosi sulla convinzione che un fenomeno la cui avvenuta non sia sicura di certo non si verificherà. Come esempio, per meglio comprendere questo concetto, può risultare utile considerare il campo di velocità  $\mathbf{U}(\mathbf{x},t)$  , funzione della posizione  $\mathbf{x}$  e del tempo  $t$ , caratterizzante un flusso turbolento, il quale risulta essere casuale. Misurando il valore di  $U$ , in un preciso punto e sotto specifiche condizioni per un certo numero di volte, vogliamo valutare la probabilità che si verifichi l’evento  $A \equiv \{U < 5 \text{ m/s}\}$ . Se  $A$  si verificherà di certo esso sarà da considerarsi un evento certo. Se  $A$  non si verificherà di certo esso sarà da considerarsi un evento impossibile. Infine,  $A$  potrebbe verificarsi ma non necessariamente si verificherà; in tal caso esso sarà da considerarsi un evento casuale. Questo significa soltanto che non si può avere la certezza che  $A$  si verifichi , non che  $A$  di certo non si verificherà. Quindi asserire che  $U$  è una variabile casuale equivale semplicemente ad asserire che  $U$  non assumerà sempre lo stesso valore nelle varie misurazioni, eseguite ognuna sotto le stesse condizioni. Ma a cosa è dovuta questa natura casuale della turbolenza?

In ogni flusso turbolento vi sono, inevitabilmente, delle **perturbazioni** delle condizioni iniziali, delle condizioni al contorno e dei materiali che costituiscono il fluido. I campi di moto turbolenti presentano un’elevata sensibilità a tali perturbazioni. Questo significa che il vettore velocità, considerato in un preciso punto di un campo di moto turbolento, varierà istante dopo istante in modulo, direzione e verso.

Tuttavia, il carattere casuale dei flussi turbolenti non è dovuto solo alla presenza delle perturbazioni. Queste , infatti, si presentano anche nei campi di moto laminari ma, in tal caso, le forze viscosi che dominano la dinamica del fenomeno risultano essere così intense da riuscire a smorzare in modo quasi immediato l’effetto destabilizzante delle perturbazioni. Nei flussi turbolenti questo non avviene poiché in questi ultimi sono le forze inerziali a dominare. Nell’ambito di questo discorso assume particolare importanza il numero di Reynolds ( $Re = \frac{UL}{\nu}$ ), parametro adimensionale il cui scopo è proprio quello di fornire una misura del peso ricoperto dalle forze inerziali rispetto a quelle viscosi nel determinare la dinamica del flusso. Affinché un flusso possa considerarsi turbolento

dovrà essere caratterizzato da un  $Re$  superiore ad un certo valore, che chiameremo  $Re$  critico, il quale varia a seconda delle condizioni in cui il flusso stesso si sviluppa. A questo punto è importante puntualizzare che l'affermazione secondo cui un campo di moto turbolento è dominato dalle forze inerziali è valida solo nella misura in cui ci si riferisca alle strutture vorticosi (“**eddies**”) su **grande scala** che costituiscono il fenomeno. Queste ,infatti, non sono le uniche presenti e seppur influenzano in modo rilevante la dinamica del campo non la definiscono del tutto, come verrà illustrato nei capitoli successivi.

Come conclusione di questa breve introduzione alla turbolenza si vuole porre l'accento sul fatto che una caratteristica fondamentale dei campi di moto turbolenti è la significativa variabilità e irregolarità del campo di velocità rispetto alla posizione ed al tempo. Questa peculiarità fa sì che l'approccio migliore allo studio di un campo di moto turbolento sia un approccio di tipo statistico, basato sull'analisi delle grandezze medie caratterizzanti il campo di moto. In quest'ottica , nei capitoli successivi, si procederà alla trattazione dei concetti di “funzione di autocorrelazione” e di “filtro”.

# Capitolo 1

## Le Basi Della Turbolenza

Pur senza accorgersene, ogni giorno, ognuno di noi è spettatore di centinaia e centinaia di fenomeni turbolenti. Basti pensare all'acqua che scorre in un fiume, ad una cascata, al fumo che fuoriesce da un comignolo o anche da una sigaretta. Anche all'interno del nostro corpo si hanno fenomeni turbolenti che influenzano il passaggio di sangue nelle arterie. E' facile, quindi, capire come la corretta comprensione della turbolenza sia di vitale importanza dal punto di vista dello sviluppo tecnologico come anche dal punto di vista della normale vita quotidiana. Proprio per tale motivo negli anni in molti si sono interessati all'analisi dei campi di moto turbolenti e molti sono stati gli studi , sempre più all'avanguardia (si pensi alle moderne tecniche di simulazione numerica DNS), condotti. Tali studi hanno dato vita a numerose teorie, ognuna delle quali presenta determinate peculiarità. In particolare, nella presente trattazione si fa riferimento alla teoria formulata dallo studioso russo Andrej Nikolaevič Kolmogorov.

## 1.1 Scale e cascata di energia

Nel capitolo introduttivo si è posto un accento sul fatto che un campo di moto turbolento non è caratterizzato soltanto da strutture vorticosi su grande scala. Per chiarire questo concetto è utile illustrare la teoria della “cascata di energia” formulata da Richardson nel 1922. Tale teoria descrive la turbolenza come un fenomeno costituito da *eddies* di varie dimensioni. Il concetto di eddy non presenta una precisa definizione. Esso può essere pensato come rappresentante una struttura vorticosi caratterizzata da una certa scala dimensionale  $l$ , una certa scala di velocità  $u(l)$  e una certa scala temporale  $\tau(l) \equiv l/u(l)$ . In generale gli eddies di grandi dimensioni avranno una scala dimensionale caratteristica  $l_o$  e una velocità caratteristica  $u_o \equiv u(l_o)$  comparabili alle scale  $L$  e  $U$  del flusso complessivo ( in seguito ci si riferirà ad  $L$  con il nominativo “scala di lunghezza integrale”). Di conseguenza il numero di Reynolds di questi eddies  $Re_o \equiv \frac{u_o l_o}{\nu}$  risulterà essere elevato e quindi l’effetto della viscosità su di essi potrà considerarsi nullo. Secondo la teoria di Richardson gli eddies di grandi dimensioni, i quali contengono la maggior parte dell’energia cinetica estratta dal flusso medio, sono instabili e tendono a distruggersi trasferendo la propria energia agli eddies più piccoli. Questi, a loro volta, distruggendosi cedono la loro energia agli eddies di dimensioni ancora più piccole. Il processo descritto si ripete incessantemente fino a che il  $Re$  non assume valori sufficientemente piccoli da rendere stabile la dinamica degli eddies permettendo, così, alla viscosità di dissipare l’energia fin qui trasferita. Poiché i grandi eddies che innescano la cascata energetica hanno un livello energetico dell’ordine di  $u_o^2$  e sono caratterizzati da una scala temporale  $\tau_o = l_o/u_o$  si può pensare che il rateo di dissipazione dell’energia  $\varepsilon$  vada come  $\frac{u_o^2}{\tau_o} = \frac{u_o^3}{l_o}$ . Di conseguenza, in accordo con varie osservazioni sperimentali, nella fase di trasferimento dell’energia  $\varepsilon$  risulta essere indipendente da  $\nu$ .

Ma qual è la dimensione degli eddies più piccoli responsabili della dissipazione di energia? Per rispondere a questa domanda è necessario introdurre la teoria di Kolmogorov.

## 1.2 Le ipotesi di Kolmogorov

In generale gli eddies di grandi dimensioni presentano un carattere anisotropo e sono influenzati dai limiti fisici imposti al flusso. Kolmogorov intuisce che il carattere direzionale caratterizzante le grandi scale viene perso nel processo di trasferimento dell’energia alle scale più piccole e arriva alla formulazione della sua prima ipotesi:



**- Prima ipotesi di Kolmogorov ( o “ipotesi di locale isotropia”)**

*Per numeri di Reynolds sufficientemente alti i moti turbolenti su piccola scala ( $l \ll l_0$ ) sono statisticamente isotropi.*

Nel seguito si parlerà spesso di **omogeneità** e **isotropia** del flusso turbolento. In generale si parla di omogeneità quando la struttura del campo di velocità in termini di grandezze statistiche è invariante per traslazione del sistema di riferimento rispetto al quale si sta descrivendo il moto del fluido. Se l’invarianza continua ad avere validità anche nel caso di rotazione di tale sistema allora si parla di isotropia. Una definizione più rigorosa di questi due concetti, comunque, verrà data nei capitoli successivi quando si introdurranno le funzioni di autocorrelazione. Per il momento è importante focalizzarsi sulle osservazioni fatte da Kolmogorov. Egli, infatti, approfondisce la sua teoria mettendo in evidenza che, nel processo di trasferimento dell’energia, alla perdita delle caratteristiche di direzionalità dei grandi eddies si unisce la perdita delle informazioni riguardanti la geometria degli stessi. Come conseguenza i moti di piccola scala possono considerarsi “**universali**”, cioè simili in ogni flusso turbolento ad alto Re. A partire da queste osservazioni risulta essere plausibile l’ipotesi che vede questo stato di universalità come dipendente soltanto da  $\varepsilon$  e  $\nu$ . La spiegazione di questa assunzione risiede nella possibilità di additare il rateo secondo cui le piccole scale ricevono energia dai grandi eddies come causa principale dell’universalità stessa e di considerare la viscosità come elemento dominante nella dinamica delle piccole scale.

**- Seconda ipotesi di Kolmogorov (o “prima ipotesi di similarità”)**

*In ogni flusso turbolento caratterizzato da un Re sufficientemente alto, le grandezze statistiche dei moti su piccola scala ( $l < l_{EI}$ ) presentano una forma universale determinata unicamente da  $\varepsilon$  e  $\nu$ .*

Con il simbolo  $l_{EI}$  ( $l_{EI} \approx 1/6 l_0$ ) si indica la scala dimensionale al di sotto della quale vale il principio di universalità. L’intervallo  $l < l_{EI}$  si dice “intervallo di equilibrio universale”. In tale intervallo, dati i due parametri  $\varepsilon$  e  $\nu$ , rimangono definite le seguenti scale dimensionale, di velocità e temporale, dette scale di Kolmogorov:

$$\eta \equiv \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.2.1)$$

$$u_\eta \equiv (\varepsilon \nu)^{\frac{1}{4}} \quad (1.2.2)$$

$$\tau_\eta \equiv \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2.3)$$

Definite le scale di Kolmogorov, che caratterizzano i moti su piccola scala, è possibile chiarire i concetti di “ipotesi di similarità” e “forma universale”. Si consideri un punto  $x_0$  in un flusso turbolento ad elevato  $Re$  in un preciso istante  $t_0$ . Si possono definire le coordinate non dimensionali

$$r \equiv \frac{x-x_0}{\eta} \quad (1.2.4)$$

e il campo di velocità differenziale, non dimensionale

$$w(r) \equiv \frac{[U(x,t_0)-U(x_0,t_0)]}{u_\eta} \quad (1.2.5)$$

In precedenza è stato detto che lo stato statisticamente universale delle piccole scale dipende soltanto da  $\varepsilon$  e  $\nu$ . In seguito, proprio rispetto a questi due parametri sono state definite le scale di Kolmogorov caratterizzanti i piccoli eddies. Di conseguenza, il campo di velocità non dimensionale  $w(r)$  normalizzato rispetto alla scala di velocità  $u_\eta$  risulta essere statisticamente isotropo (a partire dall’ipotesi di locale isotropia) e statisticamente identico se calcolato nei punti  $(x_0, t_0)$  di un qualsiasi flusso turbolento con  $Re$  sufficientemente alto. In altre parole, se si considerano le piccole scale, tutti i campi di velocità turbolenti con elevato  $Re$  sono statisticamente simili, cioè sono statisticamente identici quando vengono normalizzati con le scale di Kolmogorov. A questo punto, per come è stato definito il fenomeno della cascata di energia, è plausibile pensare che, oltre ai moti caratterizzati da una scala  $\eta \ll l_0$ , si debba tenere conto anche della presenza di eddies di dimensioni intermedie, i quali presentano una scala dimensionale  $l$  tale che  $\eta \ll l \ll l_0$ . In particolare si avranno strutture individuate nell’intervallo  $\eta \ll l < l_{EI} < l_0$ . Esse possono essere considerate abbastanza grandi da non essere influenzate dagli effetti della viscosità ma, comunque, sufficientemente piccole da rientrare nell’intervallo di equilibrio universale.

**- Terza ipotesi di Kolmogorov (o “seconda ipotesi di similarità”)**

***In ogni flusso turbolento con numero di  $Re$  sufficientemente alto le grandezze statistiche caratterizzanti i moti con scala  $l$  tale che  $l_{DI} \ll l \ll l_{EI}$  hanno una forma universale unicamente determinata da  $\varepsilon$  e indipendente da  $\nu$ .***

Con il simbolo  $l_{DI}$  ( $l_{DI} \approx 60\eta$ ) si indica la scala dimensionale che separa l’intervallo di equilibrio universale in due zone: “l’intervallo inerziale” e “l’intervallo di dissipazione”.

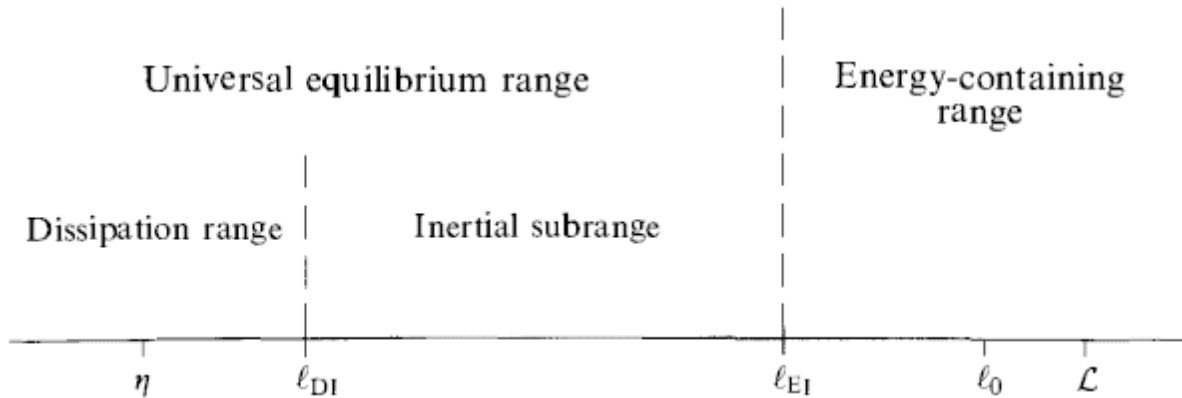


Fig. 1: rappresentazione delle varie scale dimensionali e degli intervalli per Re sufficientemente alti

I moti nell'intervallo inerziale, e quindi il trasferimento di energia alle piccole scale, sono determinati esclusivamente dagli effetti inerziali.

Nei prossimi capitoli si introdurrà il concetto di funzione di autocorrelazione al fine di valutare la statistica universalità dei campi di velocità su piccola scala.

## 1.3 Analisi statistica dei flussi turbolenti: le funzioni di struttura

Si è sottolineato in precedenza l'utilità di un'analisi statistica dei flussi turbolenti. Di seguito si procede all'introduzione delle funzioni di struttura, le quali rappresentano uno dei due strumenti statistici più utilizzati attualmente per condurre un tale tipo di analisi. In seguito si passerà alla trattazione delle funzioni di autocorrelazione.

