



**Politecnico
di Torino**

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

A.a. 2021/2022

Luglio 2022

Tesi di Laurea

STRUTTURE LAGRANGIANE COERENTI

Principali applicazioni in ambito geofisico, medico e aerodinamico

Relatore:

Stefania Scarsoglio

Candidato:

Beatrice Sicca

Indice

Introduzione	4
1. Richiami fisici	5
1.1 Punto di vista Euleriano e Lagrangiano	5
1.2 Curve per la visualizzazione del campo di moto del fluido	6
1.3 Equazioni di Navier-Stokes	7
2. Strutture Coerenti	9
2.1 Metodi di individuazione Euleriani	9
2.2.1 Criterio - Δ	10
2.2.2 Criterio - Q	10
2.2.3 Criterio - λ_2	11
2.2 Considerazioni sui metodi Euleriani	11
3. Strutture Lagrangiane Coerenti	12
3.1 Metodi di individuazione Lagrangiani	14
3.1.1 Tensore di deformazione di Cauchy-Green	14
3.1.2 Finite Time Lyapunov Exponent (FTLE)	16
4. Applicazioni	18
4.1 LCSs in ambito geofisico	18
4.2 LCSs in ambito medico	22
4.3 LCSs in ambito aerodinamico	27
Conclusioni	36
Bibliografia	38
Ringraziamenti	39

Introduzione

Le traiettorie delle particelle fluide risultano sensibili alle condizioni iniziali. Questo rende le valutazioni e i modelli realizzati sulla base delle osservazioni dei percorsi seguiti dalle singole particelle semplicemente inaffidabili. Dietro alle traiettorie seguite dai traccianti, esiste tuttavia un robusto scheletro di superfici materiali che danno forma a questi moti, governano il flusso, influenzando il moto delle particelle limitrofe. Queste superfici prendono il nome di Strutture Lagrangiane Coerenti (LCS) e saranno il tema di questa tesi. Esse inquadrano, quantificano e persino predicono gli aspetti salienti del trasporto di materia nel flusso.

Si richiameranno inizialmente alcuni concetti alla base della fluidodinamica, per poi passare a definire le strutture coerenti e studiare i metodi che permettono di individuarle. Questi si dividono in due categorie, criteri di individuazione Euleriani e Lagrangiani. Si analizzeranno i primi, si vedranno i limiti di tali metodi per poi passare a quelli Lagrangiani. In particolare si studierà il metodo basato sul tensore delle deformazioni di Cauchy-Green e quello fondato sul Finite Time Lyapunov Exponent (FTLE).

Infine si passeranno in rassegna le principali applicazioni delle Strutture Lagrangiane Coerenti in ambito geofisico, medico e aerodinamico.

Capitolo 1

Richiami fisici

Prima di addentrarci nello studio della turbolenza e delle strutture coerenti è necessario richiamare alcuni fondamentali concetti fluidodinamici che risulteranno utili per la comprensione del tema. Ricordiamo quindi la distinzione tra punto di vista Euleriano e Lagrangiano, le definizioni di linea di corrente e traiettoria ed infine le equazioni di Navier-Stokes.

1.1 Punto di vista Euleriano e Lagrangiano

Quando si studia il moto di un fluido possono essere utilizzati due diversi approcci: la descrizione Lagrangiana e quella Euleriana [1].

La prima descrizione rappresenta l'approccio più naturale e intuitivo per analizzare il moto di un fluido: si tratta di andare ad individuare ogni singola particella nella sua posizione iniziale e di seguirla nella sua traiettoria, analizzando l'evoluzione temporale di ogni quantità fisica ad essa associata. I parametri che individuano la posizione iniziale della particella e il tempo rappresentano le variabili indipendenti, mentre la posizione attuale, la velocità, l'accelerazione o le altre variabili fluidodinamiche (quali pressione e densità) rappresentano quelle dipendenti. Benché questo approccio risulti molto naturale, la sua applicazione non è semplice.

La descrizione Euleriana invece analizza l'evoluzione temporale di ogni variabile fluidodinamica in ogni punto interessato dal moto fluido. Fissato quindi un punto, la sua posizione e il tempo risulteranno le variabili indipendenti, mentre le grandezze fluidodinamiche, che sono campi scalari o vettoriali, saranno le variabili dipendenti dell'analisi.

Le due descrizioni non sono però scorrelate: la derivata materiale di una generica grandezza $Q(r,t)$, funzione della posizione nello spazio r e del tempo t ,

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + (V \cdot \nabla)Q \quad (1)$$

rappresenta il legame tra questi due diversi approcci.

1.2 Curve per la visualizzazione del campo di moto del fluido

Per poter descrivere graficamente il campo di moto di un fluido è necessario individuare alcune famiglie di curve nello spazio [1]:

- Traiettoria: rappresenta il luogo dei punti nello spazio occupati da un elemento fluido in istanti di tempo successivi, è la curva che esso descrive durante il suo movimento. Risulta essere un'entità Lagrangiana;
- Linea di corrente (streamline): curva tangente in ogni suo punto al campo di velocità in un dato istante. Queste linee sono entità Euleriane, definite sulla base del campo di velocità in un dato istante di tempo. Qualora il flusso fosse instazionario, il campo di velocità varierebbe nel tempo e quindi le linee di corrente non coinciderebbero con le traiettorie;
- Streakline: luogo dei punti occupati, in un dato istante, da tutte le particelle che sono state rilasciate da uno stesso punto nello spazio ad intervalli di tempo;
- Timeline: luogo dei punti occupati da tutte le particelle che sono state rilasciate in punti diversi dello spazio nello stesso istante;
- Linea materiale: linea nel campo di moto che unisce tutte le particelle che si trovano su di essa. Queste particelle possono muoversi spostando, deformando, ruotando e stirando la linea materiale, che quindi si muove con il fluido.

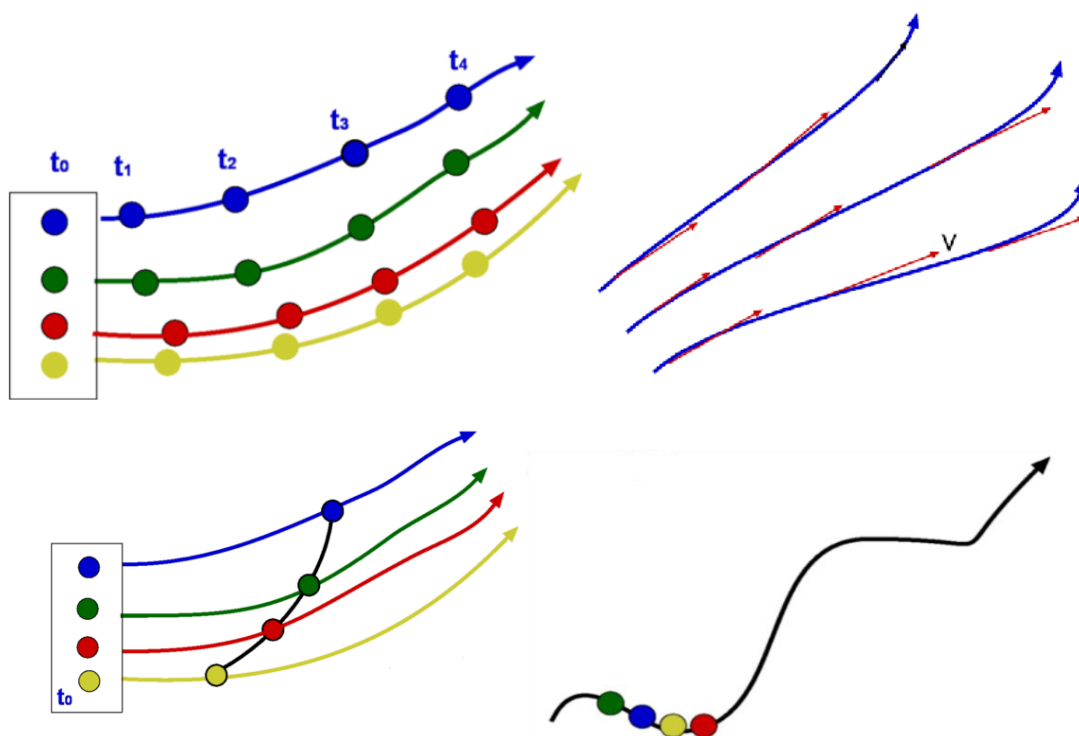


Figura 1 In alto a sinistra traiettoria, a destra linea di corrente, in basso a sinistra timeline e a destra streakline.

1.3 Equazioni di Navier-Stokes

L'obiettivo della fluidodinamica è determinare i campi scalari e vettoriali che descrivono il comportamento degli elementi fluidi come soluzione delle equazioni del moto fluido, sistema di equazioni differenziali ottenuto applicando i principi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia totale [1]. Tali equazioni prendono il nome di equazioni di Navier-Stokes (NSE) e la loro risoluzione permette di ricavare il campo vettoriale della velocità \mathbf{V} , la densità ρ , l'energia totale E e poi, tramite queste, le restanti variabili che definiscono lo stato termodinamico del fluido in esame.

Riportiamo le equazioni di Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 & (2) \\ \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \left[\mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} \right] + \mathbf{f} & (3) \\ \frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (p\mathbf{V}) + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \left\{ \left[\mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{V} \right\} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{1}{\rho} Q_v + \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} & (4) \end{cases}$$

dove p è la pressione, μ è la viscosità dinamica, \mathbf{I} è la matrice identità, $\rho \mathbf{f}$ sono le forze di campo per unità di volume, Q_v sono le sorgenti di calore volumiche, k è il coefficiente di conducibilità termica e T è la temperatura.

Queste equazioni governano sia flussi estremamente semplici, come quelli laminari, ma anche fenomeni estremamente complessi, come i moti turbolenti.

La turbolenza rimane ad oggi uno dei fenomeni irrisolti della fisica. L'utilizzo delle equazioni di Navier-Stokes per descrivere il moto dei fluidi, e quindi anche la turbolenza, presenta un grosso limite: esse costituiscono un sistema di equazioni differenziali non lineari, la soluzione esatta delle quali è possibile solo in un numero limitato di casi. Tra questi figurano i campi di moto stazionari in cui la velocità cambia solo secondo una direzione. L'ipotesi di stazionarietà inoltre limita l'analisi al caso di moto laminare.

Per quanto concerne i flussi turbolenti, estremamente più complessi, data la forte non linearità che caratterizza il termine convettivo, non è possibile risolvere le NSE in forma chiusa, e quindi l'unica via rimane la soluzione diretta delle equazioni per via numerica. Vediamo ora brevemente i tre macro-approcci di approssimazione numerica che possiamo adottare per risolvere le NSE, ovvero l'approccio DNS, quello RANS e infine LES [2].

- Direct Numerical Simulation (DNS): le NSE sono risolte senza l'utilizzo di ulteriori modellizzazioni. A causa dell'enorme differenza tra le scale dei diversi fenomeni che interessano i flussi turbolenti, questo approccio richiede un'enorme quantità di punti di griglia per eseguire la simulazione. Poiché solo le quantità mediate possono essere usate per la modellizzazione, è richiesta una trattazione statistica della soluzione instabile tridimensionale ottenuta a seguito della simulazione. L'approccio DNS fornisce tutti i dettagli del flusso, ma a causa dell'elevatissimo costo computazionale è utilizzato solo per gli studi di configurazioni caratterizzate da numero di Reynolds moderato;
- Reynolds Averaged Navier Stokes equations (RANS): viene applicata una trattazione statistica delle equazioni di Navier-Stokes, le quali vengono poi risolte per fornire direttamente delle quantità mediate. Procedendo in questo modo si perdono i fenomeni di piccola scala, ma si riducono sia il costo computazionale che i punti di griglia richiesti. Per queste ragioni è il metodo maggiormente applicato. Il prezzo da pagare risulta però la necessità di modellizzare le relazioni che compaiono quando si mediano i termini non lineari delle equazioni di base. Questo compito risulta complesso e limita la generalità dell'approccio RANS;
- Large Eddy Simulation (LES): le NSE sono filtrate prima di ricercarne la soluzione numerica. In questo modo solo i fenomeni di piccola scala vengono modellizzati, mentre quelli più grandi vengono calcolati direttamente. Questo approccio può essere visto come una via di mezzo tra i due precedenti. Richiede infatti un maggior costo computazionale dell'approccio RANS, ma un minor sforzo di modellizzazione in quanto i fenomeni di piccola scala sono più universali e generalizzabili in natura, rispetto a quelli di vasta scala. Viene a volte applicato al posto di DNS anche per configurazioni piuttosto semplici.

Capitolo 2

Strutture coerenti

In questa tesi affronteremo lo studio delle cosiddette strutture coerenti, strutture caratteristiche della turbolenza. Si può osservare che, durante la transizione di un flusso dallo stato laminare a quello turbolento, innescata per effetto di un'oscillazione nel campo di velocità o di pressione o ancora per una variazione dell'attrito con la parete o per un aumento del numero di Reynolds, si ha la genesi di alcune strutture che rappresentano lo scheletro della turbolenza, i vortici [3].

Tra i vari vortici che possono essere osservati nella turbolenza, alcuni sono di grande interesse a causa delle loro peculiari caratteristiche: essi tendono a rimanere all'interno del campo di moto, riproducendo se stessi con una certa frequenza e con una struttura relativamente organizzata. Queste strutture vorticose prendono il nome di strutture coerenti.

