

Politecnico di Torino

I Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale



Monografia di Laurea

Studio del transitorio di
perturbazioni tridimensionali nello
strato limite di un'ala finita

Relatore

Prof.ssa Daniela Tordella

Ing. Stefania Scarsoglio

Candidato

Salvatore Sedda

Anno Accademico 2009-2010

A mio padre,

Indice

Introduzione	5
1.Stabilità idrodinamica	
1.1 Il fenomeno della transizione	7
1.2 Stabilità dei flussi di strato limite tridimensionali	11
1.3 Fondamenti della teoria della stabilità primaria	14
1.4 Metodo dei “ <i>normal modes</i> ”: equazione di Orr – Sommerfeld	17
1.5 La stabilità secondaria	21
1.6 La simulazione delle equazioni	24
2.Formulazione del problema fisico	
2.1 Strato limite: <i>basic flow</i>	26
2.2 Sistema di equazioni perturbative	35
2.3 Descrizione dei parametri	40
2.4 Scelta e calcolo dei parametri	42
2.5 Fattore di amplificazione e fattore di crescita	45
3.Risultati delle simulazioni	
3.1 Procedimento	47
3.2 Commento dei risultati	49
3.3 Influenza del numero di Reynolds	56
3.4 Influenza dell’angolo di <i>crossflow</i>	58

4. Conclusioni

Considerazioni e prospettive

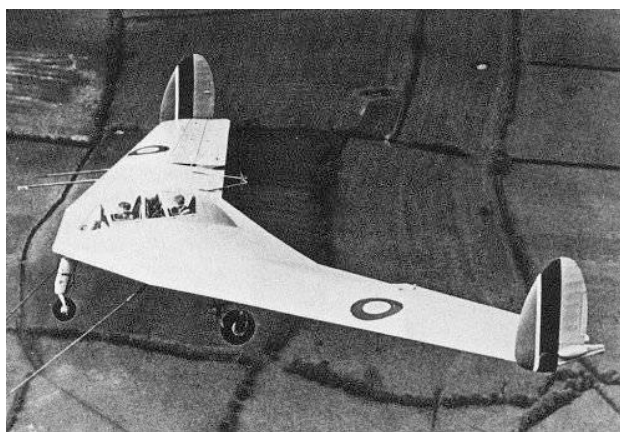
59

Bibliografia

Introduzione

Il bisogno di conoscere il complicato meccanismo di transizione dello strato limite sulla superficie di un'ala di allungamento finito è il motivo principale che ancora oggi spinge allo studio della stabilità dello strato limite tridimensionale.

L'obiettivo è quello di riuscire a predire la tipologia di perturbazioni che possono causare l'origine della turbolenza, per tradurre le conoscenze teoriche in realizzazioni pratiche sempre più efficienti.



^

Figura 1 – Armstrong Withworth A.W. 52 [1944]

Storicamente il problema insorse nell'immediato secondo dopo guerra, quando, nel tentativo di realizzare aerei adatti al volo ad alta velocità per esigenze militari, fu sperimentata, con il britannico AW-52, la configurazione ad "ala volante".

Il carattere altamente instabile del flusso su questa tipologia di ali, riscontrato sperimentalmente, fu inizialmente riconosciuto come un problema relativo alla particolare architettura. In realtà il fattore principale che ne influenza in modo negativo la stabilità, è la presenza del *crossflow*, ovvero una componente di velocità perpendicolare alle linee di corrente del flusso esterno, la cui origine deriva direttamente dalle conseguenze che l'allungamento finito dell'ala ha sul campo di moto che la interessa.

Si tratta dunque di un problema generale, che non ricorre solo nelle applicazioni aeronautiche, ma anche, ad esempio, in campo automobilistico, specialmente nelle vetture da competizione dotate di appendici aerodinamiche capaci di generare forti azioni deportanti.

Lo scopo dello studio effettuato è quello di evidenziare l'influenza dei parametri che caratterizzano



>

Figura 2 – Northrop – Grumman B-2 Spirit [1988]

lo strato limite tridimensionale in presenza di *crossflow*, per evidenziarne la criticità in relazione alla stabilità del flusso e trarne, dove possibile, indicazioni per il controllo.

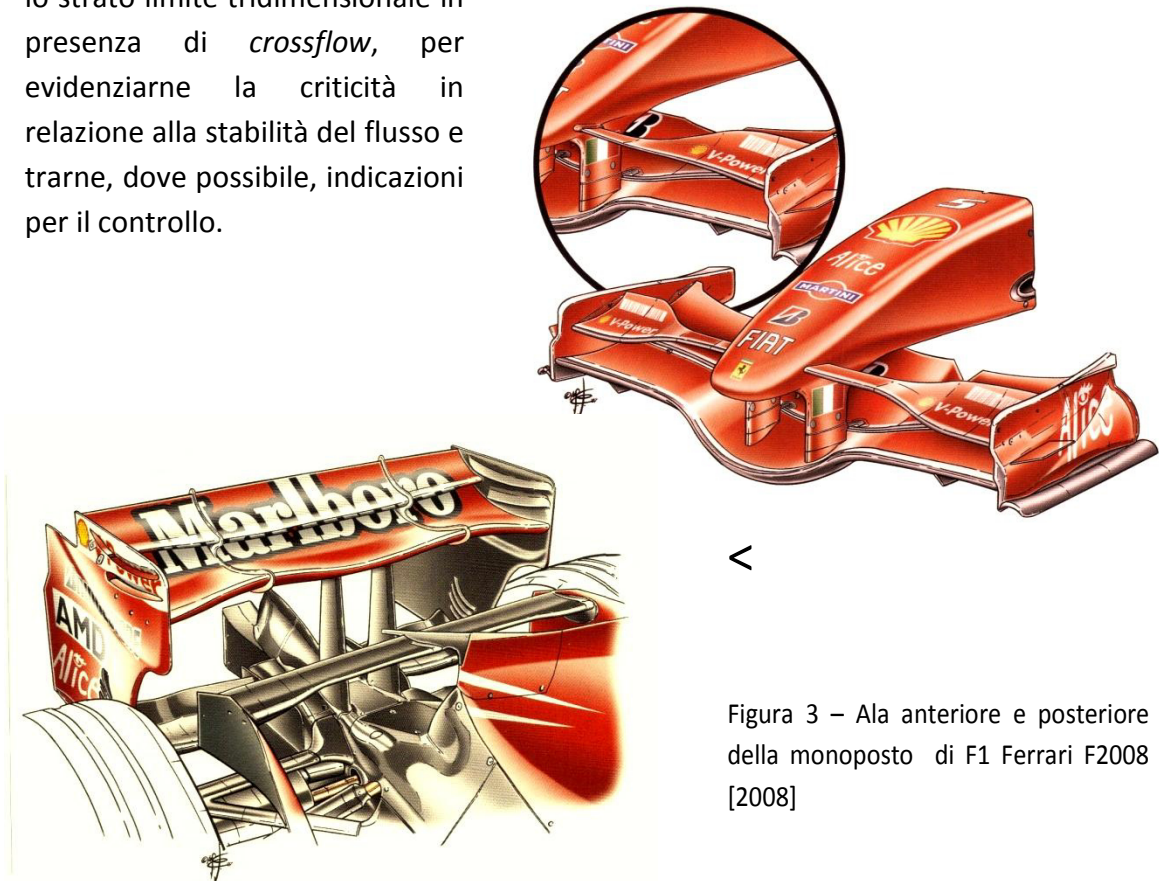


Figura 3 – Ala anteriore e posteriore della monoposto di F1 Ferrari F2008 [2008]

Nella prima parte è delineato il quadro concettuale relativo alla stabilità idrodinamica: una breve parentesi storica precede la presentazione delle principali teorie formulate dagli inizi del '900 ad oggi. Particolare importanza riveste l'ultimo paragrafo della sezione che illustra le differenze tra l'approccio classico al problema e la strada della simulazione delle equazioni di governo nella formulazione velocità - vorticità, intrapresa in questo studio del transitorio delle perturbazioni.