In primo luogo si definisce un tensore delle correlazioni a  $n$  punti come il valore mediato dei prodotti di  $n$  funzioni prese in punti e tempi differenti:

$$\langle f_1(\mathbf{x}_1, t_1) \dots f_n(\mathbf{x}_n, t_n) \rangle$$

Di particolare importanza è il tensore di correlazione del secondo ordine a due punti della velocità definito nel modo seguente:

$$R_{ij}(r, t) \equiv \langle u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (1.3.1)$$

Il tensore  $R_{ij}$  fornisce un'indicazione sulla vicinanza in senso statistico tra due componenti di velocità in due punti e/o a due istanti diversi. Considerando  $t_1 = t_2$  esso può risultare utile per individuare le strutture, la loro forma spaziale e la loro dimensione caratteristica.

Così come fece lo stesso Kolmogorov per illustrare al meglio la corretta applicazione delle sue ipotesi, anche nel nostro caso conviene prendere in considerazione le funzioni di struttura del secondo ordine della velocità le quali sono facilmente riconducibili a correlazioni a due punti. Definita la funzione di struttura del secondo ordine della velocità come

$$D_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t) \equiv \langle [U_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - U_i(\mathbf{x}, t)][U_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - U_j(\mathbf{x}, t)] \rangle \quad (1.3.2)$$

si nota subito come una prima implicazione dell'ipotesi di locale isotropia è che (per  $r \equiv |\mathbf{r}| \ll L$ )

$D_{ij}$  risulta essere indipendente dalla posizione  $\mathbf{x}$  occupata dai punti considerati. In particolare, l'ipotesi di locale isotropia fa sì che il valore assunto da  $D_{ij}$ , definiti due punti generici del campo  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  e un punto iniziale  $\mathbf{x}_0$ , non dipenda dal punto iniziale considerato (che quindi potrà essere qualunque punto del campo) e nemmeno dalle distanze  $d_1 = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0|$  e  $d_2 = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0|$ . Infatti,  $D_{ij}$  dipenderà soltanto dalla distanza  $d_2 - d_1 = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{r}$ , quindi  $D_{ij}(\mathbf{r}, t)$  potrà essere considerata una funzione isotropa di  $\mathbf{r}$ . In base al sistema di riferimento scelto,  $D_{ij}$  può considerarsi come completamente definita da due funzioni scalari indicate con la simbologia  $D_{LL}$  e  $D_{RR}$  e chiamate rispettivamente “funzione di struttura longitudinale” e “funzione di struttura trasversale”.

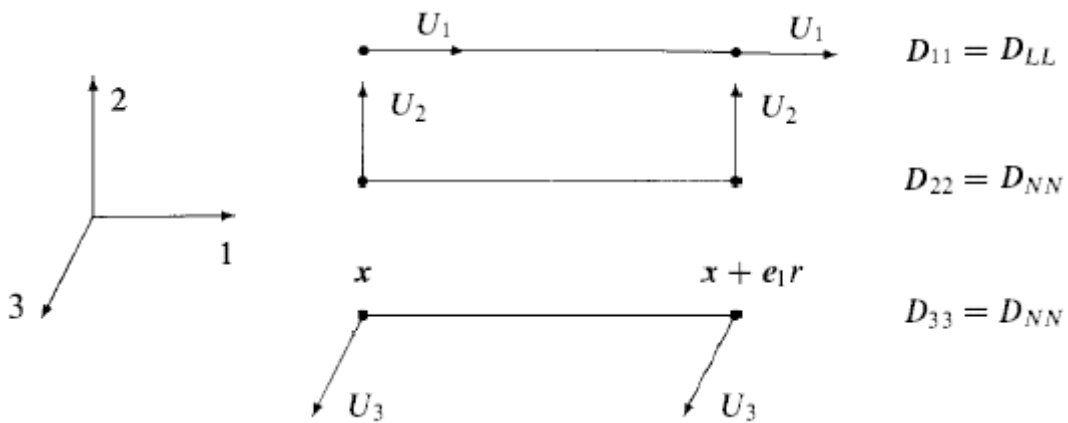


Fig. 2: rappresentazione delle componenti di velocità coinvolte nella definizione delle funzioni di struttura longitudinali e trasversali per  $\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 r$ .

Se si sceglie il sistema di riferimento in modo tale che  $\mathbf{r}$  sia in direzione  $\mathbf{x}_1$  (cioè  $\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 r$ ) si ottiene:

$$D_{11} = D_{LL} \quad D_{22} = D_{33} = D_{NN} \quad D_{ij} = 0 \quad \text{per } i \neq j$$

E' stato dimostrato che  $D_{NN}$  è unicamente determinata da  $D_{LL}$  secondo la relazione

$$D_{NN}(r, t) = D_{LL}(r, t) + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} D_{LL}(r, t) \quad (1.3.3)$$

Come si vede, quindi, nella turbolenza localmente isotropa  $D_{ij}(r, t)$  è unicamente determinata dalla funzione scalare  $D_{LL}(r, t)$ .

## 1.4 Funzioni di autocorrelazione

Per un campo di moto turbolento omogeneo isotropo, con velocità media nulla, r.m.s definito come  $u'(t)$  e rateo di dissipazione  $\varepsilon$ , la correlazione due punti è rappresentata dalla (1.3.1). Si noti come tale correlazione è indipendente da  $\mathbf{x}$ . Così come per le funzioni di struttura, una conseguenza della locale isotropia è che  $R_{ij}$  può essere espresso attraverso due funzioni scalari  $f(r, t)$  e  $g(r, t)$ , dette rispettivamente funzioni di autocorrelazione longitudinale e trasversale, le quali, fissato il sistema di riferimento in modo tale che  $\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 r$ , risultano essere

$$\frac{R_{11}}{u'^2} = f(r, t) = \frac{\langle u_1(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1 r, t) u_1(\mathbf{x}, t) \rangle}{\langle u_1^2 \rangle} \quad (1.4.1)$$

$$\frac{R_{22}}{u'^2} = g(r, t) = \frac{\langle u_2(\mathbf{x} + \mathbf{e}_1 r, t) u_2(\mathbf{x}, t) \rangle}{\langle u_2^2 \rangle} \quad (1.4.2)$$

$$R_{33} = R_{22} \quad , \quad R_{ij} = 0 \quad \text{per } i \neq j$$

Da notare che tali funzioni risultano essere non-dimensionali con  $f(0, t) = 1$  e  $g(0, t) = 1$ . Inoltre, ancora parallelamente alle proprietà di  $D_{ij}$ , si ha:

$$g(r, t) = f(r, t) + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} f(r, t) \quad (1.4.3)$$

Di conseguenza, nella turbolenza isotropa, la correlazione due punti  $R_{ij}(r, t)$  risulta essere completamente determinata dalla funzione di autocorrelazione longitudinale  $f(r, t)$ . A partire dalla definizione di questa funzione è possibile ottenere la scala di lunghezza integrale  $L$ , infatti:

$$L(t) = \int_0^\infty f(r, t) dr \quad (1.4.4)$$

## Capitolo 2

# Analisi DNS e descrizione del database

Al fine di dimostrare la validità delle relazioni fin qui riportate nel seguito si procederà ad un'analisi statistica concreta di un campo di moto turbolento completamente risolto attraverso simulazione numerica DNS. I dati relativi al campo in esame provengono da un database open-access denominato "John Hopkins Turbulence Database" creato dall'università John Hopkins di Baltimora in collaborazione con l'università di Pechino.

## 2.1 Introduzione alla DNS e descrizione del JHTD

Si è descritto, in precedenza, il carattere disordinato, instazionario e caotico dei flussi turbolenti. Si è discusso, inoltre, riguardo all'impossibilità di condurre uno studio di tipo deterministico in grado di descrivere con accuratezza la dinamica turbolenta. Significa, quindi, che la turbolenza rimarrà per sempre un campo inesplorato?

Ovviamente no. Negli ultimi anni lo sviluppo tecnologico ha permesso, attraverso l'impiego di calcolatori sempre più evoluti, l'implementazione di metodi numerici in grado di mappare punto per punto ed istante per istante le caratteristiche dinamiche di un campo di moto turbolento. In particolare, il metodo attualmente più utilizzato per l'analisi numerica è la DNS ovvero la "direct numerical simulation". La caratteristica principale di questo tipo di analisi è la possibilità di risolvere le equazioni di Navier-Stokes numericamente e senza l'uso di alcun tipo di modello turbolento. In altre parole, questo metodo permette di risolvere completamente il flusso per ognuna delle scale spaziali o temporali, partendo dalle piccole scale dissipative fino ad arrivare agli eddies di grandi dimensioni e quindi alla scala di lunghezza integrale. E' importante notare, tuttavia, che la DNS può essere applicata soltanto a flussi turbolenti con  $Re$  non troppo elevato, ma questo non sminuisce assolutamente la sua importanza nello studio dei moti turbolenti né tanto meno rappresenta il problema più grande legato all'uso della DNS. Questo metodo, infatti, risulta essere molto oneroso in termini di costi e tempi di calcolo. Per tale motivo negli anni si sono sviluppati altri tipi di analisi modellistico-numeriche tra cui l'analisi LES, della quale si parlerà nei capitoli successivi, che sfrutta il concetto di "filtro spaziale".

Come accennato in precedenza, per il nostro studio sono stati sfruttati i dati forniti dal JHTD. Si vuole sottolineare il fatto che questo database è stato ottenuto proprio attraverso analisi DNS di un campo di moto turbolento isotropo forzato ed è stato concepito con il fine di permettere ad un qualsiasi utente di accedere facilmente, attraverso un normale personal computer e sfruttando un'interfaccia di semplice utilizzo, ad un certo numero di terabyte di dati contenenti i valori delle tre componenti della velocità lungo i tre assi cartesiani e della pressione rilevati punto per punto su una griglia periodica costituita da  $1024^3$  nodi. Il dominio del campo è un cubo  $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ . La viscosità  $\nu$  è stata fissata ad un valore di 0.000185 e il passo temporale di simulazione è  $\Delta t = 0.0002$ . Di seguito si elencano alcune delle caratteristiche fondamentali del campo.

- Distanza tra i nodi:

$$d = \frac{2\pi}{1024} = 0.006136 \quad (2.1.1)$$

- Rateo di dissipazione:

$$\varepsilon = \langle \sum_k (\nu k^2 \hat{u} \hat{u}^*) \rangle_{time} = 0.0928 \quad (2.1.2)$$

- Velocità r.m.s:

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right) E_k} = 0.681 \quad (2.1.3)$$

- Scala di lunghezza di Kolmogorov:

$$\eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}} = 0.00287 \quad (2.1.4)$$

- Scala temporale di Kolmogorov:

$$\tau_\eta \equiv \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.0446 \quad (2.1.5)$$

- Scala integrale:

$$L = \frac{\pi}{2u^2} \int \frac{E(k)}{k} dk = 1.376 \quad (2.1.6)$$

Per ottenere i dati dal database basta seguire una semplice procedura. Dopo aver ottenuto un'autorizzazione dai gestori del database, detta authorization token, si è scelto di utilizzare la sezione "Download Data Cutout" presente nel sito per acquisire i dati. L'interfaccia che si presenta all'utente è la seguente:

---

Authorization Token: [?]

Dataset: [?]  (dt: 0.002)

Fields: [?]  Velocity  Pressure

Starting coordinate index for cutout: [?] Size of cutout: [?]  
 (end index minus start index + 1)

$m_t$  (0-1023):   $M_t$  (1-1024):

$i_x$  (0-1023):   $N_x$  (1-1024):

$j_y$  (0-1023):   $N_y$  (1-1024):

$k_z$  (0-1023):   $N_z$  (1-1024):

Fig.3: interfaccia della sezione “Download Data Cutout”

L'utente può inserire le coordinate di partenza nelle tre dimensioni più la coordinata temporale e la dimensione della porzione da scaricare. Procedendo con il download vengono salvati in memoria dei files nel formato Hierarchical Data Format ( estensione .h5).

Nel nostro caso si è scelto di analizzare un cubo 500 x 500 x 500 ad un istante temporale fissato. In seguito è stato creato un codice MatLab in grado di estrapolare le tre componenti della velocità dai files .h5. Questo codice, riportato in Appendice A, genera tre files .mat contenenti matrici di dimensione 500 x 500 x 500, una per ogni componente della velocità, le quali saranno poi richiamate da altri script Matlab al fine di analizzarle. Di seguito si riportano alcune visualizzazioni del campo di velocità preso in considerazione ottenute implementando le funzioni MatLab `contourf` e `quiver`.

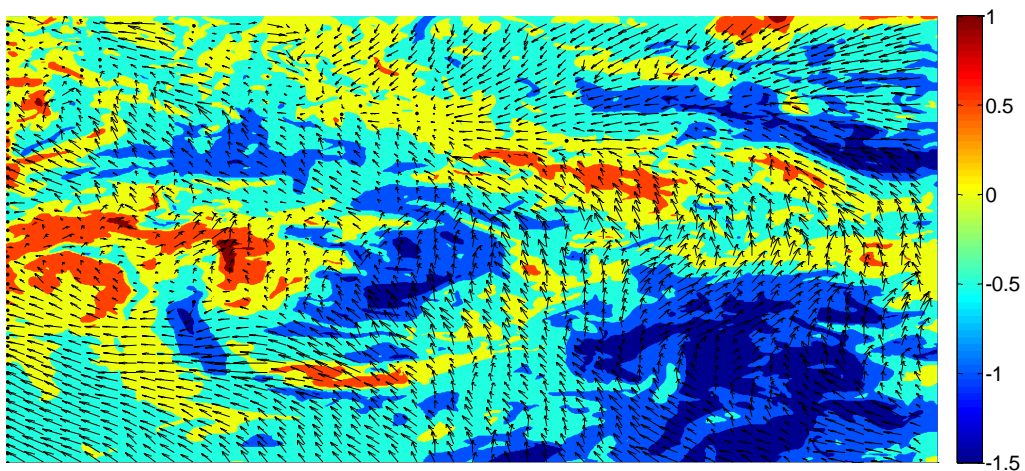


Fig.4: 500x500,  $z=100$ . La mappa a colori indica la componente lungo  $z$  della velocità mentre i vettori indicano direzione e verso sul piano  $xy$ .



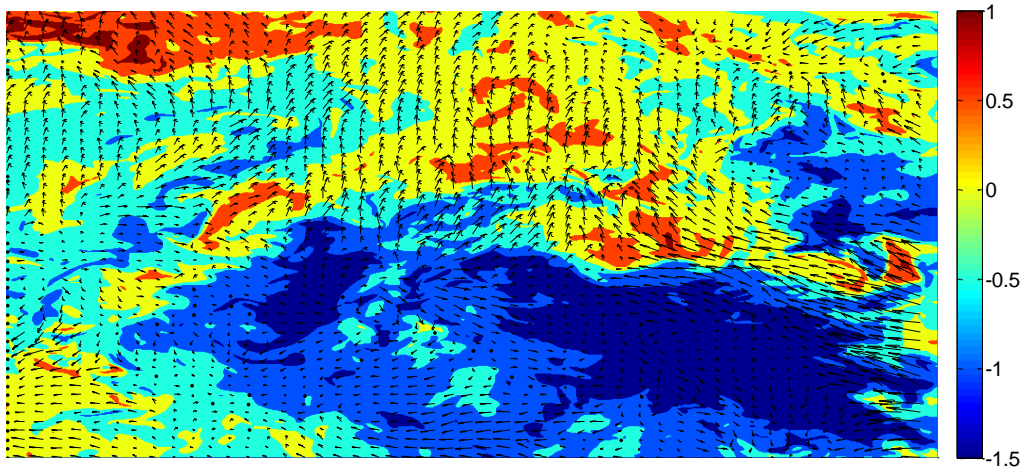


Fig.5: 500x500,  $z=200$ . La mappa a colori indica la componente lungo  $z$  della velocità mentre i vettori indicano direzione e verso sul piano  $xy$ .