Le strutture coerenti sono regioni a vorticità concentrata, che evolvono nello spazio e nel tempo all'interno della turbolenza, mantenendo però una forma e un'organizzazione spaziale piuttosto ordinata, preservando gran parte dell'energia della turbolenza e dominando il trasporto della stessa [4].

Vi sono diversi modi per individuare tali strutture, bisogna però tenere a mente che le dimensioni di queste configurazioni non rappresentano un criterio di individuazione delle stesse, ma il livello di organizzazione sì: esso infatti permette di distinguere la struttura coerente rispetto all'intero flusso turbolento.

I metodi per individuare le strutture coerenti si differenziano in due categorie: quelli Euleriani, sviluppati per primi, e quelli Lagrangiani. Descriveremo brevemente i primi, concentrandoci poi sullo studio dei metodi Lagrangiani e delle Strutture Lagrangiane Coerenti.

2.1 Metodi di individuazione Euleriani

I metodi di individuazione Euleriani identificano le strutture coerenti basandosi sullo studio del campo di velocità istantaneo e sul suo gradiente [5]. Partendo infatti da questi ultimi è possibile ricavare alcune grandezze che definiscono le condizioni per le quali una determinata regione del

moto fluido possa essere considerata una struttura vorticoso coerente. Alcuni tra questi metodi sono il criterio Δ , il criterio Q e il criterio λ_2 .

2.1.1 Criterio - Δ

Chong, Perry e Cantwell [6] usarono gli autovalori del tensore gradiente del campo di velocità $\nabla\mathbf{V}$ per individuare localmente il modello delle linee di corrente attorno ad un punto nel flusso, in un sistema di riferimento in moto con la velocità del punto stesso. Essi individuarono come cuore di un vortice una regione del flusso con autovalori complessi del tensore $\nabla\mathbf{V}$. Gli autovalori complessi implicano che il modello delle linee di corrente localmente sia chiuso o a spirale. Definito quindi il gradiente del campo di velocità come

$$\nabla\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

il polinomio caratteristico di tale matrice risulterà

$$p = \lambda^3 - \mathbf{P}\lambda^2 + \mathbf{Q}\lambda - \mathbf{R}, \quad (6)$$

dove $\mathbf{R} = \det(\nabla\mathbf{V})$, $\mathbf{P} = 0$ per flussi incompressibili, e il secondo invariante positivo risulta essere $\mathbf{Q} = -\frac{1}{2}u_{i,j}u_{j,i}$.

Le strutture coerenti, secondo questo metodo di individuazione, vengono classificate come quelle regioni in cui $\Delta = \left(\frac{\mathbf{Q}}{3}\right)^3 + \left(\frac{\mathbf{R}}{2}\right)^2 > 0$, condizione per la quale gli autovalori di $\nabla\mathbf{V}$ sono complessi.

2.1.2 Criterio - Q

Il criterio Q , sviluppato da Hunt, Wray e Moin [7], individua le regioni dove la rotazione domina la deformazione nel flusso. Definiti con \mathbf{S} e $\mathbf{\Omega}$ la parte simmetrica e quella antisimmetrica del gradiente del campo di velocità $\nabla\mathbf{V}$ e con Q il secondo invariante del tensore $\nabla\mathbf{V}$, per un flusso incompressibile si avrà

$$Q = -\frac{1}{2}u_{i,j}u_{j,i} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{\Omega}\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2), \quad (7)$$

dove $\|\cdot\|$ è la norma euclidea della matrice. Una struttura coerente viene definita e individuata come una regione dove $Q > 0$.

2.1.3 Criterio - λ_2

Nonostante non sia possibile utilizzare come criterio di individuazione del cuore di un vortice la presenza di una zona del flusso in cui la pressione risulta minima, questo metodo è stato il punto di partenza dell'analisi di Jeong e Hussain [8] che ha portato allo sviluppo del criterio - λ_2 . Non sempre infatti laddove la pressione raggiunge il minimo vi sono vortici, o, al contrario, la viscosità può, in alcuni casi, eliminare la diminuzione di pressione all'interno del cuore del vortice. Tuttavia è possibile trascurare questi due effetti, ed individuare proprio le zone a bassa pressione come quelle in cui si formano le strutture vorticoso coerenti.

L'obiettivo è quindi quello di determinare localmente l'esistenza di un minimo di pressione a causa del moto vorticoso. Si definisce allora il cuore di un vortice come una regione connessa con due autovalori negativi della matrice $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$. Poiché $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$ è una matrice simmetrica, ammette solo autovalori reali, che chiameremo λ_1 , λ_2 , e λ_3 . Se si pone $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, per soddisfare la condizione di avere due autovalori negativi è sufficiente porre $\lambda_2 < 0$.

Le strutture coerenti vengono quindi individuate nel flusso come quelle regioni in cui l'autovalore λ_2 della matrice $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$ risulta $\lambda_2 < 0$.

2.2 Considerazioni sui metodi Euleriani

I metodi di individuazione Euleriani possono effettivamente inquadrare le caratteristiche coerenti del campo istantaneo di velocità, ma presentano due importanti limiti. Essi infatti fotografano i vortici solo in un certo istante di tempo, ne fanno una istantanea, mentre noi abbiamo definito le strutture coerenti come delle strutture che rimangono nel flusso per un determinato periodo di tempo, muovendosi con esso [3]. Pertanto osservare il flusso turbolento limitandosi a un solo istante di tempo può risultare molto limitante. Inoltre essi mancano di oggettività, ossia non risultano indipendenti dall'osservatore. Un metodo di individuazione di tali strutture deve essere oggettivo, cioè deve garantire che le conclusioni alle quali si perviene siano indipendenti da una trasformazione delle coordinate Euclidee.

Risulta quindi necessario applicare altri criteri di individuazione che superino questi limiti, ovvero che siano metodi oggettivi e che permettano di individuare le strutture ad alta energia persistenti nel tempo. I criteri di individuazione Lagrangiani rispondono proprio a questi requisiti.

Capitolo 3

Strutture Lagrangiane Coerenti

La teoria delle Strutture Lagrangiane Coerenti, sviluppata da Haller e Yuan [9] a partire dal 2000, ha permesso di trovare le cause della coerenza in un flusso turbolento, individuandole in particolari superfici materiali che organizzano il flusso circostante in schemi ordinati. Tali superfici prendono appunto il nome di Strutture Lagrangiane Coerenti (LCS) e vengono definite come le superfici materiali maggiormente repulsive, attrattive e di taglio che costituiscono lo scheletro della dinamica delle particelle Lagrangiane. Si tratta di superfici materiali che si muovono con il flusso, ma non sono attraversate dalla materia, costituiscono cioè delle barriere al trasporto. In sostanza le LCSs sono strutture coerenti analizzate sulla base di quantità derivate da concetti Lagrangiani, quali le traiettorie. Lo studio del flusso basato solo sulle traiettorie delle singole particelle non può però dare risultati attendibili e sempre realistici, per via della forte dipendenza delle traiettorie dalla posizione inizialmente occupata dalle particelle. Questa teoria supera tale limite, andando ad individuare quelle superfici materiali che influenzano e danno forma alle singole traiettorie. Rintracciare queste superfici, partendo da dati sperimentali o da simulazioni numeriche del flusso, permette di comprendere meglio la geometria del flusso stesso, quantificare il trasporto di materia e predire, o addirittura influenzare, i fenomeni di mescolamento.

La teoria dei sistemi dinamici (teoria che si occupa di analizzare equazioni differenziali mediante metodi analitici, geometrici, topologici e numerici) permette di studiare la coerenza lagrangiana in campi di velocità stabili, indipendenti dal tempo, oppure periodici o quasi periodici, cioè in tutti quei campi in cui è possibile conoscere a priori l'evoluzione del campo di velocità. Permette di individuare sì i moti ricorrenti e ordinati, come la presenza di punti fissi, di orbite periodiche o di collettori stabili ed instabili, ma solo per flussi ideali, in cui, in un tempo infinitamente lungo, queste strutture ricorrenti guadagnano un'influenza decisiva sulle traiettorie seguite dai traccianti e diventano le Strutture Lagrangiane Coerenti del flusso. Prendiamo come esempio un punto di sella [10] ovvero l'intersezione tra una linea materiale che si comporta da barriera repulsiva al trasporto (ovvero un collettore stabile) e una linea materiale che costituisce una barriera attrattiva al trasporto (collettore instabile). Le particelle del fluido si avvicinano al punto di sella lungo la linea repulsiva, e poi ne vengono allontanate lungo la linea ortogonale che costituisce il collettore instabile attrattivo. Il collettore instabile quindi organizza il trasporto della materia, attraendo le particelle vicine. Si è in

questo modo spiegata la presenza di una struttura ordinata e la traiettoria seguita dalle particelle con l'uso di linee materiali che si comportano per l'appunto da LCSs.

Queste traiettorie ideali a cui si perviene mediante la dinamica non lineare non esistono nella realtà, dove i flussi sono principalmente aperiodici e il campo di velocità è noto solo per mezzo di osservazioni o in forma di simulazioni numeriche su intervalli di tempo limitati. Per studiare i flussi reali e aperiodici sarà necessario applicare un nuovo approccio: osservare le regioni coerenti e cercare le esatte strutture dinamiche che creano queste forme. Occorrerà quindi ripensare la teoria dei sistemi dinamici non lineari per i flussi limitati nel tempo.

Da queste osservazioni nasce proprio la teoria delle Strutture Lagrangiane Coerenti, teoria che richiede che siano soddisfatti alcuni particolari requisiti per poter individuare correttamente le LCSs: l'oggettività, l'evoluzione del flusso in un intervallo di tempo limitato, l'invarianza lagrangiana e la convergenza spaziale [9].

Richiedendo che l'analisi sia oggettiva si richiede che le conclusioni a cui si perviene siano indipendenti dall'osservatore. La teoria delle Strutture Lagrangiane Coerenti può dirsi oggettiva se i suoi risultati non cambiano a seguito di una trasformazione delle coordinate Euclidee. Come abbiamo visto, i criteri di individuazione Euleriani non sono oggettivi, mentre quelli Lagrangiani come il Finite Time Lyapunov Exponent (FTLE) sì. I criteri non oggettivi di solito sono più semplici da calcolare, ma possono fornire risultati sia falsi positivi che falsi negativi. Questo non rappresenta un grosso ostacolo nei flussi stabili o periodici, per i quali è semplice riconoscere le regioni del flusso classificate erroneamente come LCSs, mentre risulta più limitante per i flussi complessi, nei quali la risposta non è nota a priori.

Altro requisito che deve essere soddisfatto è che il sistema evolva in un intervallo di tempo limitato. Infatti i concetti propri dell'analisi di flussi ideali, non limitati nel tempo, quali la stabilità o i collettori stabili e instabili, diventano matematicamente indefiniti se utilizzati per studiare flussi aperiodici limitati nel tempo. Le LCSs convergono con questi collettori invarianti, ma solo se i collettori esistono per tempi infinitamente lunghi. Un metodo lagrangiano può individuare sistematicamente i modelli del trasporto di materia non ricorrenti solo se è definito per sistemi che evolvono in un intervallo di tempo finito.

Per quanto riguarda la terza caratteristica, l'invarianza lagrangiana, ricordiamo appunto che il termine "Lagrangiane" nell'acronimo LCS si riferisce al fatto che queste superfici devono muoversi ed evolvere con il flusso stesso, senza essere attraversate da materia (barriere al trasporto). Per

essere individuate come Strutture Lagrangiane Coerenti, queste superfici devono essere invarianti nello spazio esteso delle fasi della posizione e del tempo, e di conseguenza si devono muovere con il flusso nello spazio delle posizioni.

Infine, affinché la teoria delle Strutture Lagrangiane Coerenti sia consistente, occorre che sia garantita la convergenza spaziale a un limite continuo quando la griglia computazionale viene raffinata. Questo per assicurarsi che il campo identifichi unicamente un punto materiale come parte di una LCS.

3.1 Metodi di individuazione Lagrangiani

Abbiamo detto che i metodi di individuazione Euleriani presentano numerosi limiti, legati soprattutto alla loro mancanza di oggettività. Analizziamo ora alcuni metodi Lagrangiani di individuazione delle LCSs, metodi che risultano essere oggettivi e che forniscono informazioni sull'evoluzione temporale di tali strutture, svincolandosi dalla semplice istantanea fornita dai criteri Euleriani.

3.1.1 Tensore delle deformazioni di Cauchy-Green

Definito un campo di velocità $\mathbf{V} = (x, t)$ in un intervallo di tempo limitato $[t_0, t_1]$ e la posizione occupata da una particella $x = (x^1, x^2, x^3)$ nel dominio $x \in U$ con $U \subset \mathbb{R}^3$, questo campo \mathbf{V} modificherà la posizione delle particelle, definendo la loro traiettoria [9]. La posizione occupata da una particella all'istante t sarà pertanto $x(t; t_0, x_0)$, funzione della posizione iniziale x_0 . Possiamo quindi definire la mappa del flusso

$$F_{t_0}^t = x(t; t_0, x_0) \quad (8)$$

che fornisce la posizione finale x dell'elemento fluido a causa del flusso, a partire dalla sua posizione iniziale x_0 .

Consideriamo quindi una superficie materiale $\mathcal{M}(t_0)$ all'istante di tempo iniziale. Tale superficie evolverà nel tempo insieme al flusso occupando quindi al tempo t la posizione $\mathcal{M}(t) = F_{t_0}^t(\mathcal{M}(t_0))$. Per rintracciare la coerenza Lagrangiana, siamo interessati ad individuare le superfici materiali $\mathcal{M}(t)$ con un eccezionale impatto sulla deformazione degli elementi fluidi limitrofi.