Il secondo capitolo è invece dedicato alla sistemazione matematica del problema. La soluzione del flusso base (*basic flow*) è minuziosamente descritta dalle ipotesi semplificative fino alla rappresentazione della geometria tridimensionale. La formulazione velocità - vorticità delle equazioni perturbative e la trasformazione di Laplace - Fourier di tutte le grandezze sono poi presentate dettagliatamente. Gli ultimi paragrafi contengono la descrizione e il calcolo dei parametri presenti nel sistema di governo e la definizione delle grandezze introdotte per la caratterizzazione dei transitori.

Infine nella terza sezione sono riportati e commentati i risultati ottenuti dalle simulazioni. Una panoramica dei grafici ricavati dalle soluzioni permette un'istantanea valutazione del lavoro svolto. I comportamenti rilevati sono poi descritti, per ogni configurazione, al fine di trarre le conclusioni circa l'influenza dei parametri sulla stabilità dello strato limite studiato.

1. Stabilità idrodinamica

1.1 Il fenomeno della transizione

La stabilità idrodinamica è uno dei problemi centrali ancora aperti della meccanica dei fluidi, tanto da essere oggetto di indagine sia teorica che sperimentale nel corso di tutto il XX secolo, fino a oggi. Essa riguarda la determinazione delle condizioni per cui si verifica il fenomeno della transizione nei flussi laminari e il susseguente instaurarsi del regime turbolento.

Il complesso di problemi legati alla stabilità dei flussi fu riconosciuto e formulato attorno al 1900, grazie in particolare ai contributi di Reynolds, Rayleigh, Kelvin ed Helmholtz. Proprio nella descrizione della serie di esperimenti condotti da Osborne Reynolds sull'instabilità del flusso nei tubi (*Reynolds's dye experiments, 1883*) sono racchiusi i tratti principali del fenomeno della transizione:

Gli esperimenti [...] sono stati fatti in tre tubi [...] del diametro di 1 pollice, $\frac{1}{2}$ pollice e $\frac{1}{4}$ di pollice. Ogni tubo è dotato di un ingresso a "tromba" in modo tale che l'acqua possa fluire senza disturbi. L'acqua è incanalata attraverso un grosso serbatoio di vetro nel quale i tubi sono immersi. Contemporaneamente vengono iniettate una o più scie di inchiostro colorato.

I risultati ottenuti sono:

- 1. A velocità sufficientemente basse la traccia dell'acqua colorata si estende in linea retta attraverso tutta la lunghezza del tubo il tubo (a).*
- 2. Nel caso in cui l'acqua nel serbatoio non sia ancora completamente assestata, sempre a basse velocità, la scia di inchiostro si sposta verticalmente nel tubo ma senza la comparsa di rilevanti sinuosità.*

3. Aumentando gradualmente la velocità, in un determinato punto del tubo, sempre a considerevole distanza dall'ingresso, la striscia colorata si mischia improvvisamente e velocemente all'acqua circostante riempiendo completamente il resto del tubo (b). Incrementando ulteriormente la velocità il punto di transizione si sposta verso l'ingresso del tubo, senza mai raggiungerlo. Illuminando la zona di interesse con una scintilla elettrica, la massa di acqua colorata si risolve in una struttura più distinta formata da vortici (c).

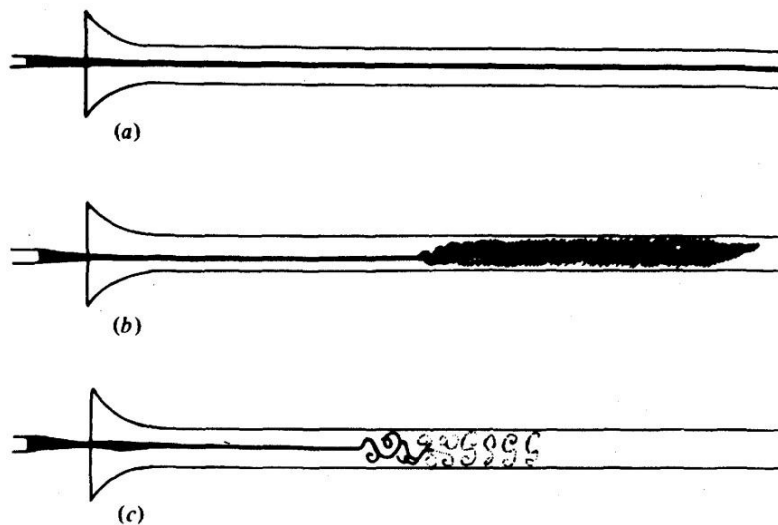


Figura 1 - Reynolds's dye experiment, transizione in un pipe flow

La velocità critica è molto sensibile alle perturbazioni presenti nel serbatoio prima dell'ingresso nel tubo. [...] Questo suggerisce l'idea che ci possa essere instabilità a disturbi di una certa ampiezza e stabilità a disturbi più piccoli.

Un altro fenomeno [...] è il carattere intermittente della perturbazione.

Con i suoi esperimenti Reynolds aveva intuito che l'instaurarsi della turbolenza dipende fortemente dal parametro adimensionale che mette in relazione la velocità del flusso, una sua dimensione caratteristica, indicata con d , e la viscosità cinematica ν . Il parametro in questione è naturalmente il numero di Reynolds, che nel caso più generale è:

$$Re = \frac{U_0 d}{\nu}$$

Lo scopo degli studi di stabilità è dunque quello di esprimere in funzione di questo parametro la configurazione critica del flusso studiato, oltre la quale si verifica la transizione e si origina la turbolenza.