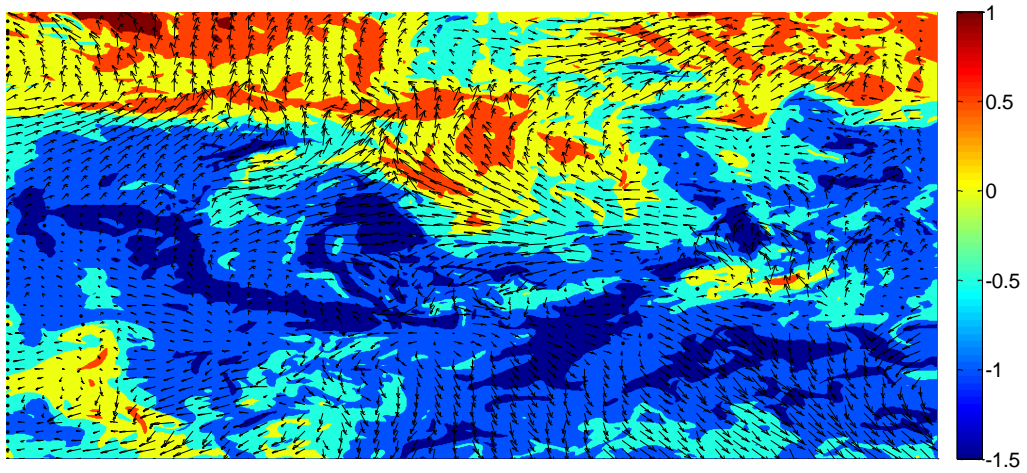


Fig.6: 500x500,  $z=300$ . La mappa a colori indica la componente lungo  $z$  della velocità mentre i vettori indicano direzione e verso sul piano  $xy$ .

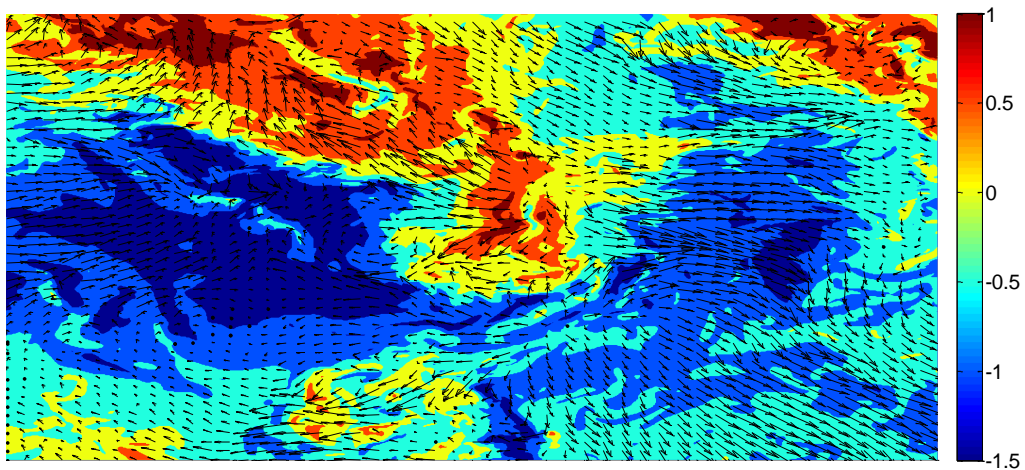


Fig.7: 500x500,  $z=400$ . La mappa a colori indica la componente lungo  $z$  della velocità mentre i vettori indicano direzione e verso sul piano  $xy$ .

## 2.2 Analisi statistica classica

Si procede all'illustrazione dei risultati ottenuti dall'analisi statistica dei dati acquisiti dal JHTD. In primo luogo si riporta l'andamento della correlazione due punti della velocità  $R_{11}$  la cui espressione generica è riportata dalla (1.3.1).

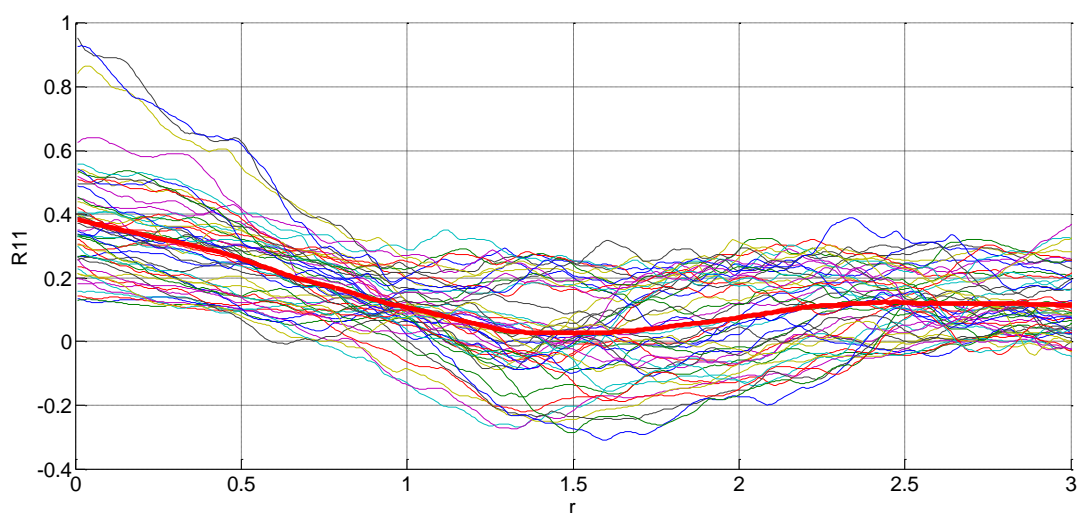


Fig.8: correlazione due punti  $R_{11}$

Per il calcolo di  $R_{11}$  e delle funzioni di autocorrelazione mostrate successivamente si sono considerati in totale 25000 punti del campo, 500 punti su ogni piano a  $z$  costante per 50 piani. Le curve sul fondo mostrano ,appunto, i valori assunti da  $R_{11}$  per ogni piano, mentre la curva rossa in grassetto rappresenta una media lungo  $z$  di tali curve. La correlazione due punti mostra in che misura i valori di velocità considerati in due punti a distanza  $\mathbf{r}$  sono correlati e risulta essere molto importante poiché da essa è possibile calcolare le funzioni di autocorrelazione. Ci si aspetta che  $R_{11}$  decada rapidamente all'aumentare di  $r$  e, come si può vedere dalla figura, tali aspettative non vengono deluse poiché la curva raggiunge valori prossimi a zero per  $r \rightarrow L$ . Da notare che, sulla base della (1.4.4), il calcolo di  $L$  attraverso integrazione numerica sull'intero dominio ,ottenuta implementando la funzione MatLab `trapz`, fornisce un valore  $L= 1.321$ , molto prossimo alla scala integrale caratteristica del database pari a 1.376 (2.1.6). Passiamo ora alla rappresentazione delle funzioni di autocorrelazione. Fissato  $\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 r$  si avranno le due funzioni longitudinale e trasversale:

$$f(u) = \frac{\langle u(x+\mathbf{e}_1 r, t)u(x, t) \rangle}{\langle u(0)^2 \rangle} \quad (2.2.1)$$

$$g(v) = \frac{\langle v(x+\mathbf{e}_1 r, t)v(x, t) \rangle}{\langle v(0)^2 \rangle} \quad (2.2.2)$$

mostrate nelle figure 9 e 10.

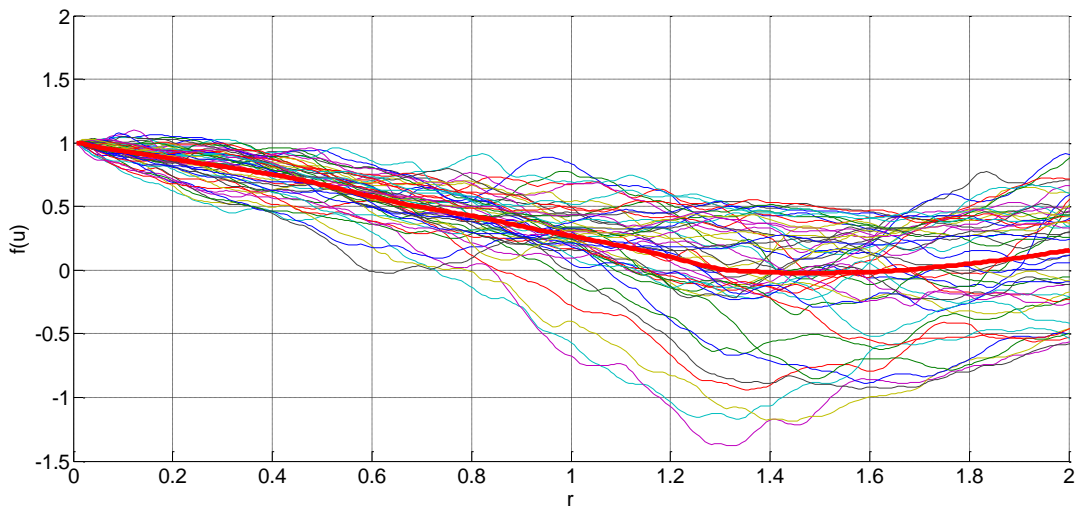


Fig.9: funzione di autocorrelazione longitudinale  $f(u)$  con  $r=\mathbf{e}_1 * r$

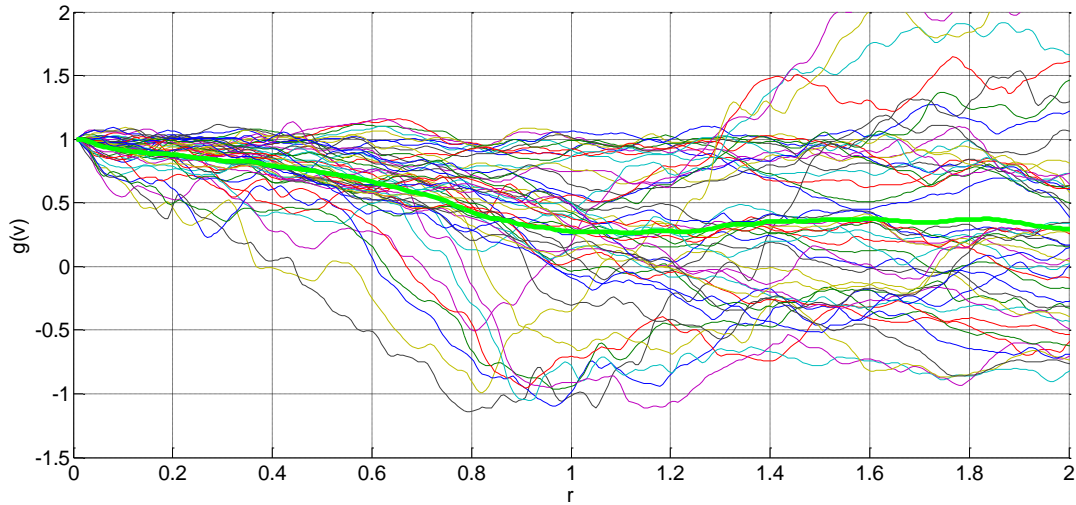


Fig.10: funzione di autocorrelazione trasversale  $g(v)$  con  $r=e_1*r$

Si noti come anche in questo caso le funzioni tendono a decrescere fino a zero per  $r \rightarrow L$ . Per distanze superiori in alcuni casi è possibile osservare un nuovo intervallo di crescita della funzione, di poco interesse ai fini del nostro studio poiché dovuto ad effetti spuri e al limitato numero di punti considerato. Le stesse considerazioni si possono fare se si va a valutare le funzioni di autocorrelazione longitudinale e trasversale quando  $\mathbf{r} = \mathbf{e}_2 r$ . In tal caso si avrà:

$$f(v) = \frac{\langle v(x+\mathbf{e}_2 r, t)v(x, t) \rangle}{\langle v(0)^2 \rangle} \quad (2.2.3)$$

$$g(u) = \frac{\langle u(x+\mathbf{e}_2 r, t)u(x, t) \rangle}{\langle u(0)^2 \rangle} \quad (2.2.4)$$

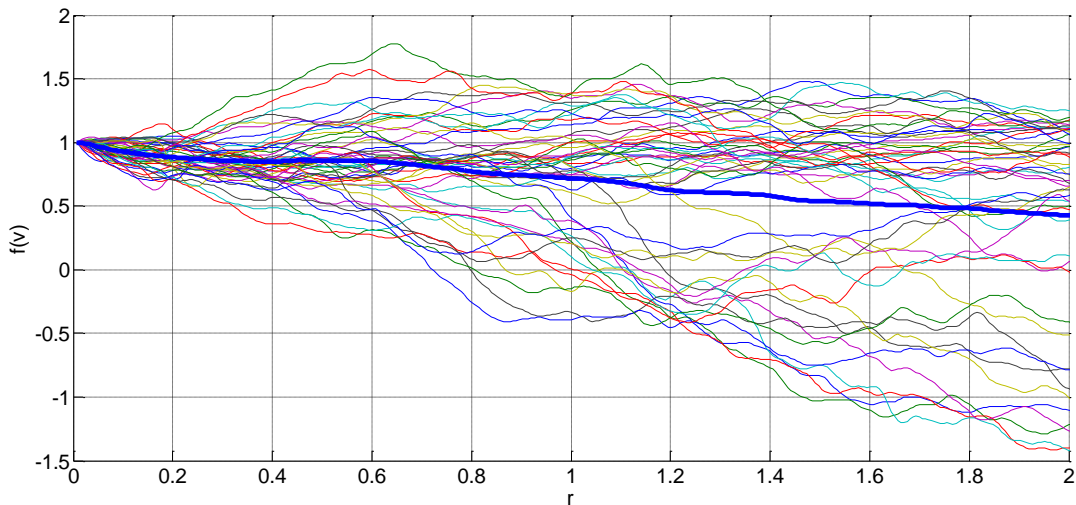


Fig.11: funzione di autocorrelazione longitudinale  $f(v)$  con  $r=e_2*r$

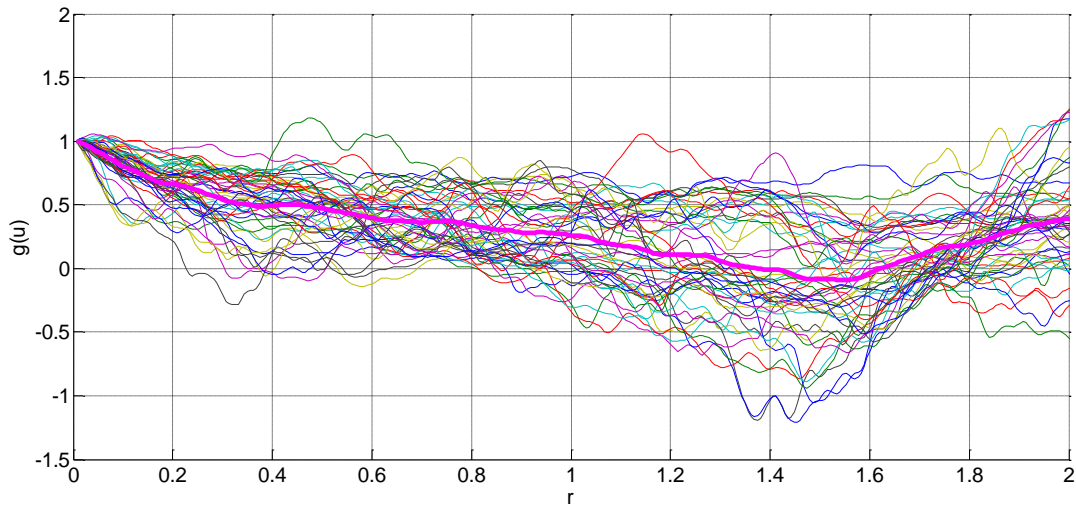


Fig.12: funzione di autocorrelazione trasversale  $g(u)$  con  $r=e^{2*r}$

Questo esempio è utile per mettere in evidenza come, sulla base della (1.4.3), in genere le funzioni di autocorrelazione trasversali decadono più rapidamente di quelle longitudinali, raggiungendo spesso valori negativi per  $r$  elevati. Per meglio mettere in evidenza le caratteristiche delle funzioni appena illustrate conviene riportarle tutte sullo stesso grafico.