Lo stesso discorso vale per i flussi bidimensionali dove la ricerca si volge verso le linee materiali che influenzano maggiormente le traiettorie vicine.

Possiamo quindi definire il tensore delle deformazioni di Cauchy-Green come

$$C_{t_0}^t(x_0) = [\nabla F_{t_0}^t(x_0)]^T \nabla F_{t_0}^t(x_0), \quad (9)$$

avente autovalori $\lambda_i(x_0)$ e autovettori $\xi_i(x_0)$ con $i = 1 \dots n$ e $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$

($n = 2$ per flussi bidimensionali, $n = 3$ per flussi tridimensionali). I campi di tale tensore sono oggettivi, ovvero risultano invarianti rispetto a un cambiamento Euclideo delle coordinate.

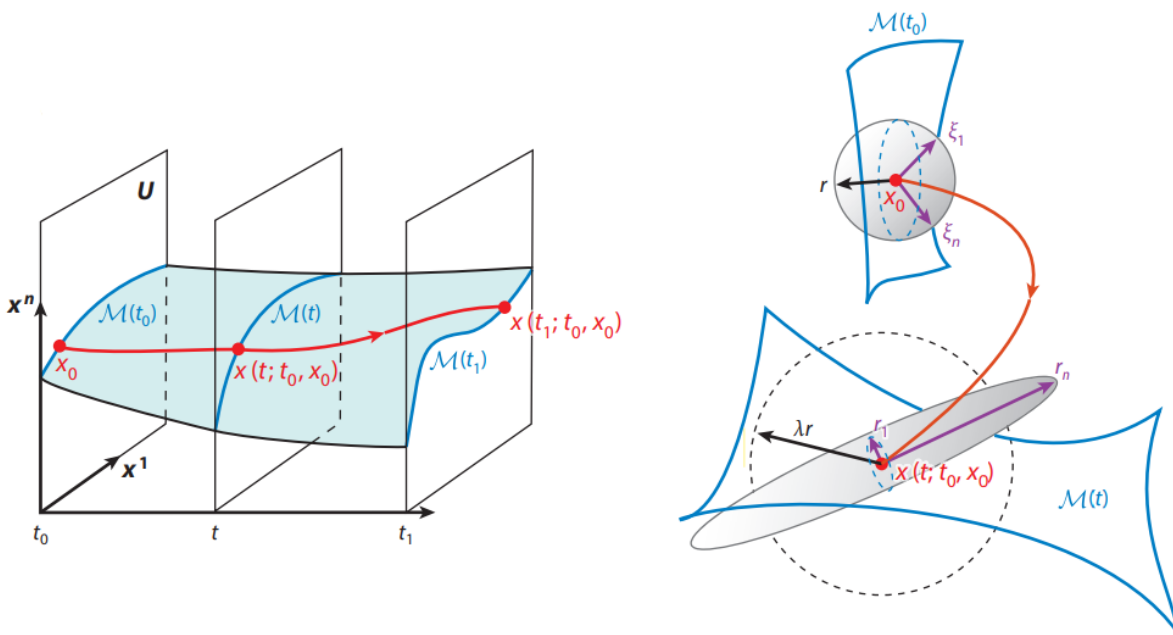


Figura 2 A sinistra evoluzione di una superficie materiale $\mathcal{M}(t)$ nello spazio esteso delle fasi, a destra deformazione di una sfera in un ellissoide i cui assi principali hanno lunghezza proporzionale agli autovalori e direzione definita dagli autovettori. Fonte [9].

Analizziamo ora il significato geometrico di questi autovalori e autovettori. Consideriamo una sfera infinitesimale rilasciata nel punto x_0 , essa verrà trasportata dal flusso, seguirà una traiettoria $x(t; t_0, x_0)$ e, dopo un certo t , si sarà deformata in un ellissoide i cui assi principali hanno lunghezza proporzionale agli autovalori $\lambda_i(x_0)$ e direzione definita dagli autovettori $\xi_i(x_0)$.

Per i flussi bidimensionali il gradiente della mappa del flusso risulta

$$\nabla F_{t_0}^t(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x_0^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x_0^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x_0^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x_0^2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

e il tensore di Cauchy-Green si riduce ad una matrice simmetrica 2x2 calcolata per ogni posizione iniziale nel fluido. Presenta quindi due autovalori positivi e i due autovettori risultano perpendicolari.

Definiamo ora le linee di deformazione come quelle curve che sono tangenti ovunque al campo dell'autovettore ξ_1 del più piccolo autovalore λ_1 . Conseguentemente è possibile individuare le LCSs all'istante di tempo iniziale t_0 come le linee di deformazione con i più alti valori medi locali dell'autovalore più grande del tensore di Cauchy-Green, ossia di λ_2 [10].

Dunque le posizioni iniziali delle LCSs sono estratte ricercando le linee di deformazione localmente più attrattive e più repulsive, mentre le successive posizioni delle Strutture Lagrangiane Coerenti vengono ricavate di conseguenza per effetto dell'advezione, basandosi sulla mappa del flusso.

3.1.2 Finite Time Lyapunov Exponent (FTLE)

La cosiddetta funzione Finite Time Lyapunov Exponent (FTLE) è una misura della sensibilità del comportamento delle particelle del fluido rispetto alla posizione inizialmente occupata. Per determinare il campo del FTLE occorre valutare quanto le particelle inizialmente vicine si siano allontanate le une dalle altre in un intervallo di tempo finito sotto l'azione del campo di velocità. Le regioni in cui la separazione è stata notevole presentano un alto valore di FTLE e rappresentano le zone in cui si ha una maggiore divergenza delle particelle. Procedendo in modo analogo ma a ritroso nel tempo, si possono identificare le regioni ad alto FTLE indietro nel tempo. Queste risulteranno quindi le zone in cui, secondo un'analisi cronologica, in avanti nel tempo, si ha una maggiore convergenza locale [10].

Nel 2001 Haller ricavò che queste creste del campo FTLE rappresentano proprio le Strutture Lagrangiane Coerenti repulsive del flusso in un'analisi in avanti nel tempo, mentre muovendoci a ritroso esse costituiscono le Strutture Lagrangiane Coerenti attrattive.

In sostanza il Finite Time Lyapunov Exponent costituisce una media in un intervallo di tempo limitato del tasso di massima espansione per una coppia di particelle trasportate dal flusso.

In particolare se consideriamo una particella posta in x_0 all'istante di tempo iniziale [11] che viene poi trasportata dal flusso, questa particella si sposta in $F_{t_0}^{t_1} = x(t_1; t_0, x_0)$ in un intervallo di tempo $(t_1 - t_0)$. Per comprendere quanto la traiettoria si sia stirata ipotizziamo che questa particella venga perturbata nella sua posizione iniziale, chiamiamo quindi il disturbo $\delta x(0)$ e valutiamo come questo disturbo evolve nel tempo. Si trova che il massimo allungamento si riscontra quando $\delta x(0)$ è diretto

nella direzione dell'autovettore associato a $\lambda_n(x_0)$, massimo autovalore del tensore delle deformazioni di Cauchy-Green.

Quando si verifica ciò la perturbazione della posizione iniziale evolve nel tempo secondo una legge esponenziale in cui l'esponente risulta essere

$$\Lambda_{t_0}^{t_1} = \frac{1}{|t_1 - t_0|} \log \sqrt{\lambda_n(x_0)}, \quad (11)$$

noto appunto come Finite Time Lyapunov Exponent (FTLE). Osserviamo che a denominatore compare l'intervallo di tempo espresso in valore assoluto, questo per permettere l'integrazione sia in avanti nel tempo, sia a ritroso. Integrando quindi in avanti è possibile individuare le LCSs repulsive come le creste del FTLE, mentre integrando indietro nel tempo si individuano le LCSs attrattive.

Ricavare le LCSs utilizzando le creste del campo FTLE risulta abbastanza semplice da un punto di vista computazionale e fornisce risultati visivamente molto utili, vi sono però degli aspetti negativi non trascurabili. In particolare, con questo metodo si possono ottenere risultati sia falsi positivi che falsi negativi, inoltre spesso le creste non risultano essere propriamente Lagrangiane in quanto presentano un flusso di materia anche piuttosto ampio attraverso esse.

Capitolo 4

Applicazioni

Passiamo ora in rassegna alcuni esempi di applicazioni delle Strutture Lagrangiane Coerenti in diversi campi. Analizzeremo inizialmente come è possibile tracciare e predire la diffusione degli agenti inquinanti in mare, quindi studieremo il flusso del sangue all'interno dei vasi sanguigni e spiegheremo alcuni fenomeni come il ristagno, la separazione o la ricircolazione del flusso sanguigno, infine vedremo come le LCSs possano giocare un ruolo fondamentale nello studio della separazione del flusso da un profilo alare durante uno stallo dinamico.

4.1 LCSs in ambito geofisico: tracciamento agenti inquinanti

Analizziamo quanto avvenuto nell'aprile del 2010 nel Golfo del Messico: un'esplosione sulla piattaforma petrolifera Deepwater Horizon (DWH), vicina alla foce del fiume Mississippi, provocò il riversarsi nell'oceano di circa 4 milioni di barili di petrolio, causando il più grande disastro ambientale nella storia dell'industria petrolifera.

Al tempo la mancanza di predizioni accurate circa la diffusione della contaminazione ostacolò l'applicazione di contromisure efficaci, portando le autorità a stanziare le risorse disponibili laddove non erano necessarie.

Utilizzando le Strutture Lagrangiane Coerenti è oggi possibile eseguire un'analisi più precisa, caratterizzata da risultati matematici esatti, indipendente dal sistema di riferimento e da campi di velocità che non siano quelli disponibili e validati al tempo iniziale (non si utilizzano dati basati su campi di velocità futuri), che permette inoltre di predire con grande accuratezza la localizzazione delle instabilità che influenzano la diffusione dei traccianti a breve termine, senza il pericolo di ottenere falsi positivi o negativi. Ripercorriamo quindi lo studio eseguito sul Golfo del Messico da Olascoaga e Haller [12] nel 2011.

Assumiamo come campo di velocità superficiale un modello generale di circolazione oceanica detto US Navy Coastal Ocean Model (NCOM), e spieghiamo per mezzo delle LCSs la formazione delle due principali instabilità che hanno giocato un ruolo fondamentale nel definire la forma assunta dal petrolio fuoriuscito nell'oceano. Il primo evento che analizzeremo è il cosiddetto "tiger-tail", una

propagazione di petrolio nell'acqua avente la forma di un dito allungato, mentre il secondo è detto "coastal-spread", ovvero la diffusione lungo la costa del petrolio, che ha assunto una forma ripiegata verso l'interno.

Per spiegare la formazione di queste strutture, e quindi poterle predire, è necessario richiamare alcuni concetti. Abbiamo infatti visto che in caso di flussi caratterizzati da campi di velocità stabili, indipendenti dal tempo, le Strutture Lagrangiane Coerenti possono essere individuate con quelle particolari strutture ordinate quali i punti sella. Questi punti sono fissi nel flusso stabile, ovvero sono fermi nel campo e, come abbiamo visto, rappresentano le intersezioni tra collettori stabili e instabili. Sono proprio questi punti di ristagno le uniche possibili cause di instabilità per questi flussi ideali.

Per i flussi non stabili, invece, la mappa del flusso $F_{t_0-T}^{t_0}$ perde ogni relazione diretta con le linee di corrente, le quali cambiano nel tempo e non coincidono più con le traiettorie. In questi flussi le LCSs non possono più essere individuate con i collettori invarianti dei punti sella, ma saranno le linee materiali localmente più attrattive o repulsive. Possiamo individuare dei segmenti di LCSs, che chiameremo cuori, caratterizzati da una forte attrazione ininterrotta sulle linee materiali limitrofe. Questi cuori si comportano da punti sella per i flussi instabili e limitati nel tempo: formano delle piccole e uniformi regioni iperboliche che attraggono la materia lungo una direzione trasversale all'LCS stessa e poi la spingono lungo la LCS, esattamente come nelle intersezioni di collettori stabili ed instabili (Fig. 3). Differiscono però dai punti sella dei flussi stabili per il fatto che si tratta di regioni dinamiche, in movimento con il flusso, e transitorie.

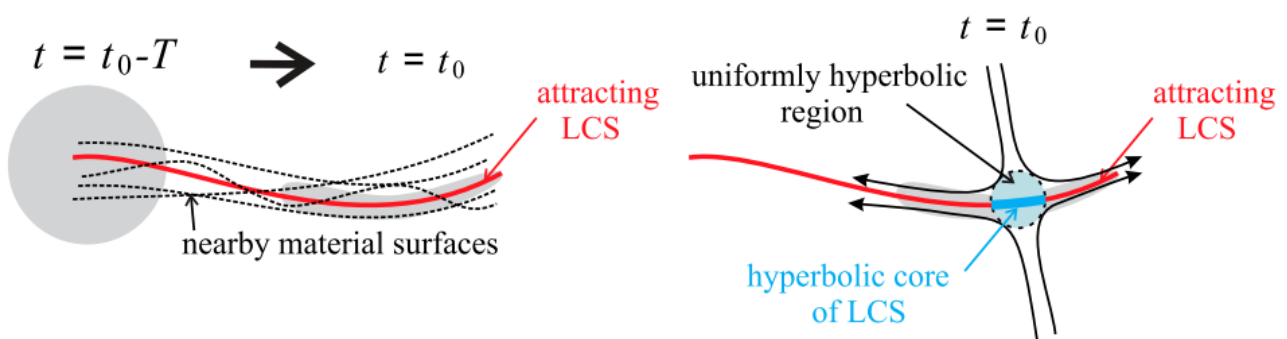


Figura 3 A sinistra la deformazione di una goccia di tracciante inizialmente sferica, per effetto delle limitrofe LCSs attrattive; a destra il cuore iperbolico di una LCS. Fonte [12].