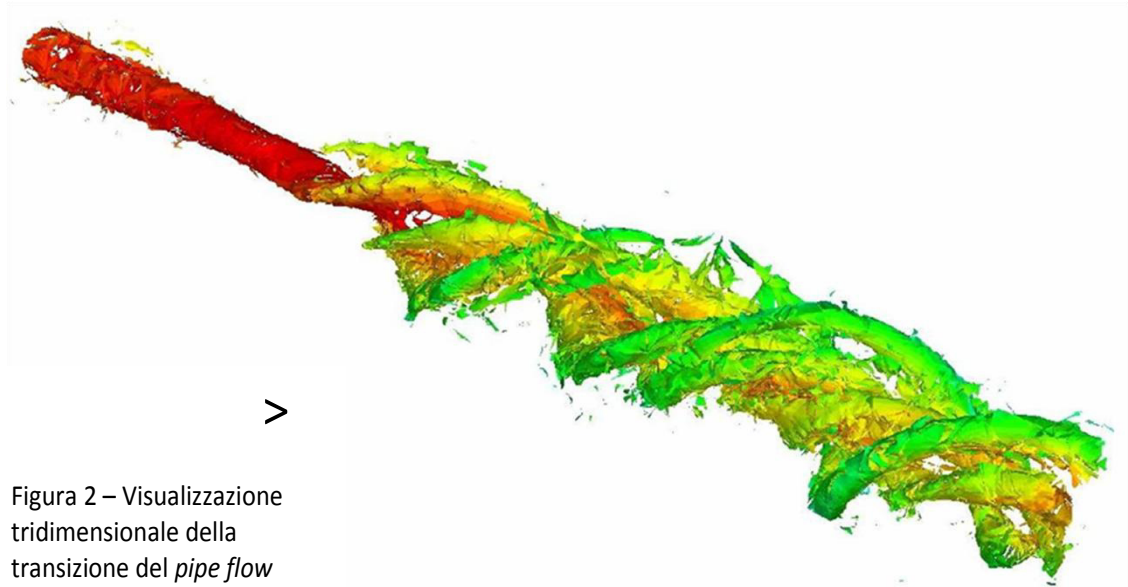


Figura 2 – Visualizzazione tridimensionale della transizione del *pipe flow*

Un altro elemento distintivo dell'instaurarsi del moto turbolento è l'intermittenza del fenomeno. Una volta verificatasi la transizione, lo sviluppo completo della turbolenza non è improvviso e immediato, ma si osserva un comportamento intermittente in cui si alternano tratti di flusso ancora laminare e tratti di flusso già turbolento. Il processo avviene con la formazione di strutture turbolente caratteristiche dette *turbulent spots*.

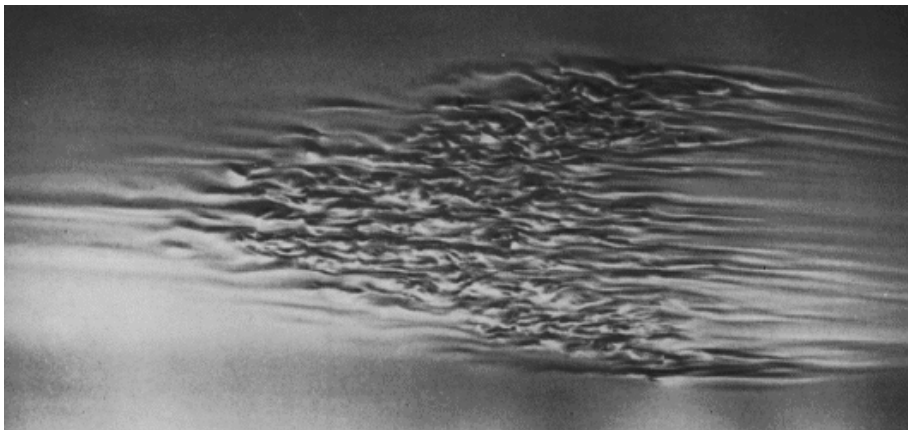


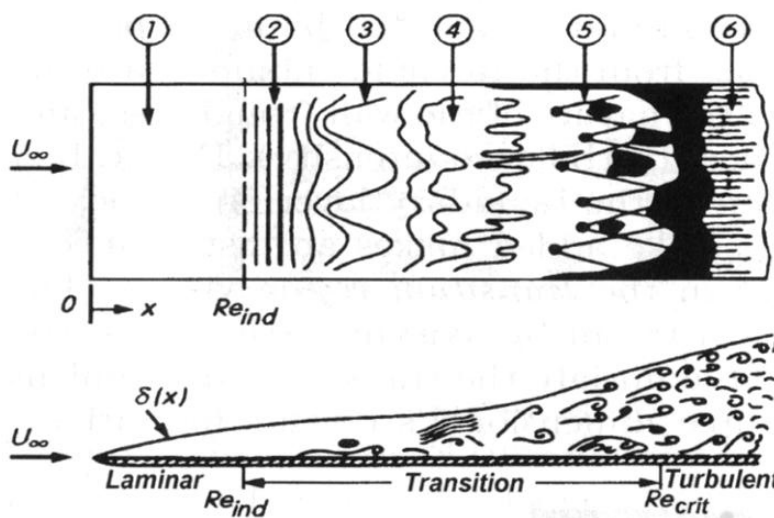
Figura 3 - Turbulent spot [R. Falco, 1980]

Infine gli ulteriori esperimenti condotti dallo stesso Reynolds e successive investigazioni su varie tipologie di flusso, evidenziano la forte dipendenza dalle condizioni iniziali e al contorno del problema, tanto che il valore del Reynolds critico può variare anche di un ordine di grandezza

La transizione dei flussi di strato limite, a causa delle maggiori conoscenze tecniche e tecnologiche necessarie per la sperimentazione, fu osservata molto più tardi di quella del flusso nei tubi. In questo caso il fenomeno risulta essere influenzato da numerosi e

diversi fattori, tra i più importanti, oltre al già citato Reynolds, devono essere ricordati il gradiente di pressione del flusso esterno, la conformazione della parete (rugosità) e il livello di turbolenza già presente nel flusso a monte.

Gli esperimenti condotti, principalmente su lamina piana, mostrano che la transizione laminare – turbolento per questo genere di campi di moto avviene con l'iniziale formazione di onde asimmetriche di frequenza caratteristica che si propagano nel senso della corrente, chiamate onde di Tollmien – Schlichting (*TS waves*), e che progressivamente evolvono in una struttura tridimensionale.



<

Figura 4 - Transizione nello strato limite su lamina piana

1. Flusso laminare stabile
2. TS waves
3. Onde tridimensionali e formazione di vortici (Λ -structures)
4. Decadimento dei vortici
5. Turbulent spots

>

Figura 5 - Instabilità dello strato limite, Tollmien – Schlichting waves

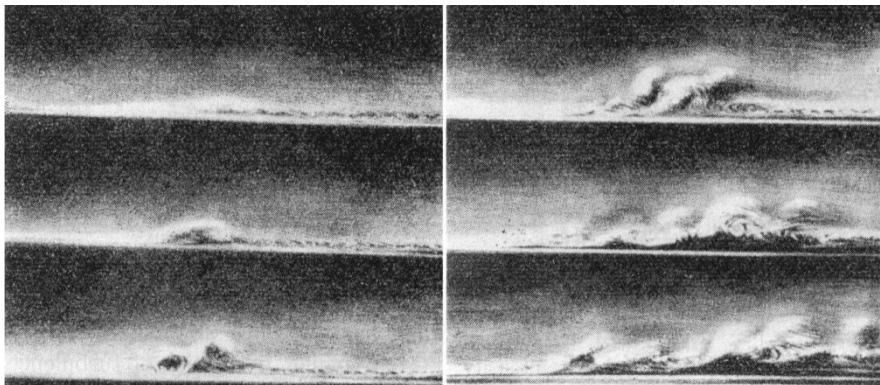


1.2 Stabilità dei flussi di strato limite tridimensionali

L'indagine sperimentale ha mostrato che in uno strato limite con geometria tridimensionale (3-D) il fenomeno della transizione laminare - turbolento avviene in modo notevolmente differente dal caso bidimensionale (2-D) corrispondente.