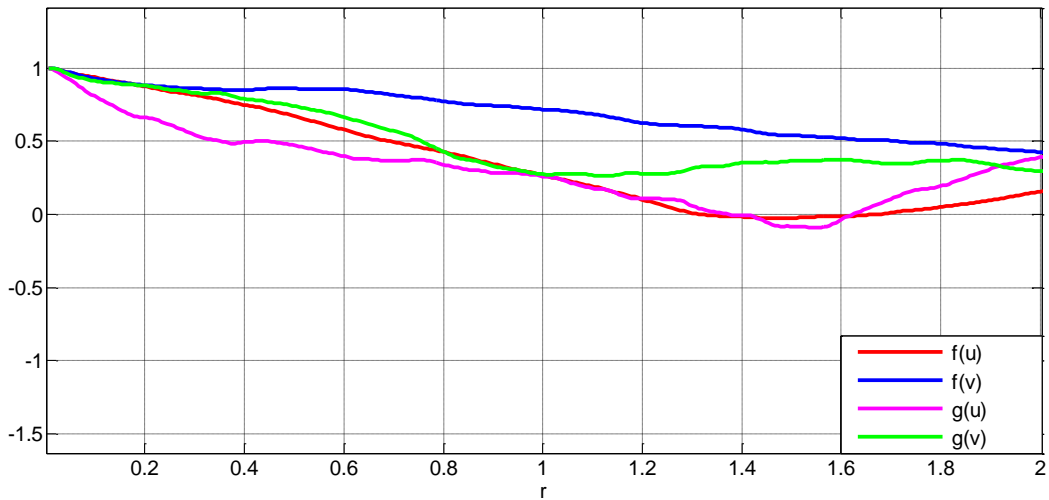


Fig.13: funzioni di autocorrelazioni longitudinali e trasversali

Di particolare interesse per la nostra esposizione è l'andamento delle curve per distanze contenute. Nel capitolo 2.1 si è detto che le ipotesi di Kolmogorov sono valide fin quando si rimane all'interno del range inerziale, cioè per  $l_{EI} \approx 1/6 l_o$ , dove  $l_o = L$ . Di conseguenza le nostre osservazioni devono concentrarsi su valori di  $r$  dati da :  $r_{EI} \approx \frac{1.376}{6} = 0.229$ . Si noti come per tali valori di  $r$  l'evoluzione delle curve sia molto simile, a confermare ancora una volta l'isotropia delle piccole scale. Con l'equazione (1.4.3) è stato sottolineato il fatto che l'ipotesi di locale isotropia permette di

considerare la correlazione due punti come completamente determinata da  $f(\mathbf{r}, t)$ . Verifichiamo, quindi, che tale equazione sia corretta andando a confrontare gli andamenti delle funzioni di correlazione trasversali  $g(v)$  e  $g(u)$  calcolati per via numerica con gli stessi ottenuti analiticamente applicando la (1.4.3).

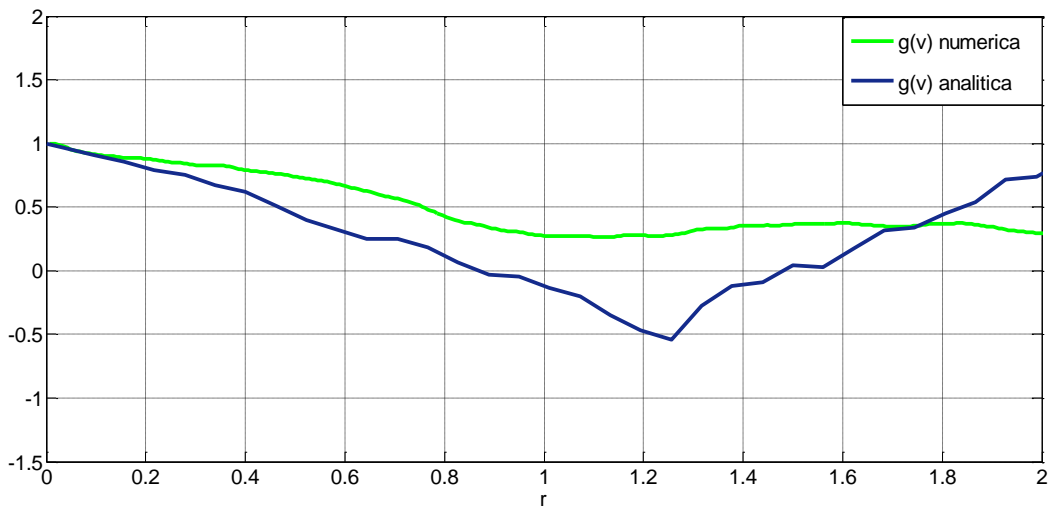


Fig.14: funzione di autocorrelazione trasversale  $g(v)$  ottenuta per via numerica e analitica

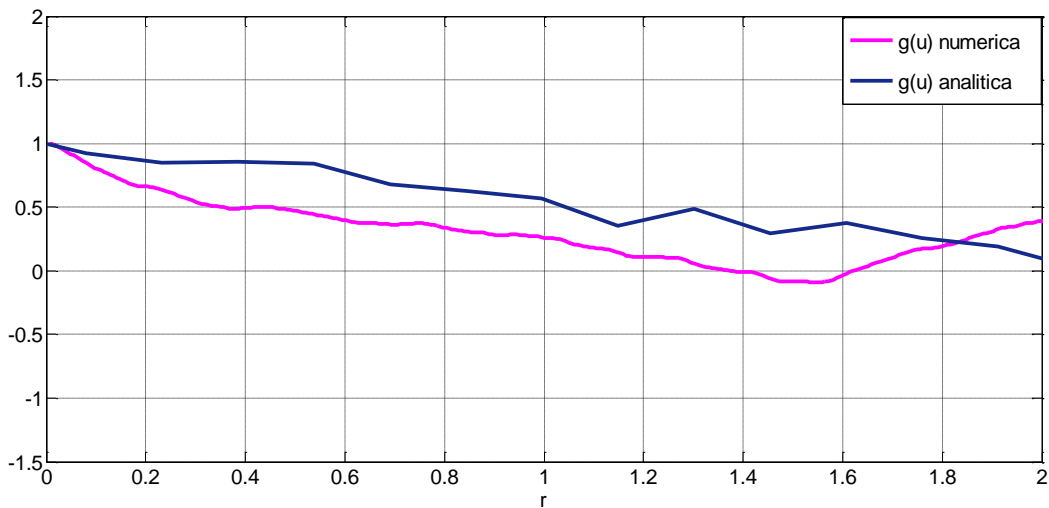


Fig.15: funzione di autocorrelazione trasversale  $g(u)$  ottenuta per via numerica e analitica

Le figure mostrano un andamento delle due curve molto simile, seppur non del tutto coincidente a causa del calcolo approssimativo condotto su un numero limitato di punti e soprattutto considerando un unico istante temporale (considerare diversi istanti temporali potrebbe ovviare il problema). In particolare, la validità della (1.4.3) è di più facile riscontro nella figura 14 dove si può vedere come, per  $r < r_{EI}$ , le due curve sono praticamente sovrapposte. Un'ulteriore prova a dimostrazione dell'efficacia delle ipotesi di Kolmogorov può essere ottenuta andando a verificare la correttezza

dell'assunzione secondo cui, fissata una direzione di riferimento, si deve avere  $R_{33} = R_{22}$ .

Andiamo, quindi, a valutare l'andamento delle funzioni in questione rispettivamente per  $r = e_1 r$  e per  $r = e_2 r$  :

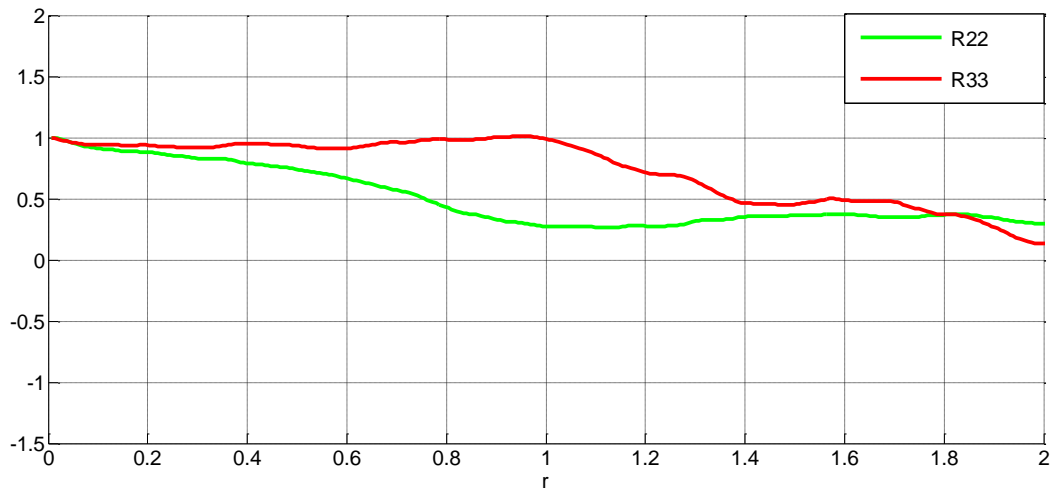


Fig.16: confronto R22-R33 per r=e1\*r

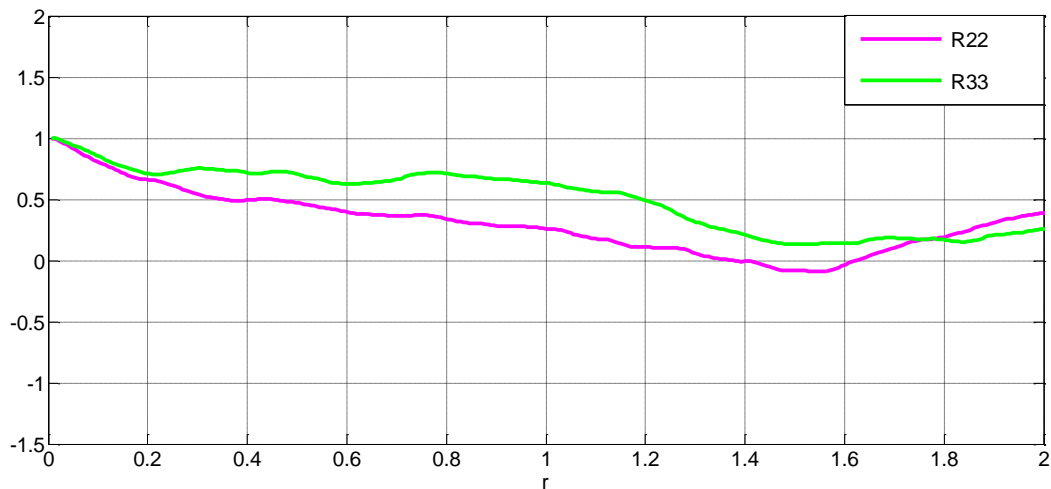


Fig.17: confronto R22-R33 per r=e2\*r

Concentrandosi anche in questo caso su valori di r tali che  $r < r_{EI}$  si nota facilmente la quasi perfetta sovrapposizione delle curve a confermare la correttezza dell'espressione in esame. Le relazioni ottenute a partire dalle ipotesi di Kolmogorov , quindi, risultano avere tutte completa validità all'interno dell'intervallo inerziale. A questo punto, per chiudere la sezione dedicata

all'analisi statistica classica, si riporta il confronto tra le funzioni di autocorrelazione longitudinali, calcolate lungo le direzioni di riferimento individuate dai versori  $\mathbf{e}_1$  ed  $\mathbf{e}_2$ , e le funzioni di autocorrelazione ottenute muovendosi lungo una direzione generica  $\mathbf{r}$  data dalla composizione vettoriale dei versori  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Queste ultime funzioni, calcolate andando a confrontare i valori delle componenti di velocità rilevati in 1000 punti sparsi all'interno del cubo di lato 500 con quelli registrati in altri 1000 punti e mediando i valori ottenuti sul numero delle realizzazioni effettuate, tendono a decrescere più rapidamente delle normali funzioni di autocorrelazione longitudinali. Il motivo può essere ricercato nel fatto che prendendo in considerazione una direzione generica si va ad inglobare all'interno della funzione di autocorrelazione longitudinale anche il contributo dovuto alle funzioni trasversali, le quali, come affermato in precedenza, tendono a decrescere più rapidamente. L'andamento qualitativo delle curve, tuttavia, non cambia. Esse tendono ancora a decrescere per  $r \rightarrow L$ . Nelle figure riportate di seguito le curve vengono rappresentate solo fino a  $r = 0.85$ . Ciò è dovuto al limite imposto al numero di punti considerabili dalla moderata capacità di calcolo di un normale personal computer. Tutti gli scritti Matlab utilizzati per il calcolo delle curve rappresentate sono riportati in Appendice A.