La formazione di una regione iperbolica è un precursore di uno dei due tipi di instabilità che possono caratterizzare la propagazione del tracciante a seconda della posizione del cuore rispetto alla macchia del tracciante. Come si può osservare nella Fig. 4 se il cuore si trova all'interno della

macchia del tracciante, questa si deforma stirandosi lungo la LCS stessa e prendendo la forma di un dito allungato, se invece è all'esterno si avrà una curvatura interna della macchia, che si ripiega su se stessa.

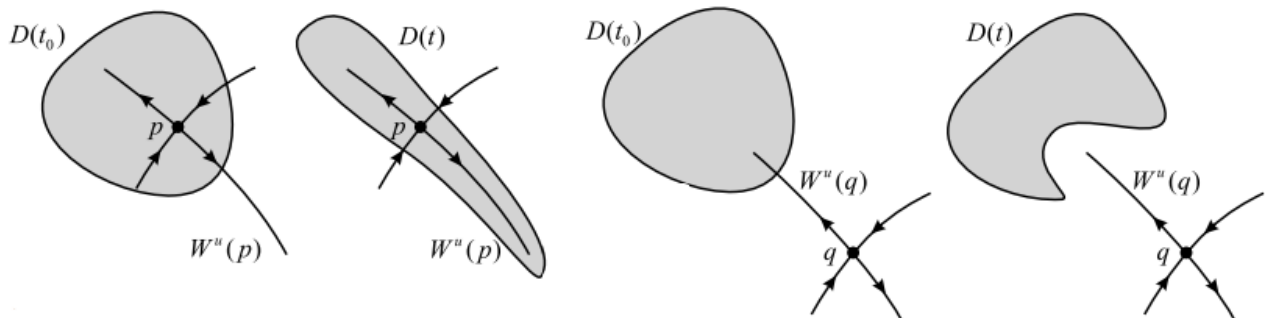


Figura 4 Le due figure a sinistra rappresentano la deformazione di una macchia di tracciante a causa di una regione iperbolica interna al tracciante, le due figure a destra rappresentano la deformazione del tracciante per effetto di una regione iperbolica esterna al tracciante. Fonte [12].

Per identificare i cuori delle Strutture Lagrangiane Coerenti più forti al tempo in cui vogliamo eseguire la previsione, è necessario richiedere che il tasso di deformazione dei cuori di queste LCSs sia più grande di quello delle altre LCSs. Monitorare lo sviluppo dei cuori dentro o fuori dalle macchie dei traccianti, come il petrolio fuoriuscito o eventuali altri possibili agenti inquinanti, costituisce un metodo per eseguire le previsioni circa immediati cambiamenti nella forma del tracciante, senza dover dipendere da dati sulla velocità futura.

Consideriamo quindi i cuori delle LCSs più forti e per mezzo di questi spieghiamo la formazione delle due maggiori instabilità che hanno caratterizzato la diffusione del petrolio nell'oceano.

Partiamo dallo sviluppo del "tiger-tail". Nella Fig. 5, per i diversi tempi t_0 a cui si vuole avere una previsione, sono state rappresentate le regioni iperboliche uniformi più forti con dei cerchi blu, attraversati da frecce a doppia punta, le quali rappresentano la direzione prevista di massimo allungamento Lagrangiano, indicato dall'autovettore ξ_1 . Osserviamo come dal 30 aprile al 2 maggio 2010 l'intensità dei cuori rimane moderata, predicendo la mancanza di imminenti instabilità di vasta scala. Si può notare, tuttavia, la presenza di una regione iperbolica esterna alla macchia di petrolio, la quale genera una sorta di "dito" che si sviluppa verso l'interno del tracciante, in accordo con quanto abbiamo visto in precedenza circa la posizione relativa tra cuore e tracciante.

Dal 9 al 13 maggio 2010 si ha poi la crescita dell'intensità di un cuore, che segnala l'incombente sviluppo di una instabilità di vasta scala.

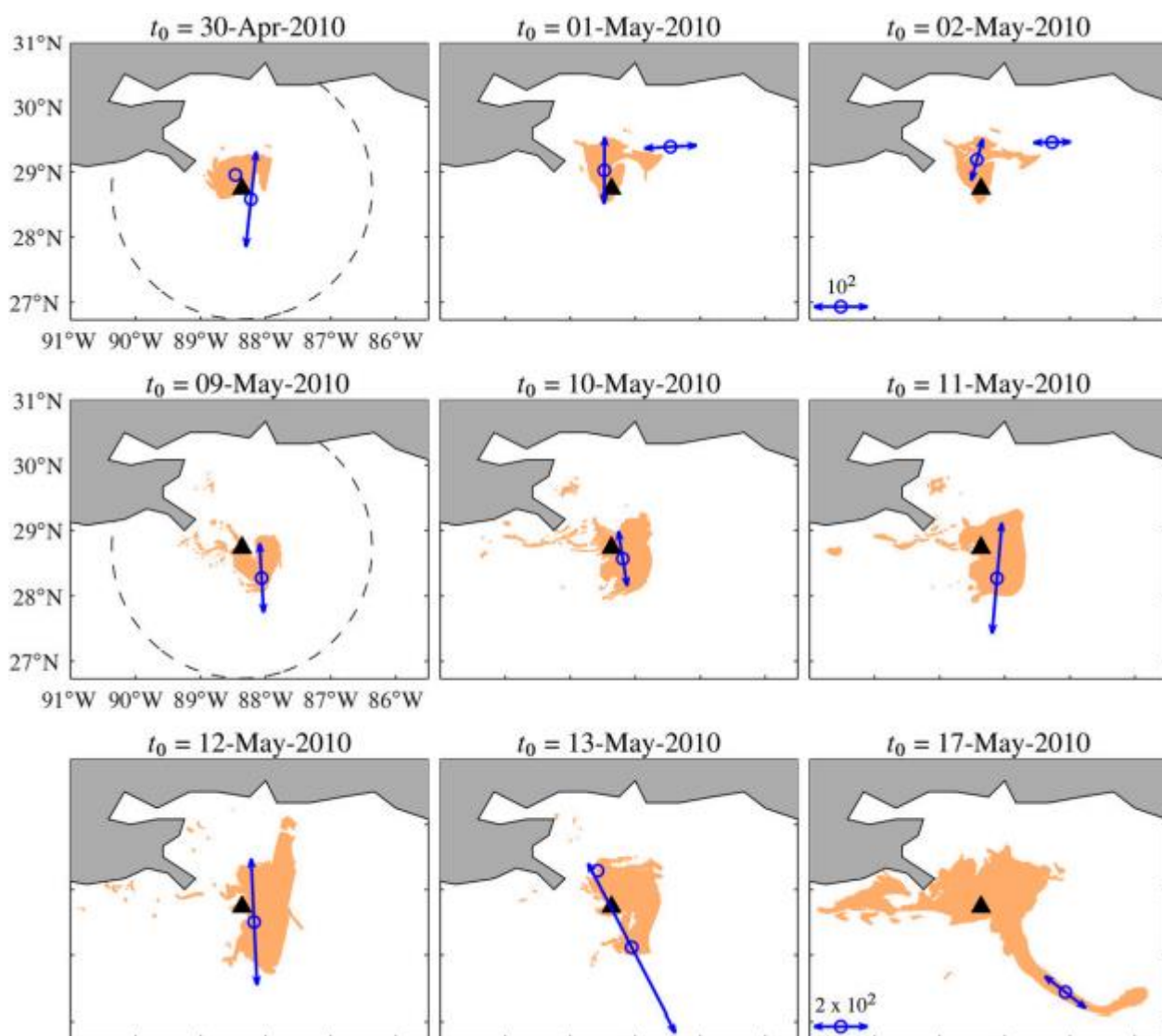


Figura 5 Previsione delle instabilità del “tiger-tail” basata sui cuori delle LCSs. Sequenza di istantanee osservate dal satellite: in arancio è mostrata la distribuzione di petrolio che segue l’orientamento delle frecce blu, indicanti le direzioni di stiramento lagrangiano. I cerchi rappresentano i cuori delle LCSs. Il triangolo rappresenta il punto in cui è avvenuta la fuoriuscita dell’agente inquinante. Fonte [12].

Con il passare del tempo la direzione di massimo allungamento ruota in verso antiorario, predicendo la direzione lungo la quale il petrolio si propagherà acquistando la forma del “tiger-tail” il 17 maggio. Questa importante instabilità viene segnalata dall’analisi realizzata con i cuori delle LCSs circa una settimana prima del suo completo sviluppo, rendendo quindi possibile l’applicazione di misure di contenimento.

Passiamo quindi al “coastal-spread” (Fig. 6), ovvero alla propagazione del petrolio fino alla costa. La spinta del petrolio fuoriuscito verso la costa è generata dalla crescita di una regione iperbolica sviluppatasi intorno al 7 giugno 2010.

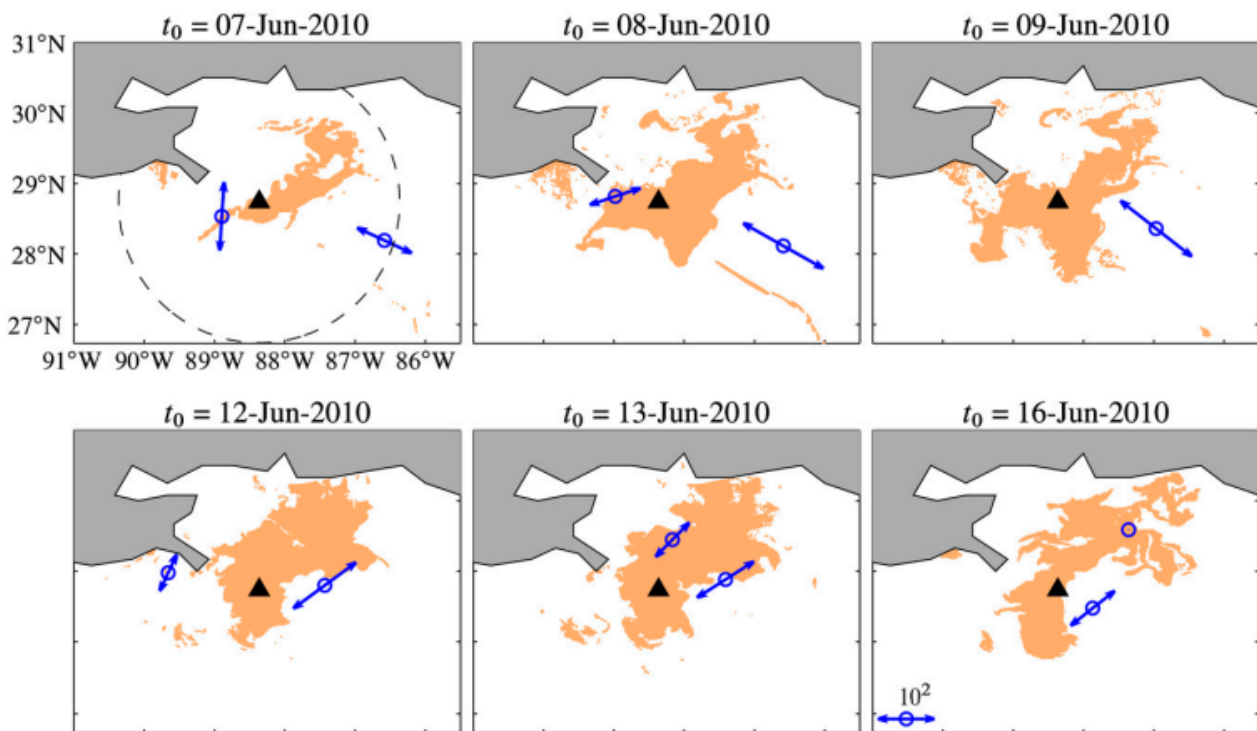


Figura 6 Previsione delle instabilità del “coastal-spread” basata sui cuori delle LCSs. Simboli e colori come in Fig. 3. Fonte [12].

Osserviamo infatti come dal 7 al 9 l'intensità del cuore della LCSs esterno alla macchia di petrolio cresce notevolmente, rendendo possibile la previsione della direzione lungo la quale prenderà forma l'instabilità. La conseguente diffusione dell'agente inquinante lungo la costa, dal 12 al 16 giugno, avviene prevalentemente lungo la direzione sud-ovest nord-est, confermando le previsioni realizzate i giorni precedenti.

Per entrambi i fenomeni di instabilità vi è una stretta corrispondenza tra i risultati ottenuti con questa analisi e le rilevazioni realizzate dai satelliti.

4.2 LCSs in ambito medico: analisi del flusso sanguigno

Individuando le Strutture Lagrangiane Coerenti nei vasi sanguigni è possibile analizzare fenomeni quali il ristagno del flusso sanguigno, la sua separazione da parete, la ripartizione dello stesso attraverso una diramazione e tutti quei meccanismi che ne governano la miscelazione.