Perturbazioni del flusso esterno, fisicamente rappresentabili come rumore o vorticità, entrano e si sovrappongono allo strato limite. Questo rappresenta il processo di *receptivity* che, anche se in modo non ancora perfettamente chiaro, in parte crea le condizioni iniziali per lo sviluppo delle instabilità. In questo stadio del processo, quando il flusso è ancora laminare, i disturbi possono essere talmente piccoli da non poter essere rilevati. Il loro effetto diventa sensibile solo dopo il verificarsi della transizione.

L'amplificazione iniziale delle perturbazioni è ben descritta dalla teoria lineare della stabilità primaria che prevede l'origine di onde bidimensionali, le *TS waves*, la cui ampiezza cresce procedendo a valle dello strato limite (instabilità convettiva). L'ulteriore amplificazione dei disturbi porta al verificarsi di effetti tridimensionali, alcuni dei quali determinabili grazie alla teoria della stabilità secondaria, che portano alla fase finale di flusso turbolento completamente sviluppato.



<

Figura 6 – Sviluppo della turbolenza da un'iniziale perturbazione di grande lunghezza d'onda.

[L. Prandtl, 1933]

Nella categoria di flussi di strato limite con geometria tridimensionale ricadono varie tipologie di configurazione, molto diverse tra loro. Tra tutti i campi di moto tridimensionali sono molto importanti, dal punto di vista sia teorico che applicativo, quelli che si formano sulla superficie di ali di allungamento finito. Tale caratteristica dell'ala, come anche, in proporzione minore, la curvatura della superficie e la sua rugosità, riveste un ruolo importante nella determinazione del tipo di instabilità che si verifica.

Sperimentalmente sono stati riconosciuti 4 diversi comportamenti instabili che portano alle condizioni per cui avviene la transizione dello strato limite. Questi possono essere riassunti come:

- Instabilità del bordo d'attacco e contaminazione, riguardante lo sviluppo e la propagazione lungo il *leading – edge* di piccole perturbazioni.
- Onde di Tollmien – Schlichting nella direzione *streamwise* del flusso simili all'analogo processo bidimensionale.
- Instabilità centrifughe, che si verificano soprattutto su superfici concave, dovute alla formazione e sviluppo dei tipici vortici di Görtler.
- Instabilità dovute al *crossflow*

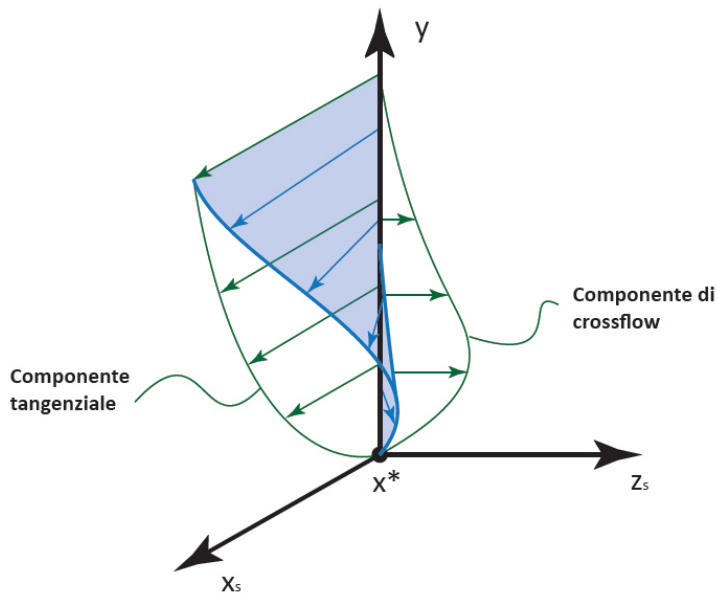
Particolare attenzione è riservata all'ultima tipologia. La scoperta dell'influenza del *crossflow* sul fenomeno della stabilità è attribuita a Gray (1952) ed è dovuta al tentativo di creare condizioni di flusso laminare, fino a circa il 60% della corda, negli aerei per il volo ad alta velocità con architettura ad "ala volante" ad elevato angolo di freccia.

Tuttavia l'instabilità dovuta al *crossflow* è un problema che si verifica in tutte le ali di allungamento finito. All'estremità alare, infatti, poiché le vene fluide che lambiscono il dorso e il ventre del profilo si ricongiungono, non può esservi differenza di pressione: due porzioni di fluido non possono trovarsi a pressioni differenti se non separate da una superficie rigida che trasmetta la forza risultante.

Di conseguenza, la distribuzione di pressione sulla superficie di un'ala finita non è costante lungo la direzione z , come invece nel caso ad allungamento infinito. Il gradiente di pressione in direzione trasversale induce il movimento del fluido sulla superficie alare, verso l'estremità sul ventre e verso la radice sul dorso. Il risultato è l'origine di un moto circolatorio che si traduce in caratteristiche strutture vorticose, con conseguenze peggiorative sulle prestazioni aerodinamiche dell'ala. Localmente, in una zona sufficientemente vicina alle estremità, la velocità indotta da tali vortici si sovrappone in direzione perpendicolare alla velocità del flusso esterno U_∞ .

Ciò causa l'origine del *crossflow*, ovvero lo sviluppo di un profilo di velocità perpendicolare alle linee di corrente. La velocità di tale profilo raggiunge un massimo all'interno dello strato limite e si annulla sia a parete, dove deve necessariamente rispettare la condizione di aderenza, sia nel flusso esterno.

Sommando ad esso il tipico profilo dello strato limite che si forma sulla superficie alare in direzione tangente alle linee di corrente, si ottiene, come illustrato nella figura seguente, una struttura tridimensionale.



<

Figura 7 - Profilo tridimensionale dovuto all'effetto della velocità di crossflow

Il *crossflow* ha un punto di flesso che tipicamente caratterizza i profili instabili, come afferma il criterio stabilito da Rayleigh. Effettivamente si osserva lo sviluppo dei tipici vortici di *crossflow* con assi approssimativamente paralleli alla direzione della corrente. Tali vortici ruotano tutti nello stesso verso e si organizzano lungo la direzione parallela all'apertura alare nella caratteristica forma ad "occhi di gatto", con inoltre una modulazione periodica dell'ordine dello spessore dello strato limite δ .

>

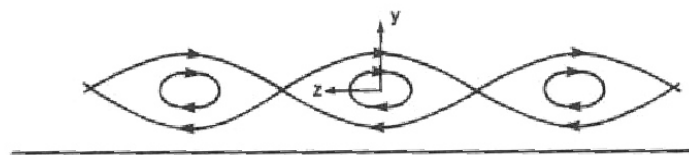
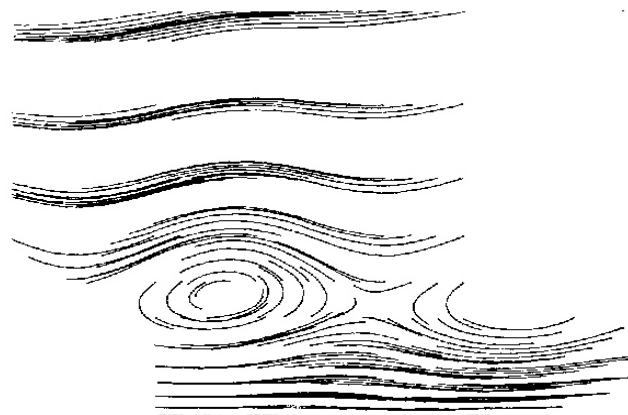


Figura 8 – Struttura caratteristica dei vortici di crossflow nel piano perpendicolare alla direzione del flusso



1.3 Fondamenti della teoria della stabilità primaria

L'idea che è alla base della teoria della stabilità è contenuta nell'ipotesi fatta da Osborne Reynolds alla fine del XIX secolo, il quale sosteneva che il flusso laminare, sempre una soluzione possibile delle equazioni del moto, diventa instabile una volta oltrepassato un determinato valore del numero di Reynolds. Lo scopo della teoria è dunque quello di individuare le condizioni limite, determinando il valore critico del parametro, e di conseguenza prevedere la transizione.