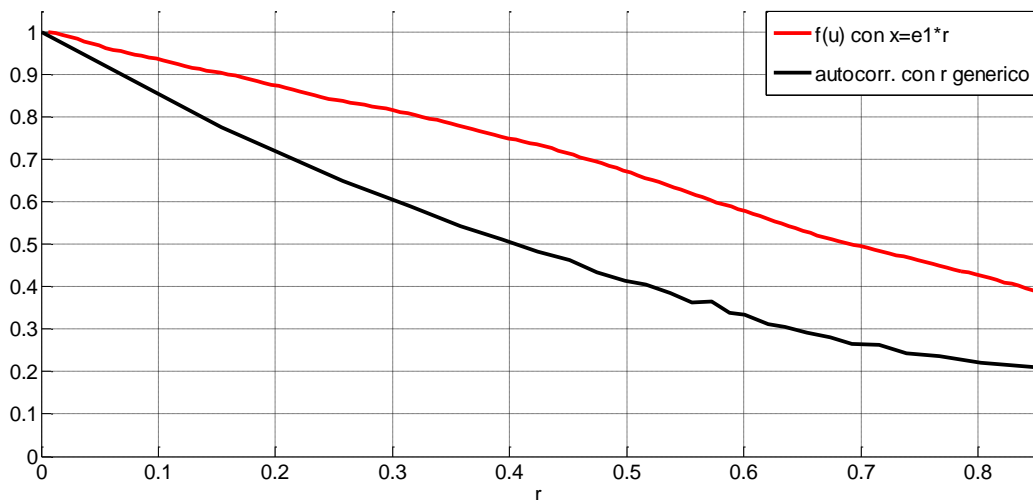


Fig.18: funzione di autocorrelazione longitudinale lungo  $\mathbf{e}_1$  e lungo  $\mathbf{r}$



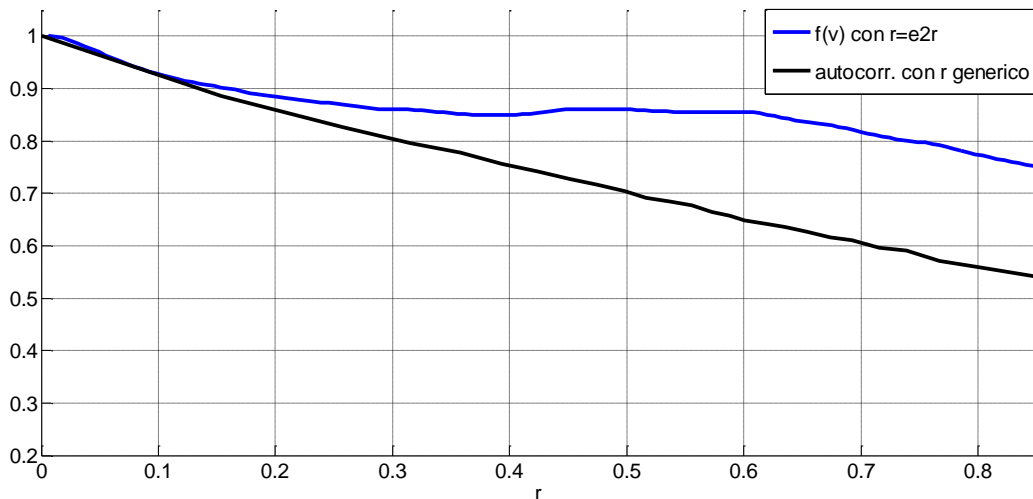


Fig.19: funzione di autocorrelazione longitudinale lungo e2 e lungo r

## Capitolo 3

### Analisi LES e filtraggio spaziale

Come accennato precedentemente non sempre è possibile condurre l'analisi di un campo di moto turbolento tramite simulazione numerica diretta. Questo a causa degli elevati costi e dei lunghi tempi di calcolo che un metodo simile richiede. È sufficiente pensare che il costo della DNS cresce con il cubo del numero di Reynolds e questo porta all'impossibilità di applicare un tale tipo di analisi allo studio di flussi con  $Re$  elevato. Queste limitazioni hanno incoraggiato lo sviluppo di nuove tecniche di simulazione, le quali risultassero abbastanza accurate e allo stesso tempo convenienti in termini di costi e tempi di calcolo. Tra queste assume una certa rilevanza l'analisi LES ("large-eddy simulation") di seguito presentata.

### 3.1 Introduzione alla LES e al metodo del filtraggio

Nell'analisi DNS la maggior parte dello sforzo computazionale viene speso sulle scale dissipative più piccole mentre l'energia e l'anisotropia sono contenute nelle scale più grandi. Nell'analisi LES,

invece, i moti tridimensionali e instazionari su larga scala ( che sono affetti dalla geometria del flusso e non sono universali) vengono calcolati esplicitamente, mentre la dinamica delle piccole scale ( che hanno carattere universale) viene riprodotta tramite modelli. Risulta chiaro, quindi, come questo tipo di analisi sia molto meno onerosa rispetto alla DNS. La LES si basa su quattro concetti fondamentali:

- 1) si definisce un'operazione di filtraggio passa-alto sulle scale al fine di decomporre la velocità  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  nella somma di una componente filtrata (o risolta)  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t)$  e una componente residua ( o di sotto-griglia)  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ . La velocità filtrata  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t)$  è legata al moto dei grandi eddies;
- 2) le equazioni che governano il campo di moto filtrato derivano dalle equazioni di Navier-Stokes;
- 3) la chiusura del sistema di equazioni si ottiene modellando il cosiddetto “tensore degli sforzi residui”;
- 4) le equazioni del modello filtrato, risolte numericamente per  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t)$ , forniscono un'approssimazione della dinamica dei moti su larga scala del flusso turbolento in un preciso istante.

In generale l'operazione di filtraggio si definisce nel modo seguente:

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \mathbf{U}(\mathbf{x} - \mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \quad (3.1.1)$$

dove l'integrazione è da svolgersi sull'intero dominio e la funzione filtro G soddisfa la condizione di normalizzazione

$$\int G(\mathbf{r}, \mathbf{x}) d\mathbf{r} = 1. \quad (3.1.2)$$

Esistono varie tipologie di filtro e ognuno di essi presenta una funzione caratteristica differente, dipendente dalla larghezza  $\Delta$  scelta per il filtro stesso. Per come è definita, l'operazione di filtraggio consiste nell'eliminare le fluttuazioni di velocità che interessano i moti dei grandi eddies dovute all'azione delle piccole scale. Questo processo è tanto più accentuato quanto più largo è il filtro. Infatti, all'aumentare del valore di  $\Delta$  aumenta la quantità di energia minima che i moti devono possedere per oltrepassare il filtro. A prima vista, quindi, sembrerebbe conveniente adottare un filtro molto largo per eliminare del tutto il disturbo proveniente dalle piccole scale. Tuttavia, si deve considerare che un valore di  $\Delta$  troppo elevato può portare all'incapacità di risolvere scale dimensionali contenenti una quantità di energia anche rilevante. Questo comporterebbe la

definizione di una griglia troppo larga su cui applicare il calcolo numerico a seguito del filtraggio e quindi un'elevata imprecisione nella definizione del campo di moto. In generale, affinché questo non si verifichi, conviene fare in modo che  $\Delta$  assuma un valore inferiore a  $l_{EI}$ . Un'assunzione di questo tipo, infatti, permette di risolvere la maggior parte dell'energia contenuta nelle grandi scale.

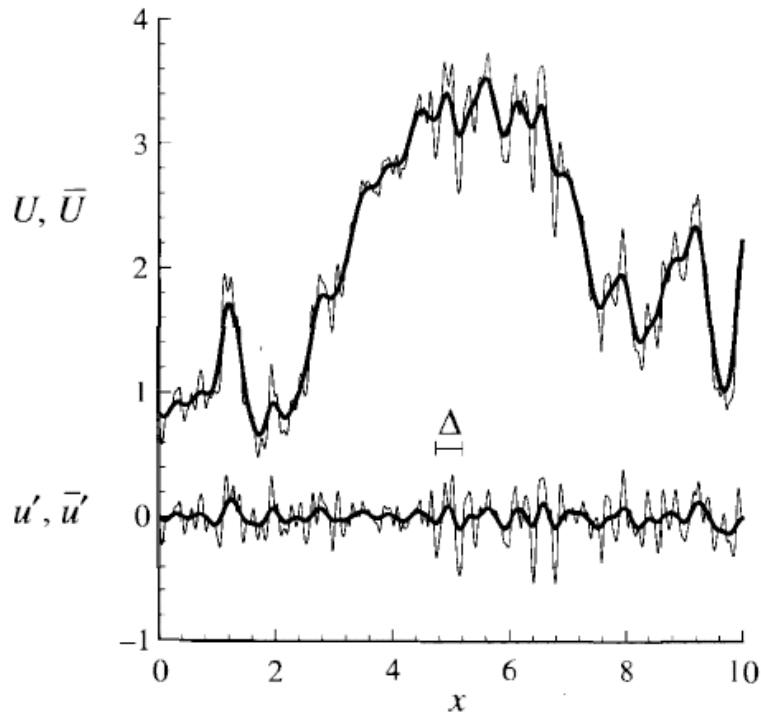


Fig.20: andamento della velocità  $U$  e della corrispondente velocità filtrata  $\bar{U}$

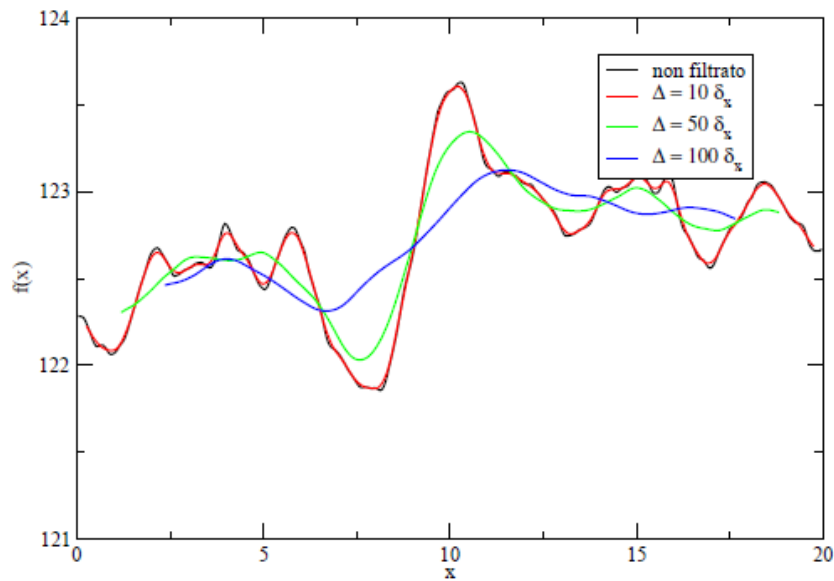


Fig.21: effetto qualitativo del filtraggio al variare di  $\Delta$

Le equazioni che governano il campo di moto filtrato si ottengono applicando l'operazione di filtraggio alle equazioni di Navier-Stokes. Applichiamo quindi un filtro spaziale uniforme all'equazione di continuità ottenendo

$$\overline{\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1.3)$$

dalla quale deriva

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i - \bar{U}_i) = 0. \quad (3.1.4)$$

Quindi sia il campo filtrato  $\bar{\mathbf{U}}$  che il campo residuo  $\mathbf{u}'$  sono solenoidali.

L'equazione del momento, invece, sarà

$$\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_j}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \quad (3.1.5)$$

dove  $\bar{p}(x, t)$  è il campo di pressione filtrato.

Questa equazione differisce dalle equazioni di Navier-Stokes perché il prodotto filtrato  $\overline{U_i U_j}$  ha un valore diverso dal termine  $\bar{U}_i \bar{U}_j$ . La differenza tra i due valori è il *tensore degli sforzi residui* definito da

$$\tau^R_{ij} \equiv \overline{U_i U_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j \quad (3.1.6)$$

Di conseguenza l'equazione di momento filtrata può essere riscritta nel modo seguente:

$$\frac{\bar{D} \bar{U}_j}{\bar{D} t} = \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_j}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial \tau^R_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}. \quad (3.1.7)$$

Proprio come le equazioni di Navier-Stokes, anche le equazioni filtrate costituiscono un sistema aperto. La chiusura di tale sistema si ottiene modellando il tensore degli sforzi residui. In tal modo è possibile determinare  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t)$  e  $\bar{p}(\mathbf{x}, t)$  risolvendo le equazioni (3.1.3) e (3.1.7).

## 3.2 Il filtro box

Il filtro box è una delle tipologie di filtro più utilizzata. Il campo filtrato  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x})$  ottenuto applicando un filtro box in una dimensione risulta essere semplicemente la media di  $U(\mathbf{x}')$  nell'intervallo  $x - \frac{1}{2}\Delta < x' < x + \frac{1}{2}\Delta$ . Questa media unidimensionale diventa una media volumica quando il filtro viene applicato in tre dimensioni. In modo più generale si avrà:

$$\bar{\Phi}(x, t) = \int G(x - x') \Phi(x', t) dx' \quad (3.2.1)$$

dove l'integrale è svolto su tutto il dominio e  $G(r)$  è il prodotto di tre funzioni

$$G(x - x') = \prod_{i=1}^3 H(x - x', \Delta) \quad (3.2.2)$$

$$H(x - x', \Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{se } |x - x'| \leq \Delta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

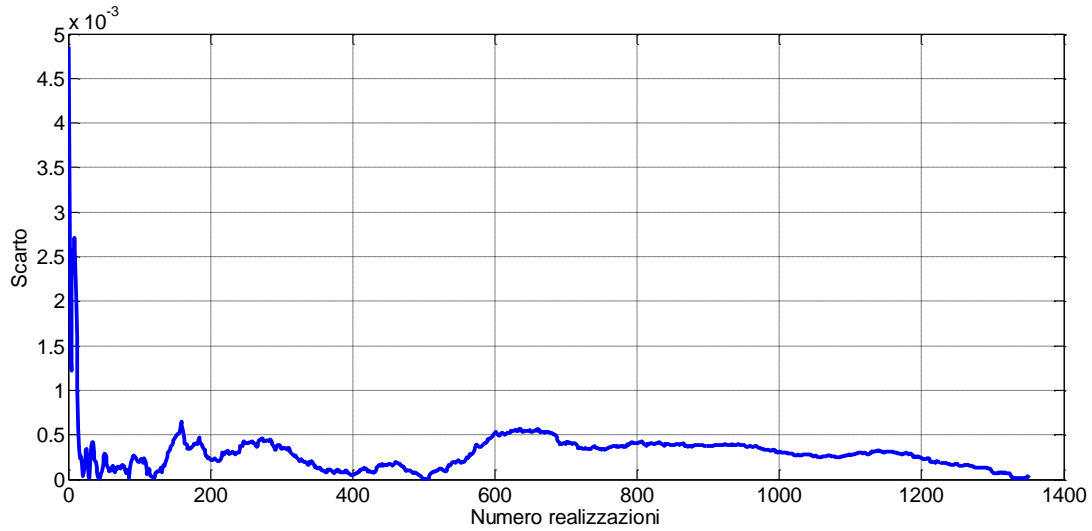
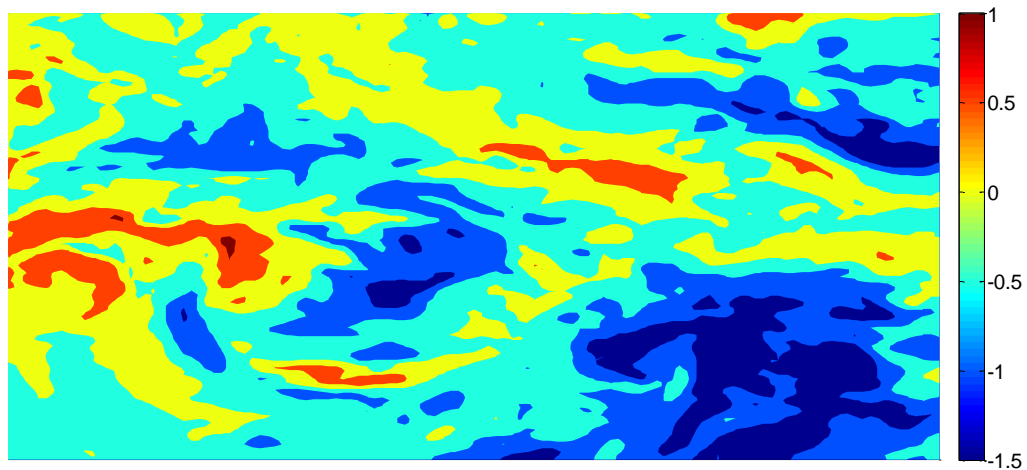
Si ottiene quindi:

$$\bar{\Phi}(x, t) = \int_{-\frac{\Delta_1}{2}}^{\frac{\Delta_1}{2}} \int_{-\frac{\Delta_2}{2}}^{\frac{\Delta_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta_3}{2}}^{\frac{\Delta_3}{2}} \prod_{i=1}^3 H(x - x', \Delta) \Phi(x', t) dx'_3 dx'_2 dx'_1 \quad (3.2.4)$$

A partire da queste relazioni si vuole dimostrare come il filtro box corrisponda ad una media volumica nel caso in cui si scelga in modo opportuno il valore di  $\Delta$ . Supponiamo, quindi, di voler ottenere una griglia filtrata di  $113^3$  nodi a partire dal cubo contenente le componenti delle velocità estrapolate dal JHTD. Il dominio di origine, quindi, ha dimensioni  $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$  ed è costituito da una griglia con  $1024^3$  nodi. Di conseguenza la larghezza del filtro sarà  $\Delta_i = \frac{2\pi}{113} = 0.0556$  con  $i=1,3$ . Come si può vedere si è scelto di impostare il filtro in modo da avere una larghezza  $\Delta$  inferiore a  $l_{EI} = 0.229$ . A questo punto, tenendo in considerazione la (3.1.6), si procede con la verifica della seguente identità

$$\langle u_i u_j \rangle = \langle \tau(u_i, u_j) \rangle + \langle \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle \quad (3.2.5)$$

al fine di analizzare lo scarto medio esistente tra il valore  $u_i u_j$  e il valore  $\bar{u}_i \bar{u}_j$ . L'andamento dello scarto medio al variare del numero di realizzazioni considerate viene riportato in figura 22. Come si può vedere esso tende a zero già per un numero di realizzazioni molto basso, assumendo in alcuni casi un valore del tutto nullo.