Lo studio della fluidodinamica del flusso sanguigno nei vasi è di cruciale importanza per comprendere quei fattori emodinamici che portano allo sviluppo di svariate patologie. Per esempio, le regioni in cui il flusso separa da parete sono state correlate con la localizzazione di placche di

aterosclerosi, la ricircolazione del sangue nell'aorta addominale infrarenale è supposta contribuire allo sviluppo di aneurismi, e la quantificazione della distribuzione del flusso e le sue caratteristiche risultano importanti per valutare i benefici degli interventi chirurgici.

Attualmente i metodi *in vivo* (come la risonanza magnetica con fluido di contrasto PC-MRI) o *in vitro* (come i velocimetri delle immagini di particelle PIV) o ancora quelli computazionali per la caratterizzazione del flusso producono in uscita tipicamente dati Euleriani sulla velocità del flusso sanguigno. Il campo di velocità da solo ha una limitata rilevanza clinica. Esso infatti misura l'istantaneo tasso di cambiamento della posizione delle particelle, mentre solitamente si è maggiormente interessati al trasporto di materia da parte del flusso o alle forze prodotte dal suo moto.

Ricordiamo ancora una volta che i metodi basati sui campi di velocità, quali le linee di corrente, la vorticità, il criterio $-Q$ sono inaffidabili per comprendere il comportamento di flussi instabili, quale proprio il flusso sanguigno.

Nell'analisi eseguita da Shadden e Taylor [13] nel 2008 si è applicato un nuovo metodo per visualizzare direttamente il moto del sangue nelle arterie e il trasporto di materia. Mediante il calcolo del campo del Finite Time Lyapunov Exponent (FTLE) è stato possibile estrapolare le Strutture Lagrangiane Coerenti che governano la dinamica del flusso sanguigno. Come abbiamo visto esse costituiscono le creste del campo del FTLE e a seconda della direzione in cui si esegue l'integrazione, a ritroso o in avanti nel tempo, queste creste rappresenteranno rispettivamente le LCSs attrattive o repulsive. Si è in particolare studiato il flusso attraverso la biforcazione della carotide e quello interno all'aneurisma dell'aorta addominale di un generico paziente, localizzando con l'individuazione delle LCSs eventuali patologie che possono insorgere.

In questo studio si è simulato il flusso di sangue risolvendo le equazioni di Navier Stokes su una griglia computazionale utilizzando un metodo degli elementi finiti. La definizione della griglia e dell'intervallo di tempo varia a seconda del vaso che si sta studiando.

Analizziamo ora l'evolversi del flusso all'interno della biforcazione della carotide [13]. All'ingresso dell'arteria carotidea comune (vedi Fig. 7) consideriamo un flusso pulsante e periodico, di periodo $T = 0.923$ s. All'uscita delle arterie carotidiche interna ed esterna (ICA e ECA), sono state poste condizioni al contorno che garantiscano una appropriata distribuzione del flusso tra ICA ed ECA ed una pressione fisiologica di 70/120 mmHg. Si è trovata la soluzione su cinque cicli cardiaci in modo da garantire la convergenza. I dati sul campo di velocità sono stati utilizzati per calcolare il campo

FTLE a ritroso nel tempo su un ciclo cardiaco. In questo modo si è trovata una LCS attrattiva che si estende dalla fine seno carotideo, cioè dalla base della biforcazione. In Fig. 7 è possibile osservare l'evoluzione di questa Struttura Lagrangiana Coerente in quattro momenti diversi di un ciclo cardiaco.

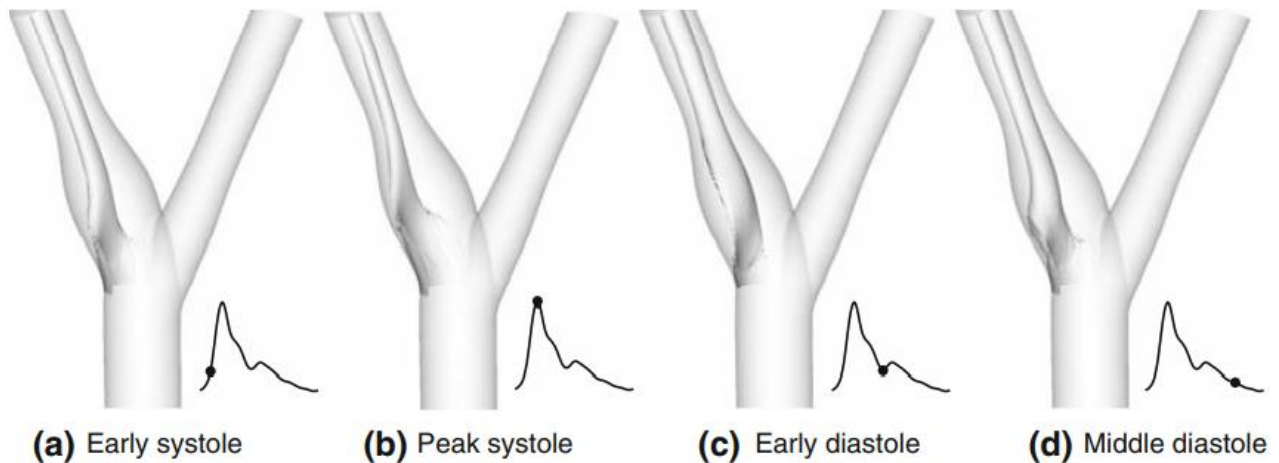


Figura 7 Evoluzione della LCS attrattiva nel seno carotideo durante le 4 fasi di un ciclo cardiaco. Questa LCS determina il profilo di separazione instabile del flusso dalle pareti, fornendo una rappresentazione chiara e geometrica della separazione. Fonte [13].

Gli studi precedenti hanno dimostrato la correlazione tra la separazione del flusso dalla parete del vaso nella biforcazione carotidea e la deposizione di placche aterosclerotiche di colesterolo lungo i vasi. La separazione del flusso avviene quando il sangue, fluendo lungo la parete, viene spinto, allontanato dalla parete per effetto di un'inversione del gradiente di pressione. Localmente il flusso converge ad un profilo di separazione. Se immaginassimo di vedere questo fenomeno a ritroso nel tempo osserveremmo un comportamento opposto, con il flusso che si avvicina alla parete lungo il profilo di separazione e che quindi, dopo il punto di separazione, ne diverge. Questa superficie di separazione può essere individuata utilizzando il campo FTLE integrando a ritroso nel tempo. La LCS attrattiva mostrata nel modello della carotide rappresenta proprio il profilo lungo il quale il flusso separa. La separazione avviene quasi durante l'intero ciclo cardiaco, nonostante il profilo vari nel tempo. Essere in grado di visualizzare la separazione permette una migliore comprensione di come il fluido sia trasportato e rilevarne la posizione risulta importante a causa della correlazione della separazione con la localizzazione della malattia e la perdita di efficienza emodinamica.

Un'altra applicazione delle Strutture Lagrangiane Coerenti, sempre studiata da Shadden e Taylor [13], è lo studio del flusso di sangue interno all'aneurisma dell'aorta addominale di un generico paziente.

Si consideri la diramazione dell'aorta addominale nelle arterie iliache con un aneurisma (Fig. 8).

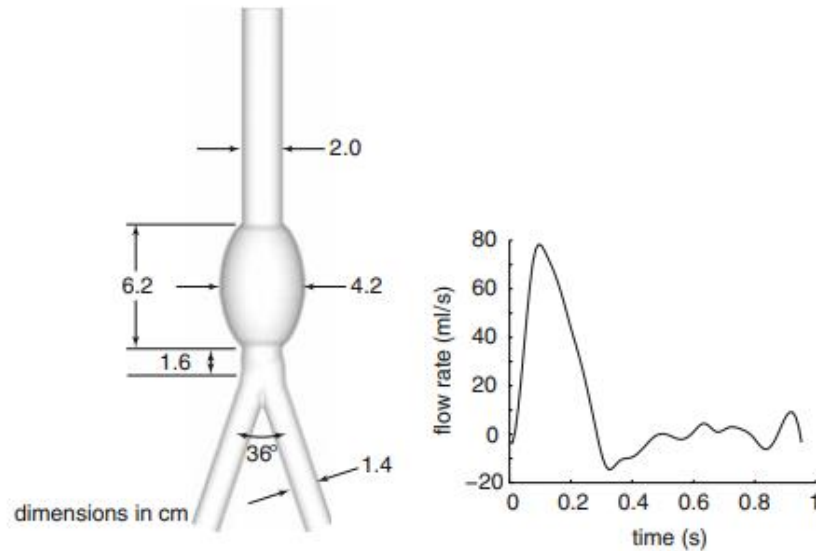


Figura 8 Rappresentazione dell'aneurisma all'aorta addominale di un generico paziente. Il periodo di un ciclo cardiaco è di 0.952 s. Fonte [13].

La forma d'onda data come condizione al contorno in ingresso all'aorta addominale è stata misurata con una risonanza magnetica PC-MRI su uno specifico paziente. Sono state inoltre definite le condizioni al contorno all'uscita delle arterie iliache, con una resistenza uguale tra le due uscite e una resistenza totale tale da produrre una pressione fisiologica. La soluzione è stata calcolata su cinque cicli cardiaci in modo da raggiungere la convergenza.

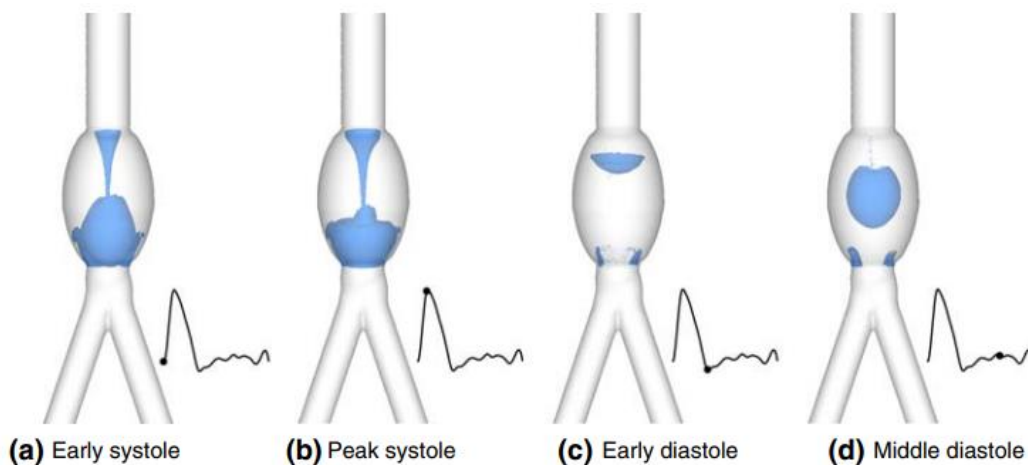


Figura 9 Evoluzione di una LCS attrattiva nell'aneurisma dell'aorta addominale di un generico paziente durante un ciclo cardiaco. Fonte [13].

Il campo di velocità è stato utilizzato per calcolare il campo FTLE a ritroso e in avanti nel tempo su un ciclo cardiaco, permettendo così di individuare rispettivamente le LCSs attrattive (Fig. 9) e quelle repulsive (Fig. 10).

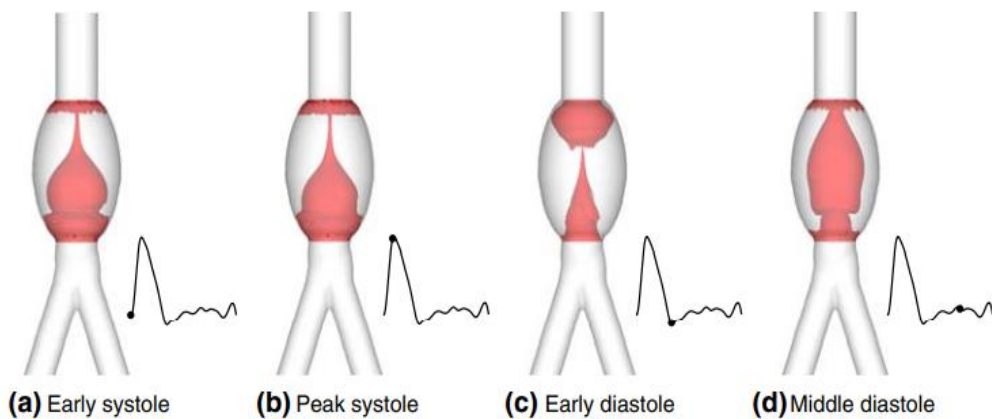


Figura 10 Evoluzione di una LCS repulsiva nell'aneurisma dell'aorta addominale di un generico paziente durante un ciclo cardiaco. Fonte [13].

Risulta importante inoltre osservare la rappresentazione della sezione coronale all'interno dell'aneurisma (Fig. 11). Questa immagine permette di evidenziare il tempo di permanenza delle varie parti del flusso all'interno dell'aneurisma stesso. Le regioni in blu scuro evidenziano il fluido che rimane nell'aneurisma più di un ciclo cardiaco.

Gli studi precedenti hanno evidenziato la formazione di vortici all'interno dell'aneurisma, tuttavia non è stata realizzata ancora una quantificazione della ricircolazione e del ristagno del flusso. Questi due fenomeni giocano un ruolo fondamentale nella formazione di trombi e di meccanismi infiammatori, pertanto è importante quantificarli. Con l'applicazione delle LCSs ciò risulta possibile.