Gli sforzi teorici di risolvere il problema così impostato furono vani per molto tempo. I primi successi dell'applicazione della teoria si ebbero solo negli anni '30, quando W. Tollmien ed H. Schlichting, allievi della scuola di Prandtl, riuscirono con successo nel determinare il Reynolds critico per alcune tipologie di flusso.

Il punto di partenza dell'indagine teorica sulla stabilità è, come sempre, suggerito dalle osservazioni sperimentali. La caratteristica più evidente del fenomeno della transizione e della turbolenza, in un fissato punto dello spazio, è la rapida ed irregolare fluttuazione nel tempo di velocità e pressione. Tali grandezze non possono più essere considerate costanti se non mediate su lunghi intervalli temporali (media alla Reynolds). Ciò suggerisce che ogni flusso laminare è inizialmente soggetto, ben prima che avvenga la transizione, a piccole perturbazioni, anche se queste possono essere talmente piccole da non poter essere rilevate. I disturbi possono originarsi in corrispondenza dell'ingresso di un tubo o, in uno strato limite, possono essere dovuti alla rugosità della parete o ad irregolarità del flusso potenziale esterno.

La forma dei disturbi non viene determinata; la teoria infatti è volta a mettere in evidenza l'andamento temporale delle perturbazioni che si originano in seno al flusso con lo scopo di stabilire le condizioni per le quali si verifica il loro graduale smorzamento o l'eventuale amplificazione. Il primo comportamento caratterizza intuitivamente i flussi laminari stabili. Nel secondo caso invece si è in una condizione di instabilità e dunque è possibile che avvenga la transizione e il flusso diventi turbolento.

Per un'analisi matematica più rigorosa del problema occorre innanzitutto definire cosa si intende per stabilità, amplificazione, smorzamento, ovvero tutti quei concetti dedotti dalle osservazioni sperimentali.

Seguendo la teoria classica della stabilità dei sistemi di equazioni differenziali, si dice che il sistema che governa il flusso base è stabile, nel senso di Liapunov, se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \rightarrow \|\bar{u}(\bar{x}, 0) - \bar{U}(\bar{x}, 0)\|, \|p(\bar{x}, 0) - P(\bar{x}, 0)\| < \delta$$

allora

$$\|\bar{u}(\bar{x}, t) - \bar{U}(\bar{x}, t)\|, \|p(\bar{x}, t) - P(\bar{x}, t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

Ovvero se per piccoli disturbi, contenuti in un intorno di raggio δ delle condizioni iniziali di velocità e pressione del flusso, la soluzione perturbata rimane limitata ad un intorno di raggio ε , per ogni istante di tempo t . Nel caso in cui non si verificasse questa condizione si avrebbe l'instabilità, in quanto il disturbo risulterebbe amplificato.

Il significato matematico di piccola perturbazione è riferito alla definizione di norma, nonostante l'arbitrarietà del caso è usuale mettere:

$$\|\bar{u}(\bar{x}, t) - \bar{U}(\bar{x}, t)\| = \max|\bar{u}(\bar{x}, t) - \bar{U}(\bar{x}, t)|$$

Di conseguenza può essere introdotto il concetto di stabilità asintotica che si verifica quando la perturbazione iniziale viene completamente smorzata, dunque annullata, e la soluzione perturbata tende nel tempo a coincidere con quella non perturbata. In termini matematici questa condizione si traduce come:

$$\|\bar{u}(\bar{x}, t) - \bar{U}(\bar{x}, t)\|, \|p(\bar{x}, t) - P(\bar{x}, t)\| \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow \infty$$

Definiti gli strumenti dell'analisi si può passare alla formulazione della teoria.

Lo studio della stabilità di un campo di moto richiede come presupposto basilare la sua completa conoscenza. Il campo di velocità $\bar{U}(\bar{x}, t)$, deve essere calcolato per ogni $\bar{x} = (x, y, z)$ e per ogni tempo t , come anche il relativo campo di pressioni $P(\bar{x}, t)$. Il flusso base (*basic flow*) è una soluzione del sistema di equazioni Navier – Stokes o delle equazioni dello strato limite da questo ricavate.

Purtroppo poche configurazioni di flusso laminare corrispondono a soluzioni note delle equazioni non lineari del moto e pochissime sono abbastanza semplici da permettere un'analisi dettagliata della loro stabilità. Di conseguenza gli studi sul problema sono limitati a poche tipologie di flusso per i quali spesso è stato necessario ricorrere ad ipotesi semplificative e ad approssimazioni delle soluzioni.

Al flusso base noto si sovrappone il sistema di perturbazioni. Denotando le grandezze ad esse relative con u' , v' , w' e p' , si ha che il campo di moto risultante è caratterizzato da:

$$u = U + u' \quad v = V + v' \quad w = W + w' \quad p = P + p'$$

La stabilità del flusso perturbato può essere analizzata seguendo due diversi approcci al problema.

- Secondo il “*metodo dell’energia*” è possibile risalire alle condizioni critiche valutando l’andamento temporale dell’energia legata alle perturbazioni. La crescita o decrescita indicherebbe rispettivamente la stabilità o instabilità del flusso. In questo caso i disturbi possono essere completamente arbitrari, dovendo soddisfare solo l’equazione di continuità. I risultati ottenuti dall’applicazione di questa teoria sono stati spesso insufficienti e non verificati dall’indagine sperimentale.
- Il secondo approccio, con il quale sono state ottenute le prime conferme della teoria, è quello basato sul “*metodo delle piccole perturbazioni*”. Le perturbazioni che si sovrappongono al flusso base devono in questo caso soddisfare anche le equazioni del moto. L’arbitrarietà si conserva per quanto riguarda la determinazione della forma. Anche se in generale è di interesse studiare il caso più generale possibile, ovvero quello tridimensionale, tenendo conto del teorema di Squire, secondo cui i disturbi bidimensionali sono sempre più instabili di quelli in tre dimensioni, è possibile semplificare l’analisi conservando comunque una stima conservativa sul numero di Reynolds critico.

Per ottenere il sistema di equazioni che descrive il moto del campo perturbato è necessario introdurre alcune ipotesi semplificative:

- Incompressibilità e stazionarietà del flusso base.
- Dipendenza della componente di velocità U dalla sola componente y (tipicamente il flusso di taglio che si origina nei tubi e negli strati limite nel caso di *parallel flow*).
- Annullamento delle componenti V e W .
- Campo di pressione esterna dipendente da entrambe le variabili spaziali $P(x, y)$, il gradiente nella direzione x infatti “mantiene” il flusso.
- Grandezze perturbative piccole rispetto al flusso base

Si ha perciò:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u' \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v' \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad B.C. \quad \begin{cases} y = 0 & u' = v' = 0 \\ y = \infty & u' = v' = 0 \end{cases}$$

Il sistema di equazioni ottenuto è già linearizzato. Grazie all' ipotesi di piccole perturbazioni infatti è possibile trascurare i termini di secondo grado ottenuti dal prodotto di due grandezze relative al campo di disturbi. I coefficienti moltiplicativi delle derivate parziali presenti sono noti avendo supposto la conoscenza preliminare del flusso base.