Fig.22: scarto medio tra il valore  $u_i u_j$  e il valore  $\overline{u_i u_j}$ Fig.23: rappresentazione campo di velocità filtrato attraverso filtro box,  $z=100$ .

Nella figura 23 viene riportata una rappresentazione tramite color-map del campo di velocità filtrato impiegando un filtro box. Confrontando tale figura con la 4 si nota la diminuzione delle zone del campo di moto caratterizzate da variazioni repentine del valore della velocità, a conferma della riduzione del contributo di disturbo esercitato dalle piccole scale sui grandi eddies.

Nel prossimo ed ultimo paragrafo si segue lo stesso percorso intrapreso per il filtro box andando ad applicare il filtro Favre ad un campo di moto caratterizzato da effetti di galleggiabilità.

## 3.3 Campo di moto governato da effetti di galleggiabilità e filtro Favre

Per procedere alla seguente analisi è stato necessario scaricare un nuovo campo di moto dal JHTD. Le caratteristiche dimensionali di tale campo sono le stesse già descritte nel capitolo 2.1, tuttavia è necessario sottolineare alcune importanti novità. Il campo che si va a considerare si genera a partire da due fluidi con densità differenti che ad un istante iniziale risultano avere la forma di due sfere con dimensione caratteristica pari a  $1/5$  del dominio. Il flusso parte da una condizione di stazionarietà in presenza di un'accelerazione gravitazionale costante. I due fluidi, quindi, iniziano a muoversi in direzioni opposte sotto la spinta delle forze di galleggiabilità (supponendo che vi sia una stratificazione puramente verticale, le particelle di fluido più pesanti tenderanno ad occupare le posizioni più in basso mentre quelle più leggere si troveranno più in alto. Nel caso in cui una particella venga spostata dalla sua situazione di equilibrio, essa tenderà a tornarvi innescando una sorta di rimescolamento). In tal modo si generano delle fluttuazioni turbolente e l'energia cinetica del flusso inizia ad aumentare fino a che, quando i fluidi sono totalmente miscelati, le forze di galleggiabilità iniziano a decrescere e la turbolenza a decadere. Di seguito si elencano alcune delle caratteristiche fondamentali del campo:

- Numero di Reynolds medio  $\approx 12.5$ ;
- Numero di Reynolds massimo  $\approx 17.765$ ;
- Numero di Froude = 1.0;
- Numero di Schmidt = 1.0;
- Densità media  $\approx 1.053$ ;
- Massimo rateo di dissipazione:  $\varepsilon = 0.005332$ .

Per un campo di moto simile è richiesta la conoscenza punto per punto della densità del fluido. Nel nostro caso, così come per le velocità, è stato possibile estrapolare i valori di densità necessari a partire dal JHTD. Si è capito, quindi, che la caratteristica fondamentale del campo considerato sono le variazioni di densità e questo impone la necessità di considerare tali variazioni nel definire le equazioni di Navier-Stokes che regolano la dinamica del campo. Il metodo più noto e utilizzato per farlo è conosciuto come “media secondo Favre”. Secondo la teoria di Favre, nei sistemi

caratterizzati da grandi variazioni di densità è opportuno introdurre una media pesata della generica componente di velocità sulla densità, indicata con  $\tilde{u}$ . Tale media prende il nome di “media di Favre” e si ottiene scindendo la velocità nel modo seguente:

$$U(x, t) = \tilde{U}(x, t) + u''(x, t) \quad (3.3.1)$$

Come fatto in precedenza per il filtro box, si può pensare di ottenere la componente  $\tilde{U}(x, t)$  attraverso l’applicazione di un certo filtro, che in questo caso chiameremo “filtro Favre” e che può essere pensato come un particolare filtro box in cui si tiene conto del contributo della densità. Non a caso una generica grandezza  $\Phi$ , sottoposta ad un filtro di questo tipo, potrà essere ottenuta dalla seguente espressione:

$$\tilde{\Phi}(x, t) = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_{-\frac{\Delta_1}{2}}^{\frac{\Delta_1}{2}} \int_{-\frac{\Delta_2}{2}}^{\frac{\Delta_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta_3}{2}}^{\frac{\Delta_3}{2}} \prod_{i=1}^3 H(x - x', \Delta) \rho(x', t) \Phi(x', t) dx'_3 dx'_2 dx'_1 \quad (3.3.2)$$

dove  $\rho$  è la densità.

In questo caso i termini di sotto-griglia definibili sono più di uno e si possono esprimere nel modo seguente:

$$\tau(\rho, u_i) = \overline{\rho u_i} - \bar{\rho} \tilde{u}_i \quad (3.3.3)$$

$$\tau(\rho, u_j) = \overline{\rho u_j} - \bar{\rho} \tilde{u}_j \quad (3.3.4)$$

$$\tau(u_i, u_j) = \overline{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \quad (3.3.5)$$

$$\tau(\rho, u_i, u_j) = \overline{\rho u_i u_j} - \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j \quad (3.3.6)$$

$$\theta(u_i, u_j) = \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \quad (3.3.7)$$

Le relazioni (3.3.3), (3.3.4) e (3.3.6) rappresentano gli sforzi sotto-griglia generalizzati associati al trasporto turbolento della densità, mentre la (3.3.5) riporta il tensore degli sforzi sotto-griglia associati all’applicazione di un filtro box. Infine nella (3.3.7) compare il termine  $\theta(u_i, u_j)$ , il quale viene detto “tensore degli sforzi di sotto-griglia Favre”. A partire dalle relazioni appena riportate e considerando che, in base alla teoria di Favre, si ha

$$\overline{\rho u_i} = \bar{\rho} \tilde{u}_i \quad (3.3.8)$$

$$\overline{\rho u_i u_j} = \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{\rho} \theta(u_i, u_j), \quad (3.3.9)$$



è possibile ricavare la seguente relazione tra le quantità filtrate utilizzando filtri standard e quelle ottenute applicando un filtro Favre:

$$\langle \theta(u_i, u_j) \rangle = \langle \tau(u_i, u_j) \rangle - \langle \frac{\tau(\rho, u_i)\tau(\rho, u_j)}{\bar{\rho}^2} \rangle + \langle \frac{\tau(\rho, u_i, u_j)}{\bar{\rho}} \rangle \quad (3.3.10)$$

Lo scarto tra i due membri della (3.3.10) è riportato in figura 24. E' facile notare come esso tenda a valori molto vicini allo zero già per poche realizzazioni, per poi appostarsi su valori compresi tra  $1 \times 10^{-4}$  e  $0.5 \times 10^{-4}$ . Di conseguenza il procedimento utilizzato per ottenere il filtro Favre risulta essere valido.

Gli script MatLab utilizzati per l'analisi dei filtri sono riportati in Appendice B.

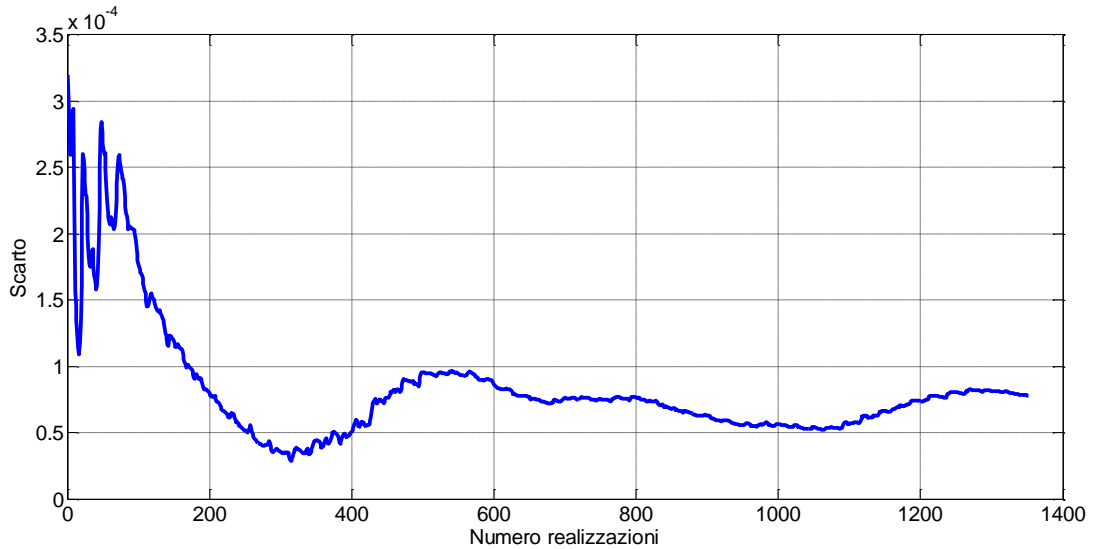


Fig.24: scarto medio ottenuto per la relazione (3.3.8).

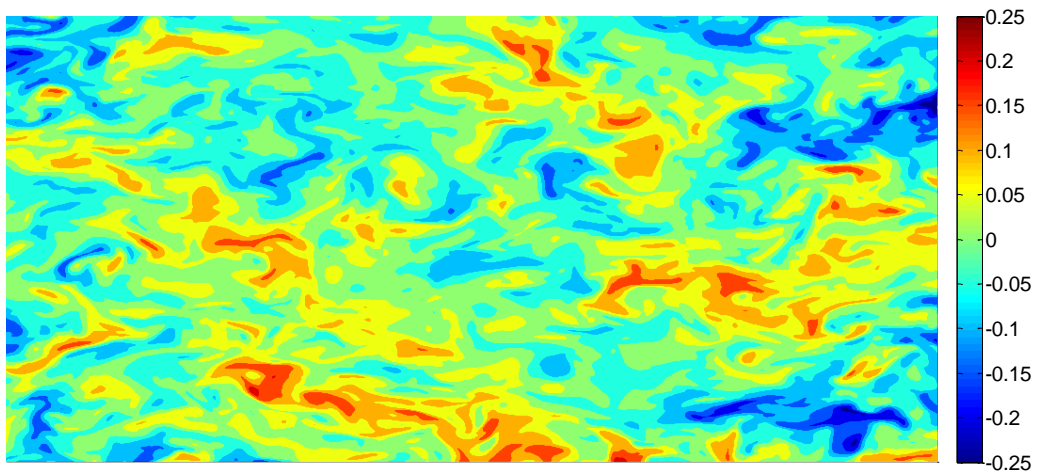


Fig.25: rappresentazione del campo di velocità in un campo di moto costituito da due fluidi a densità differenti,  $z=100$ .

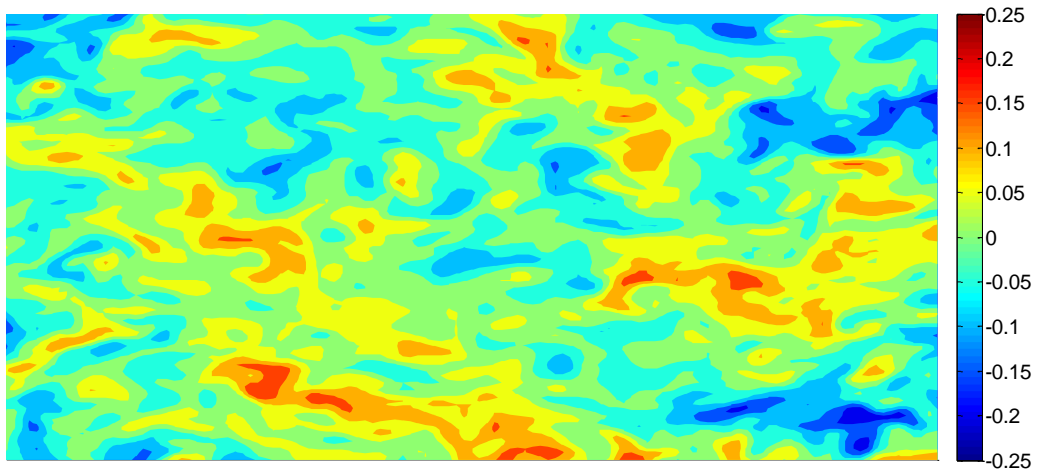


Fig.26: rappresentazione del campo di velocità, in un campo di moto costituito da fluidi a densità differenti, filtrato attraverso filtro Favre,  $z=100$ .

Le figure 25 e 26 rappresentano rispettivamente il campo di velocità originario e quello filtrato attraverso filtro Favre in un campo di moto costituito da fluidi a densità differenti. Il campo di velocità è stato rilevato mantenendo la coordinata  $z$  costante e pari a 100. Anche in questo caso, come per il filtro box, il campo filtrato risulta essere molto più uniforme e libero dalle fluttuazioni indotte dalle piccole scale. La figura 27, invece, riporta l'andamento del campo di densità generato dai due fluidi in fase di mixing, ancora per  $z=100$ .

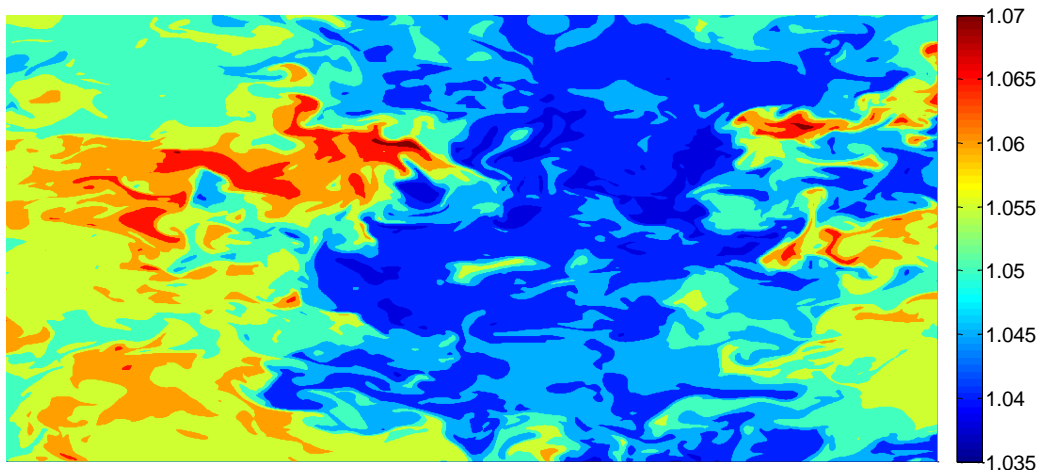


Fig.27:rappresentazione del campo di densità in un campo di moto costituito da due fluidi a densità differenti in fase di mixing,  $z=100$ .