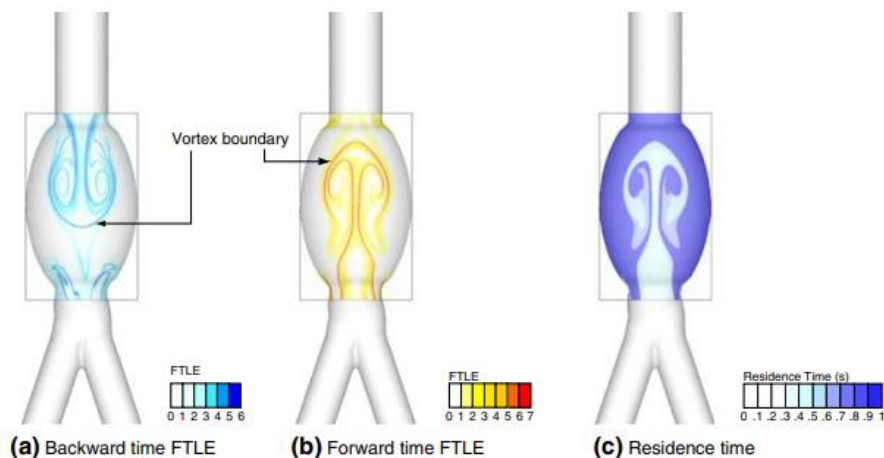


Figura 11 Sezione trasversale dell'aneurisma. Si sono evidenziati i campi di FTLE ottenuti con integrazioni a ritroso e in avanti nel tempo. A destra rappresentazione del diverso tempo di permanenza del sangue nell'aneurisma. Fonte [13].

Durante la sistole il sangue fluisce in basso attraverso l'aorta infrarenale e separa dall'aorta in prossimità della fine dell'aneurisma, determinando la formazione di un vortice laminare ad anello durante la prima fase della diastole. Sovrapponendo le LCSs attrattive e quelle repulsive è possibile

ricavare i contorni dei vortici formati in ogni ciclo cardiaco. Quasi tutto il fluido che scorre nell'aorta è coinvogliato all'interno del vortice. Comparando la posizione delle LCSs repulsive mostrata nella Fig. 11b con il tempo di permanenza del fluido in Fig. 11c si può dimostrare che la parte di fluido racchiusa dalla LCS è la prima che fluisce dall'aneurisma in meno di un ciclo cardiaco (ricircolazione), mentre il fluido esterno alla LCS rimane confinato nell'aneurisma più a lungo, determinando quindi la quota di ristagno.

Dunque la LCS repulsiva costituisce una superficie di separazione che, oltre a definire i confini del vortice, delinea anche i confini della regione stagnante, permettendo inoltre di calcolare il volume di sangue ricircolante e di quello stagnante.

4.3 LCSs in ambito aerodinamico: studio del flusso su un profilo alare

Vediamo ora come le Strutture Lagrangiane Coerenti possono essere utilizzate per studiare la separazione del flusso da un profilo alare durante uno stallo dinamico.

Oltre un certo angolo di attacco, il flusso attorno ad una superficie portante sottile separa, il coefficiente di portanza diminuisce drasticamente e quello di resistenza aumenta, generando il fenomeno che prende il nome di stallo. Questo fenomeno è caratterizzato dalla separazione dei filetti fluidi dalla superficie del profilo e dalla loro organizzazione in vortici, i quali incrementano la resistenza.

Lo stallo può essere statico oppure dinamico a seconda della rapidità di variazione dell'incidenza del profilo. Lo stallo dinamico è un fenomeno aerodinamico di instabilità più complesso rispetto a quello statico. Si verifica quando il profilo è oscillante, ovvero quando la sua incidenza cresce rapidamente e quindi l'inizio dello stallo viene ritardato ad incidenze più grandi di quelle che causano lo stallo statico. Una volta iniziato, lo stallo dinamico risulta anche più intenso e persistente rispetto a quello statico. Le forze e i momenti aerodinamici associati a questo fenomeno mostrano una grande isteresi (Fig. 12) rispetto all'istante angolo d'attacco $\alpha(t)$, specialmente se $\alpha(t)$ oscilla intorno ad un angolo α_0 assimilabile all'angolo di stallo statico α_{ss} [14].

Lo stallo dinamico è caratterizzato dalla formazione, dal distacco e dal passaggio sulla parte superiore della superficie portante di vortici, i quali costituiscono un disturbo viscoso. A causa di questo disturbo viene indotta sul profilo un'elevata fluttuazione non lineare del campo di pressione.

Se la frequenza, l'ampiezza e la massima incidenza sono sufficientemente elevati, la formazione di vortici risulta ben organizzata e definita.

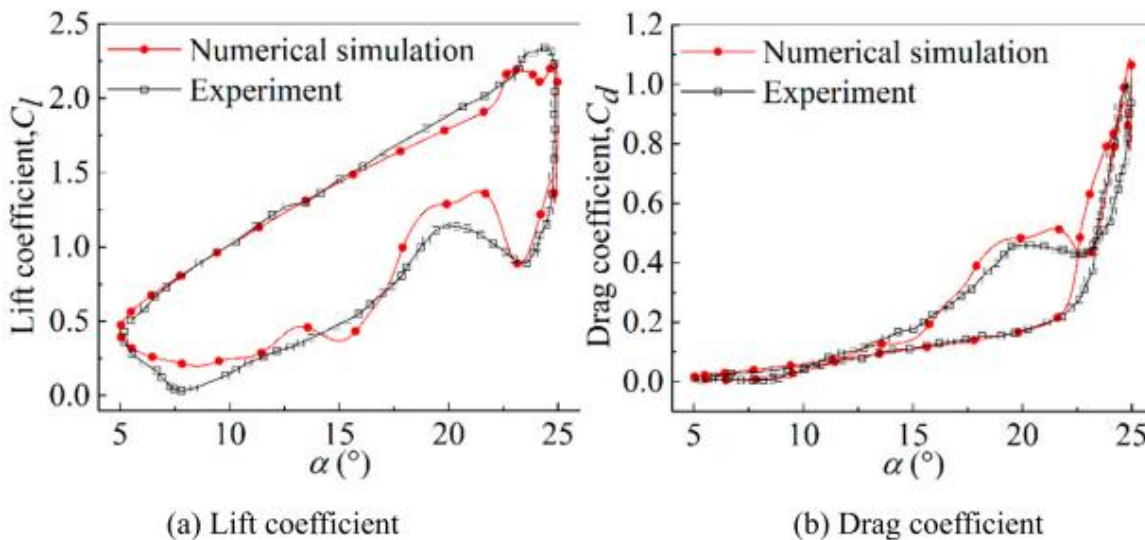


Figura 12 Coefficiente di portanza e di resistenza in relazione all'incidenza durante uno stallo dinamico. Confronto tra gli andamenti ricavati sperimentalmente e quelli ottenuti con la simulazione numerica realizzata nello studio di W. Wang e S. Cao [15].

Possiamo inoltre osservare che non appena inizia lo stallo dinamico, il coefficiente di portanza C_l sul profilo immediatamente decresce e quello di resistenza si incrementa rapidamente (Fig. 12), causando un brusco cambiamento nelle performance del profilo stesso. Questi fenomeni giocano un ruolo importante sulle prestazioni del velivolo durante il volo, pertanto è importante studiarli e comprenderli.

Lo stallo dinamico si divide in quattro fasi: inizialmente il flusso è attaccato, si ha poi lo sviluppo dei vortici, il distacco dei vortici, e il riattacco del flusso. In questo meccanismo risulta di fondamentale importanza la generazione e l'evoluzione del primo vortice che si origina dal bordo di attacco (LEV).

Nel flusso instabile separato dalla superficie ci sono diverse strutture coerenti dipendenti dal tempo e la loro interazione ed evoluzione è complessa e non lineare. Occorre chiarire come il flusso separa dalla superficie superiore del profilo e come le particelle si muovono nel fluido attorno al profilo oscillante. La descrizione Lagrangiana può descrivere il campo del flusso concentrandosi sulla dinamica e le Strutture Lagrangiane Coerenti permettono in questo senso di determinare i contorni del trasporto del flusso.

Consideriamo quindi lo studio condotto da W. Wang e S. Cao [15] su un profilo dotato di un movimento di beccheggio. Si è simulato un flusso incompressibile bidimensionale attorno ad un

profilo NACA 0012 oscillante, considerando un modello per la turbolenza basato sulla vorticità. Si è calcolato il campo FTLE e si sono estrapolate le sue creste, le quali, come abbiamo visto, rappresentano le LCSs. Queste linee materiali vengono approssimate con dei collettori invarianti, anche se si sta trattando un flusso instabile, e rappresentano le barriere dinamiche al trasporto, rivelando i confini precisi del vortice. Si è in particolare posta l'attenzione sulla relazione tra l'evoluzione del C_l durante lo stallo dinamico e la struttura del flusso, prendendo in considerazione per l'analisi i dati derivanti dalla quinta oscillazione del profilo.

In un flusso instabile possiamo pensare di approssimare le LCSs con i collettori stabili e instabili, e quindi vedere le intersezioni tra le Strutture Lagrangiane Coerenti come punti sella, ovvero come punti in cui il campo di velocità si annulla. Come abbiamo visto nella trattazione per il tracciamento degli agenti inquinanti, questi punti, che si comportano da punti sella nei flussi instabili, differiscono da quelli presenti nei flussi stabili per il fatto che sono in movimento con il flusso e sono inoltre transitori, ovvero spariscono dopo un certo intervallo di tempo. Pertanto, considerando le LCSs come collettori invarianti, esse rappresenteranno i confini delle differenti regioni del flusso e saranno barriere al trasporto, ovvero le particelle del fluido non potranno passare attraverso esse.

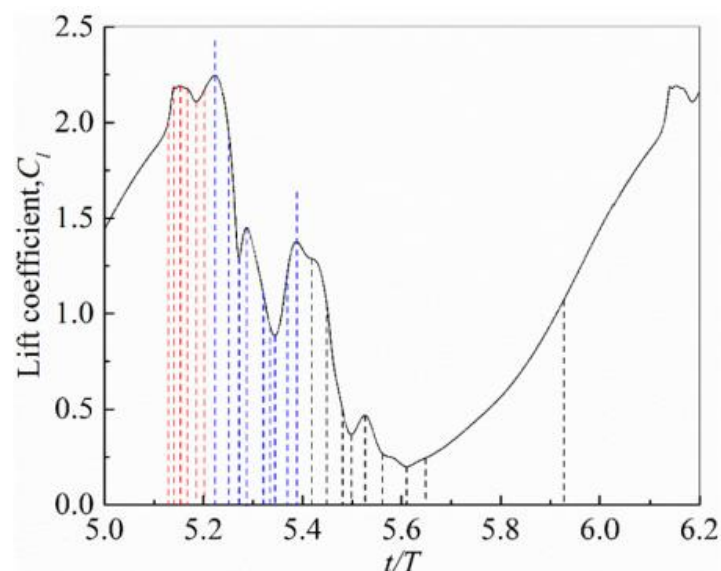


Figura 13 Evoluzione del coefficiente di portanza durante la quinta oscillazione del profilo. Fonte [15].

Analizziamo ora l'evoluzione dei collettori stabili ed instabili durante lo stallo dinamico, il trasporto di massa nel flusso e la relazione tra la localizzazione dei punti di sella e la fluttuazione del coefficiente di portanza durante un ciclo di oscillazione del profilo.

In Fig. 13 è rappresentato l'andamento del C_l durante la quinta oscillazione del profilo (in questo studio si è infatti considerata la quinta oscillazione in quanto solo dopo la terza il C_l ha assunto un comportamento periodico). Si è evidenziato con delle linee tratteggiate i C_l corrispondenti alle diverse incidenze del profilo riportate nelle Fig. 14, 15 e 16, che ora andremo ad analizzare.

Nelle seguenti figure le linee blu rappresentano le LCSs repulsive, ovvero i collettori stabili, ottenute mediante un'integrazione in avanti nel tempo del campo del FTLE, mentre le linee rosse indicano le LCSs attrattive, ovvero i collettori instabili, ottenuti con un'integrazione a ritroso nel tempo. I punti verdi rappresentano i punti di intersezione dei due collettori, ovvero i punti sella.

Partiamo considerando la prima fase dello stallo dinamico, quella che parte dal flusso attaccato e arriva alla formazione del primo vortice (Fig 14).