Le grandezze che compaiono nelle equazioni devono essere opportunamente adimensionalizzate. Nel caso dello strato limite le lunghezze sono riferite allo spessore δ o allo spessore di spostamento δ^* , mentre le velocità sono scalate come la velocità del flusso esterno; per il flusso nei tubi si normalizza rispettivamente con il diametro e la velocità massima del flusso di Poiseuille.

1.4 Metodo dei "normal modes": equazione di Orr - Sommerfeld

La linearizzazione del sistema di equazioni perturbative permette di studiare il comportamento dei disturbi come se questi si sovrapponevano al moto medio separatamente gli uni dagli altri. Ogni perturbazione viene risolta come un "modo", ovvero come un' onda monocromatica che si propaga nella direzione x . Il risultato dell'azione complessiva sarà naturalmente la somma delle singole interazioni dei modi. A questo proposito è importante sottolineare che un flusso è considerato instabile se anche una sola perturbazione è instabile.

Poiché la forma delle perturbazioni non è determinata ed è arbitraria, è possibile rappresentare la soluzione di ciascun modo introducendo una funzione di corrente $\psi(x, y, t)$.

In questo modo l'equazione di continuità viene automaticamente soddisfatta poiché, le componenti della velocità perturbativa possono essere espresse come:

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La soluzione di prova per il modo della perturbazione è dunque rappresentata dalla funzione:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)}$$

α è reale e rappresenta il numero d'onda del disturbo in direzione x , $\lambda = 2\pi/\alpha$ è dunque la lunghezza d'onda. Il parametro β , invece, è un numero complesso:

$$\beta = \beta_r + i\beta_i$$

la cui parte reale è la frequenza del modo, mentre la parte immaginaria è il fattore di amplificazione e costituisce il discriminante del comportamento dell'onda.

La funzione ψ è dunque complessa, ma solo la parte reale ha un significato fisico rilevante. Essa è rappresentata dalla relazione:

$$\mathbf{Re}(\psi) = e^{\beta_i t} [\varphi_r \cos(\alpha x - \beta_r t) - \varphi_i \sin(\alpha x - \beta_i t)]$$

In cui $\varphi = \varphi_r + i\varphi_i$ è l'ampiezza complessa. L'uguaglianza mette in evidenza il ruolo del fattore di amplificazione precedentemente definito. Si osserva infatti che se $\beta_i < 0$ si ha lo smorzamento e la stabilità del flusso, per $\beta_i > 0$ al contrario si avrà amplificazione ed instabilità.

In alcuni casi può essere utile riferirsi al parametro che si ottiene dal rapporto dei precedenti e che definisce la velocità di fase complessa c dell'onda perturbativa:

$$c = \frac{\beta}{\alpha} = c_r + ic_i$$

Naturalmente la parte immaginaria di questa grandezza conserva lo stesso significato fisico di fattore di amplificazione.

La funzione φ che rappresenta l'ampiezza dell'onda, infine, si assume dipenda solo dalla coordinata y poiché anche il flusso base è funzione della sola y .

Le velocità del campo di perturbazioni possono essere espresse tramite la funzione di corrente introdotta:

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varphi'(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}$$

$$v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\alpha \varphi(y) e^{i(\alpha x - \beta t)}$$

Sostituendo le espressioni ottenute all'interno delle equazioni del moto e combinando queste in modo da eliminare la pressione, si ottiene un'equazione di quarto grado per l'ampiezza $\varphi(y)$ delle perturbazioni nota come equazione di Orr – Sommerfeld e che costituisce il punto di partenza per l'analisi della stabilità primaria dei flussi laminari.

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi = -\frac{i}{\alpha Re} (\varphi'''' - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi)$$

Le grandezze a sinistra dell'uguaglianza costituiscono i termini inerziali, mentre quelli a destra rappresentano la parte viscosa dissipativa delle equazioni del moto. Essendo di quarto grado l'equazione deve essere risolta accoppiata a quattro opportune condizioni al contorno. Nel caso del flusso di strato limite queste condizioni sono fisicamente suggerite dalla necessità di annullare la velocità del disturbo a parete, condizione di aderenza (*no slip*), e nel flusso esterno, perciò:

$$y = 0 \quad u' = v' = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = 0$$

$$y = \infty \quad u' = v' = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = 0$$

Con la deduzione dell'equazione di Orr – Sommerfeld e l'introduzione delle relative condizioni al contorno, il problema della stabilità del flusso laminare si risolve come un problema agli autovalori.

Per un flusso base noto, si hanno 4 parametri da cui dipende la soluzione dell'equazione: il numero di Reynolds Re , il numero d'onda della perturbazione α , e la parte reale e complessa del parametro $c = c_r + ic_i$. Tra questi il Reynolds della corrente e il numero d'onda, o la relativa lunghezza d'onda λ , sono noti a priori.

Perciò per ogni coppia di valori di Re e α si ottiene un'autofunzione $\varphi(y)$ e un autovalore complesso c . La parte immaginaria di quest'ultimo, come già accennato, descrive il comportamento temporale del modo perturbativo analizzato.

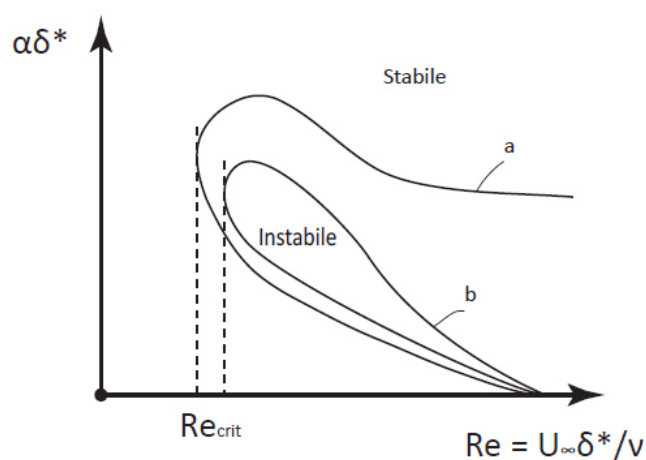
Si avrà perciò:

- $c_i < 0$, flusso stabile
- $c_i > 0$, flusso instabile
- $c_i = 0$, disturbo neutrale

È possibile inoltre evidenziare due diversi comportamenti delle onde instabili. Da un lato queste possono viaggiare lungo lo strato limite ed amplificarsi, ovvero essere convettivamente instabili. Dall'altro l'amplificazione può verificarsi nel tempo quanto nello spazio dando luogo ad un comportamento assolutamente instabile.

Il successo della teoria dipende dal fatto che è possibile ricavare un set completo di autofunzioni, o "normal modes", dai quali si ricava l'andamento temporale di ogni perturbazione iniziale arbitraria.

I risultati possono essere visualizzati nel piano (α, Re) assegnando una coppia di valori c_r e c_i a ciascun punto e ottenendo un grafico in cui le regioni delle soluzioni stabili sono separate da quelle instabili dalle tipiche curve di stabilità neutrale, ovvero i luoghi dei punti per cui $c_i = 0$.