## Capitolo 4

# Conclusioni

La presente trattazione ha come obiettivo quello di descrivere i vantaggi derivanti da un utilizzo incrociato del calcolo statistico e del calcolo numerico nello studio della turbolenza. Da anni, ormai, un numero sempre crescente di ricercatori si cimenta nel tentativo di riuscire a risolvere le varie problematiche che affliggono la piena comprensione delle leggi che regolano i moti turbolenti, prima su tutte la caratteristica di casualità. Sebbene sin dal principio sia stata chiara l'impossibilità di raggiungere un obiettivo di tale portata affidandosi soltanto al calcolo analitico, in molti si sono dedicati allo studio di teorie analitiche che fossero almeno in grado di chiarire alcuni concetti fondanti la dinamica turbolenta. Tra queste si pone la teoria di Kolmogorov, la quale, forte delle tre ipotesi su cui si basa e coadiuvata dalla teoria della "cascata energetica" elaborata da Richardson, riesce a dimostrare, dopotutto, la presenza di un certo ordine nello sviluppo della turbolenza. L'effettiva presenza di questo ordine, che a livello delle piccole scale si traduce in un carattere di isotropia e omogeneità del flusso, viene dimostrata nel capitolo 2 attraverso l'implementazione, a partire dai dati forniti dal JHTD, di due strumenti statistici: le funzioni di struttura e di autocorrelazione. I risultati ottenuti, seppur non del tutto accurati a causa delle limitate possibilità di calcolo fornite da un normale personal computer, permettono già di dimostrare la validità delle ipotesi di Kolmogorov e del database preso in considerazione. L'ottenimento di risultati ancora più determinanti è subordinato, ovviamente, all'utilizzo di calcolatori più potenti, i quali permetterebbero di considerare un maggior numero di punti nelle operazioni di media e, quindi, di avere una maggiore precisione. La teoria di Kolmogorov rappresenta la base sulla quale, a seguito di un adeguato sviluppo delle tecnologie a disposizione, si sono sviluppati i moderni approcci modellistici. Ad essi, ed in particolare all'analisi LES, è dedicata la seconda parte della presentazione. La possibilità di modellare le strutture su piccola scala sulla base delle ipotesi formulate da Kolmogorov integrata all'utilizzo di filtri spaziali in grado di separare la dinamica di tali strutture da quella dei grandi eddies ha permesso una più semplice, veloce e conveniente applicazione dei metodi di calcolo numerico allo studio dei flussi turbolenti. Questo tipo di approccio ha aperto la strada a nuove ed interessanti teorie riguardanti anche campi di moto più complessi, caratterizzati, ad esempio, da fluidi a densità variabile, come dimostrato nel capitolo 3.3 con la presentazione del filtro Favre. Si vuole concludere, quindi, con l'auspicio che il futuro sviluppo di metodi di calcolo numerico ancora più avanzati possa favorire ulteriori passi in avanti nella comprensione degli aspetti ancora irrisolti riguardanti il concetto di turbolenza.

# Appendice A

## Codici: pre-processing e analisi statistica classica

### A1: pre-processing

```
clc
clear all
close all
U=zeros(500,500,500);
V=zeros(500,500,500);
W=zeros(500,500,500);

%300-300-300
hinfo11= hdf5info('y100z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,1:100,1:100)=a312(1,x,,:);
V(x,1:100,1:100)=a312(2,x,,:);
W(x,1:100,1:100)=a312(3,x,,:);
end

%300-400-300
hinfo11= hdf5info('y200z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,101:200,1:100)=a312(1,x,,:);
V(x,101:200,1:100)=a312(2,x,,:);
W(x,101:200,1:100)=a312(3,x,,:);
end

%300-500-300
hinfo11= hdf5info('y300z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,201:300,1:100)=a312(1,x,,:);
V(x,201:300,1:100)=a312(2,x,,:);
W(x,201:300,1:100)=a312(3,x,,:);
end

%300-600-300
hinfo11= hdf5info('y400z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,301:400,1:100)=a312(1,x,,:);
V(x,301:400,1:100)=a312(2,x,,:);
W(x,301:400,1:100)=a312(3,x,,:);
end

%300-700-300
```

```

hinfo11= hdf5info('y500z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,401:500,1:100)=a312(1,x,:,:);
V(x,401:500,1:100)=a312(2,x,:,:);
W(x,401:500,1:100)=a312(3,x,:,:);
end

```

```

%300-300-400
hinfo11= hdf5info('y100z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,1:100,101:200)=a312(1,x,:,:);
V(x,1:100,101:200)=a312(2,x,:,:);
W(x,1:100,101:200)=a312(3,x,:,:);
end

```

```

%300-400-400
hinfo11= hdf5info('y200z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,101:200,101:200)=a312(1,x,:,:);
V(x,101:200,101:200)=a312(2,x,:,:);
W(x,101:200,101:200)=a312(3,x,:,:);
end

```

```

%300-500-400
hinfo11= hdf5info('y300z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,201:300,101:200)=a312(1,x,:,:);
V(x,201:300,101:200)=a312(2,x,:,:);
W(x,201:300,101:200)=a312(3,x,:,:);
end

```

```

%300-600-400
hinfo11= hdf5info('y400z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,301:400,101:200)=a312(1,x,:,:);
V(x,301:400,101:200)=a312(2,x,:,:);
W(x,301:400,101:200)=a312(3,x,:,:);
end

```

```

%300-700-400
hinfo11= hdf5info('y500z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,401:500,101:200)=a312(1,x,:,:);
V(x,401:500,101:200)=a312(2,x,:,:);
W(x,401:500,101:200)=a312(3,x,:,:);
end

```

```

%300-300-500
hinfo11= hdf5info('y100z300.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,1:100,201:300)=a312(1,x,:,:);
V(x,1:100,201:300)=a312(2,x,:,:);
W(x,1:100,201:300)=a312(3,x,:,:);
end

```

```
%300-400-500
hinfo11= hdf5info('y200z300.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,101:200,201:300)=a312(1,x,,:);
V(x,101:200,201:300)=a312(2,x,,:);
W(x,101:200,201:300)=a312(3,x,,:);
end
```

```
%300-500-500
hinfo11= hdf5info('y300z300.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,201:300,201:300)=a312(1,x,,:);
V(x,201:300,201:300)=a312(2,x,,:);
W(x,201:300,201:300)=a312(3,x,,:);
end
```

```
%300-600-500
hinfo11= hdf5info('y400z300.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,301:400,201:300)=a312(1,x,,:);
V(x,301:400,201:300)=a312(2,x,,:);
W(x,301:400,201:300)=a312(3,x,,:);
end
```

```
%300-700-500
hinfo11= hdf5info('y500z300.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,401:500,201:300)=a312(1,x,,:);
V(x,401:500,201:300)=a312(2,x,,:);
W(x,401:500,201:300)=a312(3,x,,:);
end
```

```
%300-300-600
hinfo11= hdf5info('y100z400.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,1:100,301:400)=a312(1,x,,:);
V(x,1:100,301:400)=a312(2,x,,:);
W(x,1:100,301:400)=a312(3,x,,:);
end
```

```
%300-400-600
hinfo11= hdf5info('y200z400.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,101:200,301:400)=a312(1,x,,:);
V(x,101:200,301:400)=a312(2,x,,:);
W(x,101:200,301:400)=a312(3,x,,:);
end
```

```
%300-500-600
hinfo11= hdf5info('y300z400.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,201:300,301:400)=a312(1,x,,:);
V(x,201:300,301:400)=a312(2,x,,:);
end
```

```

W(x,201:300,301:400)=a312(3,x,,:);
end

%300-600-600
hinfo11= hdf5info('y400z400.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,301:400,301:400)=a312(1,x,,:);
V(x,301:400,301:400)=a312(2,x,,:);
W(x,301:400,301:400)=a312(3,x,,:);
end

%300-700-600
hinfo11= hdf5info('y500z400.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,401:500,301:400)=a312(1,x,,:);
V(x,401:500,301:400)=a312(2,x,,:);
W(x,401:500,301:400)=a312(3,x,,:);
end

%300-300-700
hinfo11= hdf5info('y100z500.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,1:100,401:500)=a312(1,x,,:);
V(x,1:100,401:500)=a312(2,x,,:);
W(x,1:100,401:500)=a312(3,x,,:);
end

%300-400-700
hinfo11= hdf5info('y200z500.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,101:200,401:500)=a312(1,x,,:);
V(x,101:200,401:500)=a312(2,x,,:);
W(x,101:200,401:500)=a312(3,x,,:);
end

%300-500-700
hinfo11= hdf5info('y300z500.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,201:300,401:500)=a312(1,x,,:);
V(x,201:300,401:500)=a312(2,x,,:);
W(x,201:300,401:500)=a312(3,x,,:);
end

%300-600-700
hinfo11= hdf5info('y400z500.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
U(x,301:400,401:500)=a312(1,x,,:);
V(x,301:400,401:500)=a312(2,x,,:);
W(x,301:400,401:500)=a312(3,x,,:);
end

%300-700-700
hinfo11= hdf5info('y500z500.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500

```

```

U(x,401:500,401:500)=a312(1,x,,:);
V(x,401:500,401:500)=a312(2,x,,:);
W(x,401:500,401:500)=a312(3,x,,:);
end

save U.mat U
save V.mat V
save W.mat W

```

## A2: funzioni di autocorrelazione $f(u),g(v)$

```

clc
close all
clear all
load U %oppure V per calcolare g(v)

U_U=zeros(500,500,50);
U_2=zeros(500,500,50);
contz=0;
for z=1:10:500
    contz=contz+1;
    cont=0;
    for y=1:500
        cont=cont+1;
        for x=1:500
            U_U(cont,x,contz)=(U(1,y,z)*U(x,y,z));%V al posto di U per calcolare
                                                    g(v)
            U_2(cont,x,contz)=(U(1,y,z)^2);
        end
    end
end
end
size(U_U);
size(U_2);
R=mean(U_U,1);
U1=mean(U_2,1);
RR=squeeze(R);
UU=squeeze(U1);
%%
f=RR./UU;
size(f);
RR_mediata=mean(RR,2);
f_mediata=mean(f,2);

%% calcolo della scala di lunghezza integrale L11
int=linspace(0,pi,500);
scala_integrale=trapz(int,f_mediata)

```



### A3: funzioni di autocorrelazione $f(v),g(u)$

```

clc
close all
clear all
load V %oppure U per calcolare g(u)

U_U=zeros(500,500,50);
U_2=zeros(500,500,50);
contz=0;
for z=1:10:500
    contz=contz+1;
    cont=0;
    for x=1:500
        cont=cont+1;
        for y=1:500
            U_U(cont,y,contz)=(V(x,1,z)*V(x,y,z));% U al posto di V per calcolare
                                                    g(u)
            U_2(cont,y,contz)=(V(x,1,z)^2);
        end
    end
end
end
size(U_U);
size(U_2);
R=mean(U_U,1);
U1=mean(U_2,1);
RR=squeeze(R);
UU=squeeze(U1);
%%
f=RR./UU;
size(f);
RR_mediata=mean(RR,2);
f_mediata=mean(f,2);

```

### A4: calcolo analitico di $g(v),g(u)$

```

clc
clear all
close all

load f_u.mat %oppure f_v.mat per calcolare analiticamente g(u)
N=[1:1:500];
r= N*0.00611;
g(1)=1;
for i=2:length(N)-1
    g(i)=f_mediata(i)+0.5*r(i)*(f_mediata(i+1)-f_mediata(i-1))/(r(i+1)-r(i-1));
end
b=2;
f_last(1)=1;
contsx=1;
contdx=25;
for j=1:19
    f_last(b)=mean(g(1,contsx:contdx));

```

```

r_last(b)=mean(r(1,contsx:contdx));

contsx=contdx+1;
contdx=contdx+25;
b=b+1;
end

```

## A5: funzioni di autocorrelazione lungo una direzione generica

```

clc
close all
clear all
load U % oppure V

N=1:1024;
x=N*0.00628;
y=x;
z=x;
cont=0;
for z0=1:40:401
    for y0=1:40:401
        for x0=1:40:401
            cont=cont+1;
            U_2(1,cont)=(U(x0,y0,z0)^2);
            c=0;
            for k=1:10:100
                for i=1:10:100
                    for j=1:10:100
                        c=c+1;
                        U_U(c)=(U(x0,y0,z0)*U(x0+j-1,y0+i-1,z0+k-1));
                        r(c)=sqrt((x(x0+j-1)-x(x0))^2 + (y(y0+i-1)-y(y0))^2 +
                                (z(z0+k-1)-z(z0))^2);
                    end
                end
            end
            [r_val, r_ind]=sort(r);
            U_U_new(cont,:)=U_U(r_ind);
        end
    end
end
size(U_U_new)
size(U_2)
U_U_med= mean(U_U_new,1);
U_2_med= mean(U_2,2);
f=U_U_med./U_2_med;
figure
hold on
plot (r_val,f);
hold off

f_last(1)=f(1);
b=2;
contsx=1;
contdx=40;
for j=1:25
    f_last(b)=mean(f(1,contsx:contdx));

```

```

    r_last(b)=mean(r_val(1,contsx:contdx));
    contsx=contdx+1;
    contdx=contdx+40;
    b=b+1;
end

```

## Appendice B

# Codici: filtraggio standard e filtraggio con effetti di galleggiabilità

### B1: filtro box e analisi della relazione (3.2.5)

```

clc
clear all
close all
load U
load V
x0=5;
y0=5;
z0=5;
delta=2*pi/113.7763;
k=1/(delta^3);
u0=zeros(9,9,9);
v0=zeros(9,9,9);
n=1;
contcx=0;
for cz=z0:10:15
    for cy=y0:4:105
        for cx=x0:4:105
            contcx=contcx+1;
        contz=0;
        for z=cz-4:cz+4
            contz=contz+1;
            conty=0;
            for y=cy-4:cy+4
                conty=conty+1;
                contx=0;
                for x=cx-4:cx+4
                    contx=contx+1;
                    u0(contx,conty,contz)=U(x,y,z);
                end
            end
        end
    end
end
contz=0;
for z=cz-4:cz+4
    contz=contz+1;
    conty=0;
    for y=cy-4:cy+4
        conty=conty+1;

```

```

contx=0;
for x=cx-4:cx+4
    contx=contx+1;
    v0(contx,conty,contz)=V(x,y,z);
end
end
end
%definisco gli intervalli di integrazione
xint=linspace(-delta/2+(cx*0.00628),delta/2+(cx*0.00628),9);
yint=linspace(-delta/2+(cy*0.00628),delta/2+(cy*0.00628),9);
zint=linspace(-delta/2+(cz*0.00628),delta/2+(cz*0.00628),9);
%triplo integrale su u
uintx=trapz(xint,u0);
uintxy=trapz(yint,uintx);
uintxyz=trapz(zint,uintxy);
u_filt=k*uintxyz;
%triplo integrale su v
vintx=trapz(xint,v0);
vintxy=trapz(yint,vintx);
vintxyz=trapz(zint,vintxy);
v_filt=k*vintxyz;
%triplo integrale su u*v
u_v=u0.*v0;
u_vintx=trapz(xint,u_v);
u_vintxy=trapz(yint,u_vintx);
u_vintxyz=trapz(zint,u_vintxy);
u_vfilt=k*u_vintxyz;
%registro le quantità ottenute
u_f(1,contcx)=u_filt;
v_f(1,contcx)=v_filt;
u_v_f(1,contcx)=u_vfilt;
tau(1,contcx)=u_vfilt-(u_filt*v_filt);
uf_vf(1,contcx)=u_filt*v_filt;
%medio le componenti del cubo uv (9*9*9) lungo le tre dimensioni ottenendo
%u_v_medfin
u_v_med1=mean(u_v,1);
u_v_med11=squeeze(u_v_med1);
u_v_med2=mean(u_v_med11,2);
u_v_medfin=mean(u_v_med2,1);
uv(1,contcx)=u_v_medfin;
%definisco i valori che mi servono per verificare l'identità e li registro
%in vettori
tau_med=mean(tau,2);
uf_vf_med=mean(uf_vf,2);
diff=tau_med+uf_vf_med;
uv_med=mean(uv,2);
scarto=abs(uv_med-tau_med-uf_vf_med);
    realiz(1,contcx)=contcx;
    scart(1,contcx)=scarto;
end
end
end
end