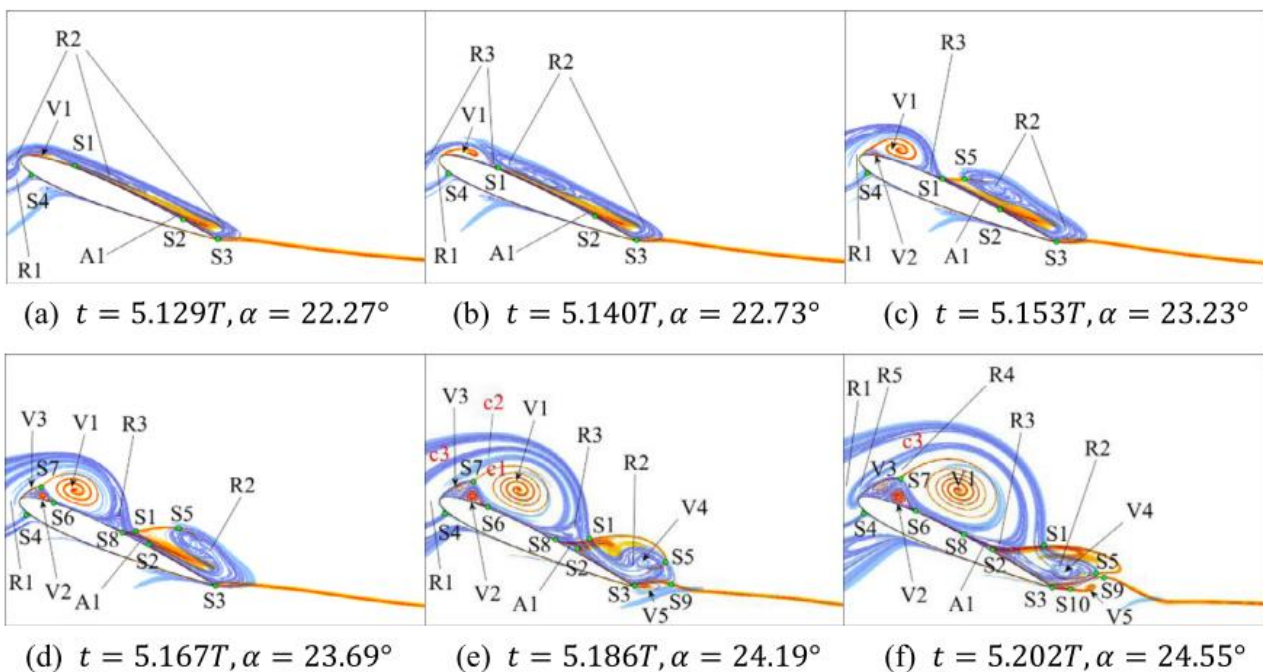


Figura 14 Evoluzione delle LCSs durante la fase di sviluppo dello stallo dinamico. Fonte [15].

Come mostrato in Fig. 14 (a) e (b), la comparsa del punto di sella S1 definisce l'inizio della formazione del primo LEV (V1). Il fluido nella piccola regione R1 sopra S4 supera il bordo di attacco (LE) ed entra nel vortice V1. La regione R2 contiene una massa di fluido di fronte al bordo di attacco che supera il vortice V1 ed entra nello strato limite nel bordo di fuga (TE). Invece il fluido in R3 entra nello strato limite in verso orario sopra S1, sotto l'azione della rotazione oraria di V1.

Nella Fig. 14 (c) si può osservare che man mano che l'angolo di attacco si incrementa, sempre più fluido ad alta energia contenuto nella regione R1 entra nel vortice V1, accelerandone la crescita. S1

si sposta verso il bordo di fuga, indicando proprio l'espansione del LEV (V1) verso il TE, mentre S2 si muove verso il bordo di attacco sotto l'azione del flusso reverso nello strato limite. Il collettore instabile si estende dentro R2, formando il punto di sella S5 all'intersezione con quello instabile e avviene uno scambio di massa tra la regione di ricircolazione e R2. Nella Fig. 14 (d), la formazione dei punti sella S6 e S7 definisce rispettivamente la formazione dei vortici V2 e V3. Allo stesso tempo S1 lascia la superficie superiore del profilo e compare un nuovo punto sella S8. Il corrispondente coefficiente di portanza C_l , mostrato in Fig. 13, decresce lentamente. La regione R2 si stringe verso il bordo di fuga, mentre la regione R3 viene schiacciata lungo la superficie superiore del profilo, dove il fluido entra nello strato limite e poi viene risucchiato all'interno di V2 e V3. Si vede chiaramente dalla Fig. 14 (e) che parte del fluido in R1 entra in V1 attraverso il canale C1 e che la rimanente parte entra nel canale C2. Con il moto orario di S5, avviene un complesso scambio di materia tra la regione di ricircolazione e R2, portando alla formazione del vortice V4. Parte del fluido in R3 entra nello strato limite e l'altra parte si scambia con la regione di ricircolazione tra S1 e S8. La regione A1, circondata da S2 e S8, e il fluido a monte hanno complessi scambi di massa con le regioni R2 ed R3, tramite il canale C3. Inoltre la comparsa del punto di sella S9 al bordo di fuga indica che il fluido sotto il profilo si sposta sopra il TE per formare il primo vortice al bordo di fuga V5 (TEV). In Fig. 14 (f), i canali C1 e C2 sono vicini al bordo di attacco, formando le regioni R4 e R5 che contengono fluido. Il fluido in R1 può solo superare V1 attraverso il canale C3 per raggiungere la zona a valle e scambiare massa con il fluido interno a V4. Il punto sella S10 compare e si sposta a valle rispetto al TE, indicando che V5 si stacca dal bordo di fuga. Come S1 si muove verso valle, l'area coperta dalla regione R4 sulla superficie superiore del profilo continua a crescere, in corrispondenza della continua crescita del C_l in Fig. 13.

La Fig. 15 mostra l'evoluzione delle Strutture Lagrangiane Coerenti durante la fase di stallo e in quella successiva di post-stallo. Osserviamo che a partire da Fig. 15 (a) il punto di sella S1 si muove verso la parte posteriore del bordo di fuga e la regione R4 copre l'intero profilo dal LE fino al TE, con il C_l che raggiunge il suo massimo valore. Non appena S8 e S2 si spostano verso monte scomparendo, la regione A1 è risucchiata nel vortice V2. Parte del fluido in V4 entra nel vortice V2 e in quello V3, spostandosi verso il LE lungo lo strato limite, mentre la rimanente parte è trasportata in basso nella regione della scia. Infine V4 e S5 scompaiono. Nel frattempo la comparsa di S11 indica la formazione del secondo TEV (V6).

Nella Fig. 15 (b), la formazione di S14 e la separazione di S7 e poi di S14 denota il verificarsi dello stallo dinamico.

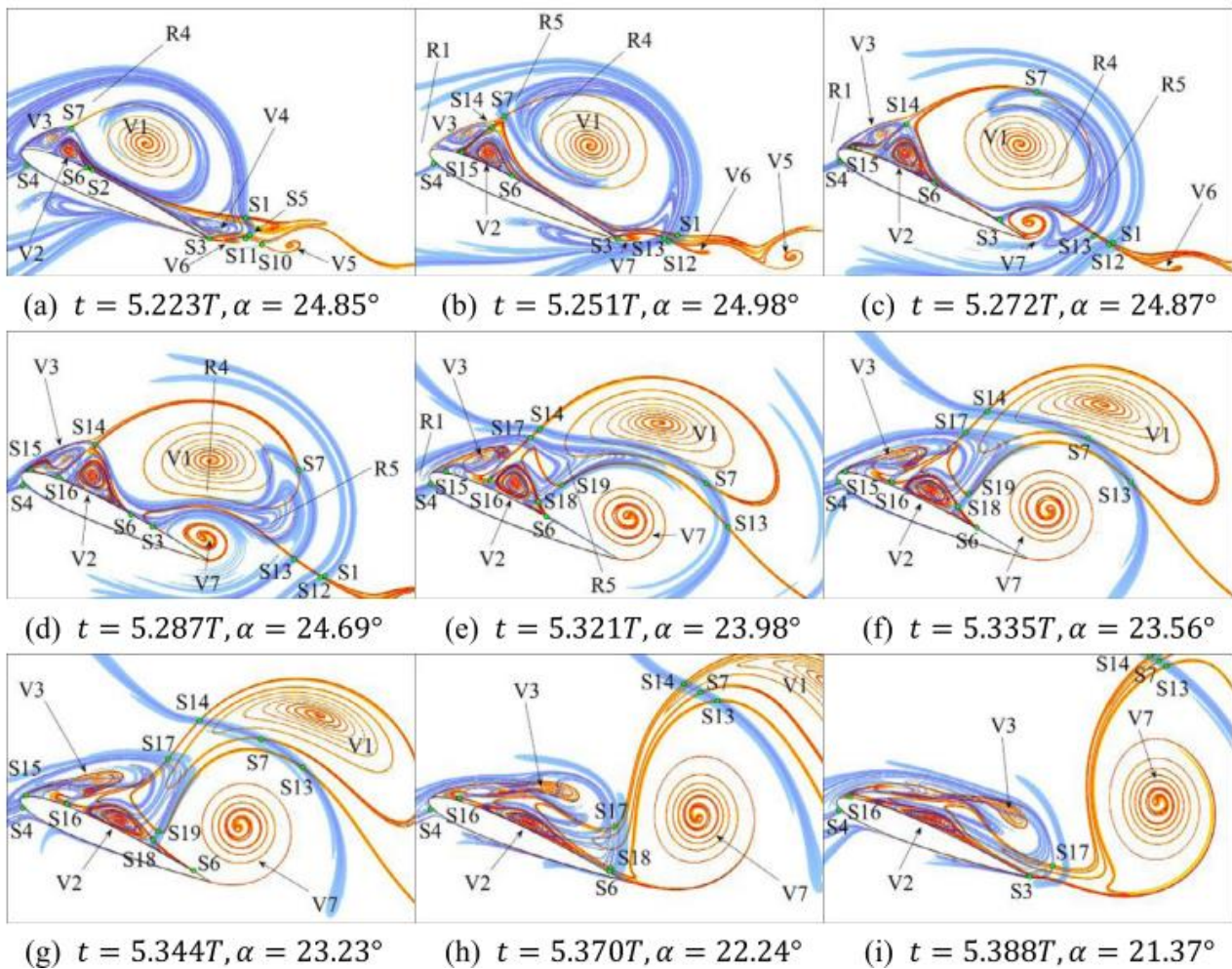


Figura 15 Evoluzione LCSs durante la fase di stallo dinamico e di post-stallo. Fonte [15].

Quando V1 si separa dalla superficie superiore del profilo, il coefficiente di portanza in Fig. 13 decresce immediatamente e la fase di post-stallo ha inizio. Inoltre la comparsa di S13 al TE segnala lo sviluppo del terzo vortice al bordo di fuga (TEV) V7. Una parte del fluido è risucchiata nel vortice V7 dalla superficie inferiore del profilo e l'altra parte viene scambiata con R5 vicino al TE. Vi è inoltre una parte del fluido in R5 che entra nello strato limite sopra al bordo di fuga e viene risucchiata nei vortici V2 e V3. Nella Fig. 15 (c) e (d) il vortice V7 al bordo di fuga passa dalla superficie inferiore a quella superiore e S3 lascia il TE e si muove verso monte. Questo moto di S3 verso il LE indica che V7 è attaccato alla superficie superiore. L'esistenza di questa regione a bassa pressione porta il coefficiente di portanza in Fig. 13 a crescere leggermente. Si può osservare che una parte di fluido avvolta nella regione R5 è trascinata nei vortici V2 e V3 lungo la superficie superiore e che l'altra parte viene spinta verso V7. Tuttavia il fluido proveniente da R1 viene trasportato direttamente nella regione della scia. Come si può vedere dalle Fig. 15 (e), (f) e (g), S3 si sposta verso S6 fino a sparire. Inoltre V7 schiaccia il fluido soprastante fino alla massima estensione e la regione R5 viene

completamente spinta verso V2 e V3. S18 e S19 appaiono e si spostano sulla superficie superiore verso il bordo di fuga. In particolare, la formazione e la separazione di S17 da S14, indica che V1 inizia a lasciare la superficie superiore del profilo, causando una brusca caduta del C_l . Nella Fig. 15 (e) il fluido in R1 supera il bordo di attacco ed entra in V3, mentre nella Fig. 15 (f) e (g) il canale viene chiuso dove il fluido trascinato porta V3 a crescere e schiaccia V2 verso valle. V2 è attaccato alla superficie superiore a metà della corda dal bordo di attacco e si deforma, portando S6 a spostarsi verso il TE e S16 verso il LE. Nella Fig. 15 (h) e (i), S7 e S14 quasi coincidono, indicando che V1 è entrato nella regione della scia, mentre S18 è vicino alla superficie superiore e si stacca dal TE, mostrando che anche V7 ha lasciato il profilo ed è entrato nella regione della scia. S6 e S16 nel frattempo sono giunti rispettivamente al bordo di fuga e di attacco, mentre V2 rimane schiacciato sull'intera superficie superiore del profilo. S17 si sposta verso il TE, mentre V3 è vicino alla punta del bordo di fuga. In questo istante la regione di bassa pressione formata da V2 e V3 ricopre la superficie superiore del profilo, generando un incremento del coefficiente di portata, Fig. 13.

La Fig. 16 mostra l'evoluzione delle LCSs durante la fase di post-stallo e di riattacco del flusso. In Fig. 16 (a) si evidenzia un notevole scambio di massa sopra V2, il quale porta alla formazione di V8. Il fluido sotto il bordo di fuga ruota in verso antiorario a formare V9, che impedisce a V3 di spostarsi verso valle, mentre V2 si stringe al bordo di attacco, portando ad un importante scambio di massa tra V2, V3 e V8 sulla superficie superiore del profilo. In Fig 16 (b) e (c) il vortice V10 ruota in verso antiorario al TE, senza lasciarlo direttamente, ma si muove attraverso la superficie superiore del profilo, portando S3 a lasciare il TE e a muoversi verso monte. La rotazione di V10 favorisce il processo di fusione di V3 e V8 nella regione Z2, causando la formazione del vortice V11 sulla superficie superiore del profilo come mostrato in Fig. 16 (d). Lo strato di taglio che si estende dal bordo di attacco si arrotola formando le strutture A1 e A2, mentre A3 ruota nello strato limite a metà della corda. Mentre l'angolo di attacco diminuisce ulteriormente, il punto di riattacco del flusso, S23, appare e inizia a lasciare il bordo di attacco, generando una diminuzione continua del C_l . In Fig. 16 (e), S3 ritorna al bordo di fuga e S4 lascia il TE, indicando che il vortice V10 abbandona il bordo di fuga. Una parte del fluido in A1 è risucchiato nel vortice V11, che ricopre completamente la superficie superiore dell'ultima metà del profilo. La regione di bassa pressione individuata da V11 causa un piccolo aumento nel coefficiente di portanza (Fig. 13). Tuttavia, il C_l corrispondente alle Fig. 16 (f) e (g) inizia a diminuire nuovamente. In questa fase V11 lascia la superficie superiore e si sposta a valle. V12 e V14 si formano successivamente e lasciano il TE.