<

Figura 9 - Curve di stabilità neutrale per uno strato limite piano soggetto a perturbazioni bidimensionali

(a): stabilità fluidi non viscosi, $Re \rightarrow \infty$

(b): stabilità fluidi viscosi

I punti su queste curve in cui il Reynolds raggiunge il valore minimo definiscono il valore critico del parametro per il flusso studiato. Per valori inferiori al limite, tutte le perturbazioni che si sovrappongono vengono smorzate; per valori superiori possono verificarsi alcuni casi di disturbi amplificati. È importante sottolineare il fatto che anche al di sopra del valore critico è possibile osservare ancora l'andamento temporale decrescente di alcune onde perturbative, ovvero trovare delle configurazioni stabili. Ciò suggerisce l'idea che il Reynolds critico determinato con la soluzione del problema agli autovalori di Orr – Sommerfeld, non rappresenti tanto il valore discriminante il flusso laminare da quello turbolento, quanto, come poi confermato dalle osservazioni sperimentali, il numero di Reynolds al quale ha inizio il fenomeno della transizione. Il parametro critico osservato sperimentalmente è più elevato di quello teorico: è

dunque confermato che la turbolenza, come illustrato nelle figure, si sviluppa completamente sempre più a valle della transizione.

1.5 La stabilità secondaria

Nei precedenti paragrafi è stata esposta la teoria della stabilità primaria che descrive l'origine e la propagazione a valle, con progressiva amplificazione, delle onde bidimensionali di Tollmien – Schlichting (*TS waves*). Queste costituiscono una delle principali cause della transizione laminare – turbolento nei flussi di strato limite.

I meccanismi che causano instabilità però non possono essere riconducibili solo allo sviluppo di onde e strutture bidimensionali conseguenti alla sovrapposizione sul flusso base di sistemi perturbativi con la stessa geometria piana. La sperimentazione mostra in modo chiaro la natura prettamente tridimensionale del flusso turbolento.

La teoria della stabilità secondaria, quindi, utilizzando come punto di partenza il campo di moto bidimensionale perturbato e introducendo un ulteriore sistema di disturbi arbitrari nelle tre direzioni spaziali, amplia lo studio della stabilità dei flussi al caso tridimensionale, con lo scopo di completare la descrizione del fenomeno.

La rappresentazione schematica del processo di evoluzione da flusso laminare a struttura turbolenta completamente sviluppata, riportata in figura 4, si amplia con nuovi fenomeni previsti dai risultati teorici e confermati dall'osservazione sperimentale. Il processo avviene con l'iniziale formazione delle *TS waves*, seguite dalle tipiche *Λ -structures*, si evidenzia il conseguente decadimento dei vortici che termina con la formazione di *turbulent spots*.

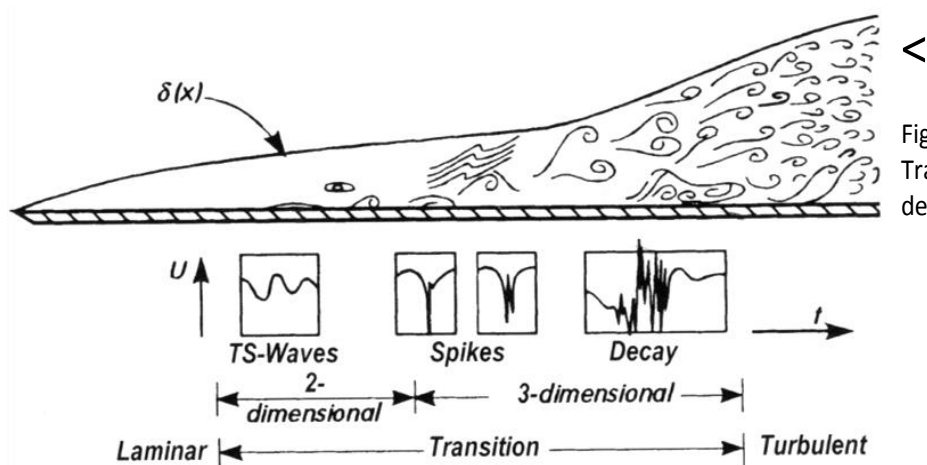


Figura 10 –
Transizione 2-D – 3-D
dello strato limite

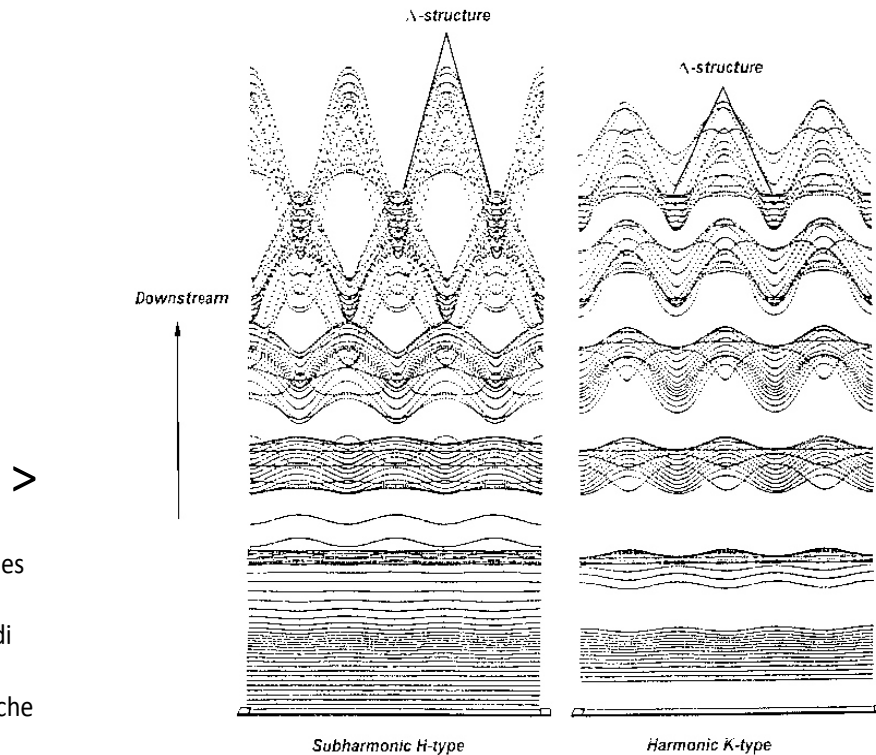


Figura 2 – Streaklines delle Λ -structures nello strato limite di lamina piana per oscillazioni armoniche e sub-armoniche [F.P. Bertolotti, 1991]

Durante passaggio da flusso 2-D a flusso 3-D si nota in particolare che il segnale della velocità longitudinale U mostra inizialmente fluttuazioni di frequenza simile alle caratteristiche onde di Tollmien – Schlichting, successivamente le variazioni diventano più irregolari e il segnale forma le cosiddette “spikes”. Queste preludono al decadimento finale e all’instaurazione del regime di flusso turbolento.

L’approccio teorico al problema si basa sull’idea che il risultato dell’analisi della stabilità primaria, derivante dal problema agli autovalori di Orr – Sommerfeld, può essere utilizzato localmente come un nuovo flusso base. Ciò comporta l’introduzione di un’ipotesi enormemente semplificativa. Fissando un punto del dominio in cui effettuare lo studio infatti, si trascura la variazione spaziale del profilo di velocità. Questa supposizione è però necessaria per poter continuare la formulazione.