```

## B2: pre-processing del campo di moto con effetti di galleggiabilità

```

clc
clear all
close all
U=zeros(500,500,500);
V=zeros(500,500,500);
W=zeros(500,500,500);
ROH=zeros(500,500,500);

%300-300-300
hinfo11= hdf5info('y100z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,1:100,1:100)=a312(1,x,:,:);
V(x,1:100,1:100)=a312(2,x,:,:);
W(x,1:100,1:100)=a312(3,x,:,:);
end

hinfo11= hdf5info('y100z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,1:100,1:100)=a312(1,x,:,:);
end

%300-400-300
hinfo11= hdf5info('y200z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,101:200,1:100)=a312(1,x,:,:);
V(x,101:200,1:100)=a312(2,x,:,:);
W(x,101:200,1:100)=a312(3,x,:,:);
end

hinfo11= hdf5info('y200z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,101:200,1:100)=a312(1,x,:,:);
end

%300-500-300
hinfo11= hdf5info('y300z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,201:300,1:100)=a312(1,x,:,:);
V(x,201:300,1:100)=a312(2,x,:,:);
W(x,201:300,1:100)=a312(3,x,:,:);
end

hinfo11= hdf5info('y300z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,201:300,1:100)=a312(1,x,:,:);
end

%300-600-300

```

```

hinfo11= hdf5info('y400z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,301:400,1:100)=a312(1,x,:);
V(x,301:400,1:100)=a312(2,x,:);
W(x,301:400,1:100)=a312(3,x,:);
end

```

```

hinfo11= hdf5info('y400z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,301:400,1:100)=a312(1,x,:);
end

```

```

%300-700-300
hinfo11= hdf5info('y500z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,401:500,1:100)=a312(1,x,:);
V(x,401:500,1:100)=a312(2,x,:);
W(x,401:500,1:100)=a312(3,x,:);
end

```

```

hinfo11= hdf5info('y500z100.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,401:500,1:100)=a312(1,x,:);
end

```

```

%300-300-400
hinfo11= hdf5info('y100z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,1:100,101:200)=a312(1,x,:);
V(x,1:100,101:200)=a312(2,x,:);
W(x,1:100,101:200)=a312(3,x,:);
end

```

```

hinfo11= hdf5info('y100z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,1:100,101:200)=a312(1,x,:);
end

```

```

%300-400-400
hinfo11= hdf5info('y200z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,101:200,101:200)=a312(1,x,:);
V(x,101:200,101:200)=a312(2,x,:);
W(x,101:200,101:200)=a312(3,x,:);
end

```

```

hinfo11= hdf5info('y200z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,101:200,101:200)=a312(1,x,:);
end

```

```
%300-500-400
hinfo11= hdf5info('y300z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,201:300,101:200)=a312(1,x,,:);
V(x,201:300,101:200)=a312(2,x,,:);
W(x,201:300,101:200)=a312(3,x,,:);
end
```

```
hinfo11= hdf5info('y300z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,201:300,101:200)=a312(1,x,,:);
end
```

```
%300-600-400
hinfo11= hdf5info('y400z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,301:400,101:200)=a312(1,x,,:);
V(x,301:400,101:200)=a312(2,x,,:);
W(x,301:400,101:200)=a312(3,x,,:);
end
```

```
hinfo11= hdf5info('y400z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,301:400,101:200)=a312(1,x,,:);
end
```

```
%300-700-400
hinfo11= hdf5info('y500z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,401:500,101:200)=a312(1,x,,:);
V(x,401:500,101:200)=a312(2,x,,:);
W(x,401:500,101:200)=a312(3,x,,:);
end
```

```
hinfo11= hdf5info('y500z200.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,401:500,101:200)=a312(1,x,,:);
end
```

```
%300-300-500
hinfo11= hdf5info('y100z300.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,1:100,201:300)=a312(1,x,,:);
V(x,1:100,201:300)=a312(2,x,,:);
W(x,1:100,201:300)=a312(3,x,,:);
end
```

```
hinfo11= hdf5info('y100z300.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,1:100,201:300)=a312(1,x,,:);
end
```

```
%300-400-500
```

```

hinfol1= hdf5info('y200z300.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,101:200,201:300)=a312(1,x,:);
V(x,101:200,201:300)=a312(2,x,:);
W(x,101:200,201:300)=a312(3,x,:);
end

```

```

hinfol1= hdf5info('y200z300.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,101:200,201:300)=a312(1,x,:);
end

```

```

%300-500-500
hinfol1= hdf5info('y300z300.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,201:300,201:300)=a312(1,x,:);
V(x,201:300,201:300)=a312(2,x,:);
W(x,201:300,201:300)=a312(3,x,:);
end

```

```

hinfol1= hdf5info('y300z300.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,201:300,201:300)=a312(1,x,:);
end

```

```

%300-600-500
hinfol1= hdf5info('y400z300.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,301:400,201:300)=a312(1,x,:);
V(x,301:400,201:300)=a312(2,x,:);
W(x,301:400,201:300)=a312(3,x,:);
end

```

```

hinfol1= hdf5info('y400z300.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,301:400,201:300)=a312(1,x,:);
end

```

```

%300-700-500
hinfol1= hdf5info('y500z300.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,401:500,201:300)=a312(1,x,:);
V(x,401:500,201:300)=a312(2,x,:);
W(x,401:500,201:300)=a312(3,x,:);
end

```

```

hinfol1= hdf5info('y500z300.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,401:500,201:300)=a312(1,x,:);
end

```



```
%300-300-600
hinfo11= hdf5info('y100z400.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,1:100,301:400)=a312(1,x,,:);
V(x,1:100,301:400)=a312(2,x,,:);
W(x,1:100,301:400)=a312(3,x,,:);
end
```

```
hinfo11= hdf5info('y100z400.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,1:100,301:400)=a312(1,x,,:);
end
```

```
%300-400-600
hinfo11= hdf5info('y200z400.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,101:200,301:400)=a312(1,x,,:);
V(x,101:200,301:400)=a312(2,x,,:);
W(x,101:200,301:400)=a312(3,x,,:);
end
```

```
hinfo11= hdf5info('y200z400.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,101:200,301:400)=a312(1,x,,:);
end
```

```
%300-500-600
hinfo11= hdf5info('y300z400.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,201:300,301:400)=a312(1,x,,:);
V(x,201:300,301:400)=a312(2,x,,:);
W(x,201:300,301:400)=a312(3,x,,:);
end
```

```
hinfo11= hdf5info('y300z400.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,201:300,301:400)=a312(1,x,,:);
end
```

```
%300-600-600
hinfo11= hdf5info('y400z400.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,301:400,301:400)=a312(1,x,,:);
V(x,301:400,301:400)=a312(2,x,,:);
W(x,301:400,301:400)=a312(3,x,,:);
end
```

```
hinfo11= hdf5info('y400z400.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,301:400,301:400)=a312(1,x,,:);
end
```

```
%300-700-600
hinfol1= hdf5info('y500z400.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,401:500,301:400)=a312(1,x,:);
V(x,401:500,301:400)=a312(2,x,:);
W(x,401:500,301:400)=a312(3,x,:);
end
```

```
hinfol1= hdf5info('y500z400.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,401:500,301:400)=a312(1,x,:);
end
```

```
%300-300-700
hinfol1= hdf5info('y100z500.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,1:100,401:500)=a312(1,x,:);
V(x,1:100,401:500)=a312(2,x,:);
W(x,1:100,401:500)=a312(3,x,:);
end
```

```
hinfol1= hdf5info('y100z500.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,1:100,401:500)=a312(1,x,:);
end
```

```
%300-400-700
hinfol1= hdf5info('y200z500.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,101:200,401:500)=a312(1,x,:);
V(x,101:200,401:500)=a312(2,x,:);
W(x,101:200,401:500)=a312(3,x,:);
end
```

```
hinfol1= hdf5info('y200z500.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,101:200,401:500)=a312(1,x,:);
end
```

```
%300-500-700
hinfol1= hdf5info('y300z500.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,201:300,401:500)=a312(1,x,:);
V(x,201:300,401:500)=a312(2,x,:);
W(x,201:300,401:500)=a312(3,x,:);
end
```

```
hinfol1= hdf5info('y300z500.h5')
a312=hdf5read(hinfol1.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,201:300,401:500)=a312(1,x,:);
end
```

```

%300-600-700
hinfo11= hdf5info('y400z500.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,301:400,401:500)=a312(1,x,,:);
V(x,301:400,401:500)=a312(2,x,,:);
W(x,301:400,401:500)=a312(3,x,,:);
end

hinfo11= hdf5info('y400z500.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,301:400,401:500)=a312(1,x,,:);
end

%300-700-700
hinfo11= hdf5info('y500z500.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(6));
for x=1:500
U(x,401:500,401:500)=a312(1,x,,:);
V(x,401:500,401:500)=a312(2,x,,:);
W(x,401:500,401:500)=a312(3,x,,:);
end

hinfo11= hdf5info('y500z500.h5')
a312=hdf5read(hinfo11.GroupHierarchy.Datasets(5));
for x=1:500
ROH(x,401:500,401:500)=a312(1,x,,:);
end

save U.mat U
save V.mat V
save W.mat W
save ROH.mat ROH

```

### B3: filtro Favre e analisi della relazione (3.3.10)

```

clc
clear all
close all
load U
load V
load ROH
x0=5;
y0=5;
z0=5;
delta=2*pi/113.7763;
k=1/(delta^3);
u0=zeros(9,9,9);
v0=zeros(9,9,9);
roh0=zeros(9,9,9);
contcx=0;
for cz=z0:10:15
    for cy=y0:4:105

```

```

    for cx=x0:4:105
        contcx=contcx+1;
contz=0;
for z=cz-4:cz+4
    contz=contz+1;
    conty=0;
    for y=cy-4:cy+4
        conty=conty+1;
        contx=0;
        for x=cx-4:cx+4
            contx=contx+1;
            u0(contx,conty,contz)=U(x,y,z);
        end
    end
end
contz=0;
for z=cz-4:cz+4
    contz=contz+1;
    conty=0;
    for y=cy-4:cy+4
        conty=conty+1;
        contx=0;
        for x=cx-4:cx+4
            contx=contx+1;
            v0(contx,conty,contz)=V(x,y,z);
        end
    end
end
contz=0;
for z=cz-4:cz+4
    contz=contz+1;
    conty=0;
    for y=cy-4:cy+4
        conty=conty+1;
        contx=0;
        for x=cx-4:cx+4
            contx=contx+1;
            roh0(contx,conty,contz)=ROH(x,y,z);
        end
    end
end
end
%definisco gli intervalli di integrazione
xint=linspace(-delta/2+(cx*0.00628),delta/2+(cx*0.00628),9);
yint=linspace(-delta/2+(cy*0.00628),delta/2+(cy*0.00628),9);
zint=linspace(-delta/2+(cz*0.00628),delta/2+(cz*0.00628),9);
%triplo integrale su u
uintx=trapz(xint,u0);
uintxy=trapz(yint,uintx);
uintxyz=trapz(zint,uintxy);
u_filt=k*uintxyz;
%triplo integrale su v
vintx=trapz(xint,v0);
vintxy=trapz(yint,vintx);
vintxyz=trapz(zint,vintxy);
v_filt=k*vintxyz;
%triplo integrale su roh
rohintx=trapz(xint,roh0);
rohintxy=trapz(yint,rohintx);
rohintxyz=trapz(zint,rohintxy);
roh_filt=k*rohintxyz;
%triplo integrale su u*v
u_v=u0.*v0;
u_vintx=trapz(xint,u_v);

```

```

u_vintxy=trapz(yint,u_vintx);
u_vintxyz=trapz(zint,u_vintxy);
u_vfilt=k*u_vintxyz;
%triplo integrale su roh*u
roh_u=roh0.*u0;
roh_uintx=trapz(xint,roh_u);
roh_uintxy=trapz(yint,roh_uintx);
roh_uintxyz=trapz(zint,roh_uintxy);
roh_ufilt=k*roh_uintxyz;
%triplo integrale su roh*v
roh_v=roh0.*v0;
roh_vintx=trapz(xint,roh_v);
roh_vintxy=trapz(yint,roh_vintx);
roh_vintxyz=trapz(zint,roh_vintxy);
roh_vfilt=k*roh_vintxyz;
%triplo integrale su roh*u*v
roh_u_v=(roh0.*u0).*v0;
roh_u_vintx=trapz(xint,roh_u_v);
roh_u_vintxy=trapz(yint,roh_u_vintx);
roh_u_vintxyz=trapz(zint,roh_u_vintxy);
roh_u_vfilt=k*roh_u_vintxyz;
%sforzi sottogriglia
s1=roh_ufilt-(roh_filt*u_filt);
s2=u_vfilt-(u_filt*v_filt);
s3=roh_u_vfilt-((roh_filt*u_filt)*v_filt);
s4=roh_vfilt-(roh_filt*v_filt);
%velocità favre
u_favre=(1/roh_filt)*roh_ufilt;
v_favre=(1/roh_filt)*roh_vfilt;
uv_favre=(1/roh_filt)*roh_u_vfilt;
%sforzi sottogriglia favre
theta=uv_favre-(u_favre*v_favre);
%registro le quantità ottenute
theta_f(1,contcx)=theta;
s2_f(1,contcx)=s2;
A(1,contcx)=(s1*s4)/roh_filt^2;
B(1,contcx)=s3/roh_filt;
%medie
theta_med=mean(theta_f,2);
s2_med=mean(s2_f,2);
A_med=mean(A,2);
B_med=mean(B,2);
%identità
scarto=abs(theta_med-s2_med+A_med-B_med);

realiz(1,contcx)=contcx;
scart(1,contcx)=scarto;
    end
  end
end

```

## Bibliografia

- Stephen B. Pope. *Turbulent flows*, pagine 1-9, 34-37,182-197, 558-603. Cambridge University Press, 2000.
- Giuseppe Barletta. *Analisi dei flussi turbolenti attraverso la teoria delle reti complesse. Applicazione alla turbolenza omogenea isotropa*. Politecnico di Torino, 2014.
- Tony Burden. *The length, time and velocity scales of turbulence*. Spring, 2008.
- André Bakker. *Lecture 9 - Kolmogorov's theory*.
- Karima Khusnutdinova. *Kolmogorov's 5/3 law*. Department of Mathematical Sciences, Loughborough University, UK, 2009.
- A.Abbà, C.Cercignani e L.Valdettaro. *Analysis of subgrid scale models*. Computers and mathematics with applications. Pergamon.
- Antonella Abbà. *Large eddy simulation*.
- M.Germano, A.Abbà, R.Arina e L.Bonaventura. *On the extension of the eddy viscosity model to compressible flows*. Physics of fluids, 2014.
- Jan Kleissl. *Field experimental study of the Smagorinsky model and application to large eddy simulation*. Baltimore, Maryland, 2004.
- Marco Fussi. *Analisi numerica della combustione di gas a basso potere calorifico per applicazioni a microturbine a gas*. Università di Bologna, 2011.
- Salvatore Marullo. *Corso di fluidodinamica e termodinamica*, 2005-2006.