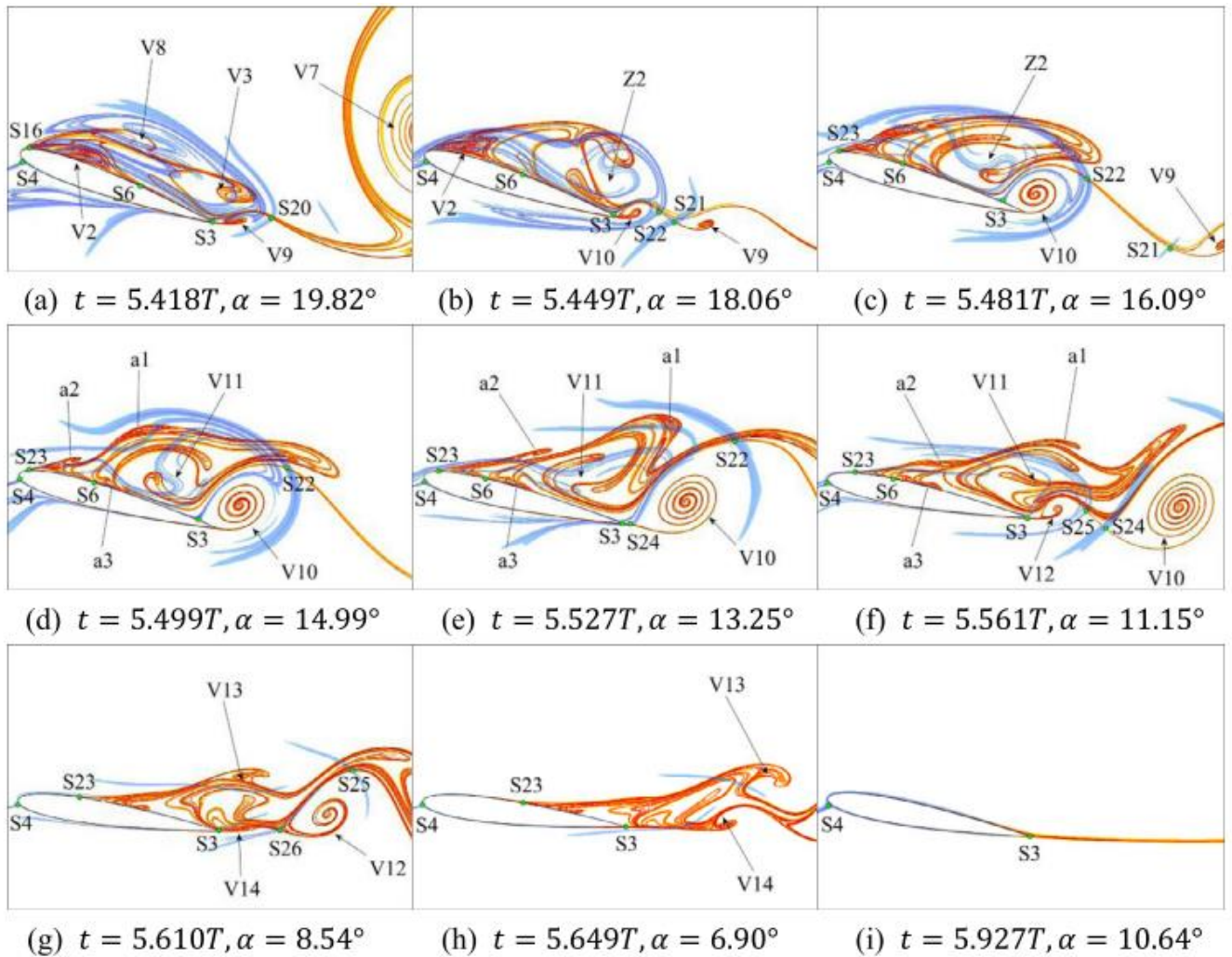


Figura 16 Evoluzione delle LCSs durante la fase di post-stallo e di riattacco del fluido. Fonte [15].

V13 viene generato dall'interazione tra le strutture A1 e A2 con il fluido circostante e il punto di riattacco S23 si sposta verso il TE. Il punto di riattacco S23 si muove verso il TE e va a coincidere con S3, determinando il cambiamento tra la fase di riattacco del flusso a quella di flusso attaccato. Nella fase di flusso attaccato, i collettori stabili e quelli instabili coincidono completamente con la superficie del profilo e non ci sono né regioni di separazione né trasporto di massa nel campo del flusso. Il coefficiente di portanza cresce quindi quasi linearmente con l'angolo di attacco.

In conclusione possiamo affermare che solo con le LCSs i canali del trasporto di massa possono essere mostrati chiaramente e può essere compresa l'origine della formazione di ogni vortice a partire dalle particelle. Inoltre l'analisi basata sulle LCSs ha permesso di evidenziare come la formazione e la crescita del LEV primario e secondario siano dovuti al processo di alimentazione intermittente dello strato di taglio. Le particelle di fronte al LE entrano nel LEV attraverso un canale

di trasporto di massa che si apre e si chiude a intermittenza. Quando il canale è chiuso, le particelle del fluido superano il LEV e vengono trasportate direttamente a valle.

Si può inoltre analizzare la relazione tra l'evoluzione dei punti sella e la fluttuazione del C_L . La prima separazione del punto di sella dallo strato di taglio indica la separazione del LEV primario dalla superficie del profilo alare e l'inizio dello stallo dinamico. La seconda separazione di un punto sella denota l'allontanamento del LEV primario dalla regione superiore del profilo, fenomeno che causa una brusca riduzione del coefficiente di portanza. I punti di sella delle LCSs giocano un ruolo importante nel definire i confini dei vortici: il loro comportamento dinamico, caratterizzato dalla loro comparsa, dal loro spostamento e dalla loro scomparsa, rappresenta la generazione, il movimento, il distacco e la scomparsa dei vortici. La regione di bassa pressione formata dai vortici, il complesso trasporto di massa e il processo di mescolamento sulla superficie superiore del profilo sono le ragioni dell'elevato coefficiente di portanza che si registra durante lo stallo dinamico.

Conclusioni

In questa tesi si sono studiate le Strutture Lagrangiane Coerenti, definite come lo scheletro della fluidodinamica [10]. Esse infatti rappresentano le superfici materiali che organizzano il flusso delle particelle circostanti in schemi ordinati. Per individuare queste strutture coerenti si sono visti alcuni dei metodi Euleriani, basati sul campo di velocità e sul suo gradiente. Questi metodi di individuazione risultano però privi di oggettività ed inoltre fotografano i vortici solo in un certo istante di tempo facendone un'istantanea. I limiti di tale approccio vengono ampiamente superati dai metodi di individuazione Lagrangiani, i quali sono indipendenti dall'osservatore e descrivono il moto del fluido su un arco di tempo, senza dare solo un'istantanea del campo di moto. Si sono quindi passati in rassegna questi metodi, in particolare il tensore delle deformazioni di Cauchy-Green e il Finite-Time Lyapunov Exponent, per poi studiare alcuni casi reali in cui questi metodi hanno trovato applicazione.

In campo geofisico le LCSs vengono ampiamente utilizzate, giocano infatti un ruolo fondamentale per tracciare gli agenti inquinanti rilasciati in mare. Come si è visto, a seguito del disastro ambientale della Deepwater Horizon, con un'analisi basata sui cuori delle LCSs è stato possibile predire alcuni giorni prima le zone in cui poi petrolio si è diffuso. In questo senso uno studio condotto con le LCSs può essere la base su cui fondare le decisioni di prevenzione e di protezione prese dalle autorità in termini di evacuazione delle coste, interventi a protezione della vita marina e ottimizzazione della distribuzione di disperdenti.

Le LCSs risultano utili non solo in ambito geofisico, ma anche in ambito medico. Possono infatti essere applicate alla emodinamica per studiare il comportamento del flusso sanguigno all'interno dei vasi. I risultati anche in questo campo sono di notevole rilevanza: le LCSs permettono di caratterizzare alcune condizioni clinicamente rilevanti, quali ad esempio il ristagno, la separazione, la miscelazione, la ripartizione del flusso nei vasi. Questo metodo potrebbe offrire una svolta nello studio del flusso nel sistema cardiovascolare, aiutando a comprendere il ruolo della fluidodinamica nello sviluppo di svariate patologie, a valutare la necessità di impiantare dispositivi medici e a diagnosticare meglio malattie del sistema cardiovascolare.

Ulteriore esempio di applicazione delle LCSs è lo studio del flusso e delle strutture vorticose attorno ad un profilo oscillante durante uno stallo dinamico. La visualizzazione dei vortici può anche essere eseguita mediante metodi Euleriani, quali ad esempio il criterio $-Q$, ma uno dei limiti di tale

approccio risulta sempre la mancanza di continuità nella descrizione del moto del fluido attorno al profilo, il quale viene solo fotografato ad un dato istante. Per questa ragione si preferisce utilizzare un approccio Lagrangiano: con le LCSs è stato possibile osservare non solo la formazione, la crescita e il distacco dei vortici, ma anche il trasporto di massa durante l'intero processo, nonché la relazione esistente tra il comportamento dei punti sella e la fluttuazione del coefficiente di portanza.

Le possibili applicazioni delle LCSs non si esauriscono qui: esse possono essere utilizzate per studiare e prevedere il trasporto nell'atmosfera di inquinanti prodotti dalle industrie o da eventuali disastri ambientali, quali per esempio le eruzioni vulcaniche, per analizzare i problemi di scambio termico per convezione [16] o ancora per studiare la scia generata da corpi tozzi.

Si può concludere quindi che le Strutture Lagrangiane Coerenti saranno oggetto di ricerca ancora per diverso tempo, viste le loro innumerevoli applicazioni e i conseguenti benefici che possono apportare nei campi più svariati.

Bibliografia

- [1] Arina R., *Fondamenti di aerodinamica*, Levrotto&Bella, 2019
- [2] Nicoud F., *Unsteady flows modeling and computation*, University Montpellier II and I3M-CNRS UMR 5149, 2007
- [3] Caffagni A., Tesi di Master: *On Lagrangian Coherent Structures*, 2014
- [4] Jie-Zhi Wu, Hui-Yang Ma, Ming-De Zhou, *Vorticity and vortex dynamics*, Springer Berlin, 2006
- [5] Green M. A., Rowley C. W. e Haller G., *Detection of Lagrangian coherent structures in three-dimensional turbulence*, Journal of Fluid Mechanics, 572: 111-120, 2007
- [6] Chong M.S., Perry A.E. e Cantwell B.J., *A general classification of three-dimensional flow fields*, Physics of Fluids A, 2: 765-777, 1990
- [7] Hunt J.C.R., Wray A.A. e Moin P., *Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows*, Center for Turbulence Research Report, 2: 193-208, 1988
- [8] Jeong J. e Hussain F., *On the identification of a vortex*, Journal of fluid mechanics, 285: 69-94, 1995
- [9] Haller G., *Lagrangian Coherent Structures*, Annual Reviews of Fluid Mechanics, 47: 137-62, 2015
- [10] Peacock T., Haller G., *Lagrangian coherent structures: The hidden skeleton of fluid flows*, Physics Today, 66: 41-46, 2013
- [11] Shadden S. C., Lekien F., Marsden J. E., *Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows*, Physica D: non linear phenomena, 212: 271-304, 2005
- [12] Olascoaga M. J. e Haller G., *Forecasting sudden changes in environmental pollution patterns*, PNAS, 109: 4738-4743, 2012
- [13] Shadden S. C. e Taylor C. A., *Characterization of Coherent Structures in the Cardiovascular System*, Annals of Biomedical Engineering, 36: 1152-1162, 2008
- [14] McCroskey W. J., *The Phenomenon of Dynamic Stall*, NASA Technical Memorandum, 2: 1-28, 1981
- [15] Wang W., Cao S., Dang N., Zhang J. e Deguchi Y., *Study on dynamics of vortices in dynamic stall of a pitching airfoil using Lagrangian coherent structures*, Aerospace Science and Technology, 113: 127-140, 2021
- [16] Sheng-Li C., Xu S., Jia-Zhong Z., Yi-Xin Z., *Forced convection heat transfer around a circular cylinder in laminar flow: An insight from Lagrangian coherent structures*, Physics of fluid, 33: 1-15, 2021

Ringraziamenti

Intendo ringraziare la mia professoressa e relatrice Stefania Scarsoglio per il supporto, la completa disponibilità e la celerità nel rispondere alle domande. La sua dedizione all'insegnamento ha fatto crescere il mio interesse verso la fluidodinamica.

Ringrazio poi tutti coloro che mi vogliono bene e che conoscono il valore che ha per me questo traguardo.