Al nuovo *basic flow* bidimensionale si sovrappone un sistema di perturbazioni con componenti nelle tre le direzioni spaziali, ottenendo perciò un flusso perturbato, caratterizzato dalle grandezze:

$$u_S = u_p + u'' \quad v_S = v_p + v'' \quad w_S = w'' \quad p_S = p_p + p''$$

in cui il pedice P indica le grandezze che caratterizzano il flusso risultante dall’analisi della stabilità primaria.

Con lo sviluppo della teoria secondaria insorge un nuovo problema, non riscontrato nella precedente deduzione. Poiché infatti il flusso base è ottenuto dalla soluzione dell'analisi primaria di stabilità, le grandezze che lo caratterizzano sono soggette alle tipiche fluttuazioni dovute alle *TS waves*, perciò non può essere subito introdotta l'ipotesi di stazionarietà.

Per ricavare il problema agli autovalori occorre quindi operare una scelta opportuna del sistema di coordinate. Introducendo una terna di assi (ξ, y, z) , in cui la nuova coordinata ξ è data dalla relazione:

$$\xi = x - c_r t$$

con $c_r = \frac{\beta_r}{\alpha}$ velocità di fase delle onde TS caratteristiche, è possibile rendere il nuovo flusso base stazionario. Fisicamente la trasformazione di coordinate introdotta porta il sistema di riferimento "a cavallo" dell'onda che si propaga a valle dello strato limite.

Si assume che la velocità verticale sia nulla, $V = 0$, e che il flusso sia quanto più possibile approssimabile localmente con un parallel flow, ovvero si abbia dipendenza delle componenti della velocità dalla sola variabile y .

I disturbi tridimensionali introdotti rispettano anche in questo caso le equazioni del moto di Navier – Stokes, ed è possibile linearizzare il sistema che descrive il flusso perturbato trascurando i termini ottenuti dal prodotto di due grandezze relative alla perturbazione. Combinando le equazioni della quantità di moto in modo da eliminare i termini che contengono la pressione si ottengono due equazioni lineari alle derivate parziali nelle incognite u'' e v'' . La terza componente di velocità w'' , non contenuta nelle relazioni precedentemente ricavate, può essere calcolata mediante il soddisfacimento della continuità.

Per disturbi tridimensionali, analogamente al caso bidimensionale della stabilità primaria, si inseriscono soluzioni di prova per le tre componenti di velocità:

$$\begin{cases} u'' \sim \varphi''(\xi, y) e^{i(\alpha'' z - \beta t)} \\ v'' \sim \psi''(\xi, y) e^{i(\alpha'' z - \beta t)} \\ w'' \sim \zeta''(\xi, y) e^{i(\alpha'' z - \beta t)} \end{cases}$$

Infatti l'obiettivo della teoria non è tanto quello di determinare la forma esatta dei disturbi ai quali è soggetto il flusso base, quanto quello di evidenziare l'andamento temporale degli stessi. I parametri α'' e β hanno il medesimo significato precedentemente descritto, con la sola differenza che ora il numero d'onda α'' rappresenta le onde perturbative trasversali, in direzione z .

Le soluzioni di prova vengono sostituite all'interno delle equazioni del flusso perturbato e con le condizioni al contorno:

$$y = 0 \quad \varphi'' = 0 \quad \psi'' = 0 \quad \frac{\partial \psi''}{\partial y} = 0$$

$$y = \infty \quad \varphi'' = 0 \quad \psi'' = 0 \quad \frac{\partial \psi''}{\partial y} = 0$$

si ottiene il tipico problema agli autovalori che caratterizza l'analisi della stabilità secondaria, la cui soluzione è ottenuta numericamente.

1.6 La simulazione delle equazioni

Storicamente lo studio del comportamento delle perturbazioni che entrano nello strato limite è sempre stato affrontato seguendo le linee guida della teoria lineare, primaria e secondaria.

Nonostante il problema classico sia formulato e riconosciuto come un problema ai valori iniziali, le simulazioni di calcolo volte ad esaminare in dettaglio la dinamica della perturbazione, includendo il periodo transitorio iniziale, sono state poche.

Le soluzioni che si ottengono dall'applicazione della teoria classica sulla stabilità dei flussi descrivono solo il comportamento asintotico dei disturbi, ovvero l'andamento una volta esaurito il transitorio iniziale.

Per completare la formulazione del problema agli autovalori, infatti, è necessario impostare una soluzione di prova per i disturbi, che ne rappresenti sia la forma, secondo una funzione arbitraria, che la dipendenza dal tempo, solitamente approssimata con un'esponenziale.

Introducendo la soluzione di prova nel sistema di equazioni e aggiungendo delle opportune condizioni al contorno, si ottiene il problema agli autovalori. La parte immaginaria di questi ultimi rappresenta il fattore discriminante tra il carattere stabile o instabile dell'onda studiata.

La teoria ha il "difetto" di valutare a posteriori l'andamento temporale introdotto nel problema e di fatto eliminato dal calcolo, fornendo solo una stima dello stato finale del disturbo. In questo modo il comportamento dinamico completo non è ricostruibile, e tutte le informazioni che possono essere ricavate dal transitorio vengono perse.

Nonostante ciò si è sempre considerato sufficiente dimostrare la stabilità o l'instabilità del flusso d'interesse cercando al più di dare una spiegazione dell'origine delle instabilità osservate dalla fervida attività sperimentale.

L'approccio alla soluzione delle equazioni nella formulazione velocità - vorticità permette invece di valutare la dinamica completa dell'onda perturbativa. Si ha quindi la possibilità di studiare il transitorio iniziale, che può durare anche alcune centinaia di tempi-scala e durante il quale possono essere evidenziati effetti non-lineari e di risonanza tra le soluzioni.

Il progresso tecnologico, inoltre, ha messo a disposizione nuovi mezzi di calcolo sempre più potenti che permettono il continuo affinamento dei metodi risolutivi.

In ottica di ottimizzare le equazioni per la computazione: il sistema di governo è preliminarmente rielaborato tramite una trasformazione di Laplace - Fourier di tutte le grandezze.

Nonostante non esista ancora una correlazione formale tra l'analisi temporale e quella spaziale caratteristica del problema agli autovalori, i risultati ottenuti dall'integrazione diretta delle equazioni di governo, valutati su tempi scala sufficientemente lunghi, sono in perfetto accordo con quanto previsto dalla teoria della stabilità idrodinamica classica ed osservato per via sperimentale. Ciò conferma, da un lato, la validità dell'approccio storico al problema e dimostra dall'altro che la simulazione diretta delle equazioni ha un ottimo riscontro con la sperimentazione.

2. Formulazione del problema

2.1 Strato limite: *basic flow*

Per impostare lo studio di uno strato limite in presenza di *crossflow* è necessario definire un sistema di riferimento idoneo.

La terna di assi utilizzata ha origine nel bordo di attacco, l'asse x e l'asse z sono tangenti alla superficie dell'ala, il primo è parallelo alla corda e localmente tangente al profilo, il secondo è diretto lungo l'apertura in direzione perpendicolare al precedente; l'asse y è perpendicolare a entrambi ed ha verso uscente dalla superficie.

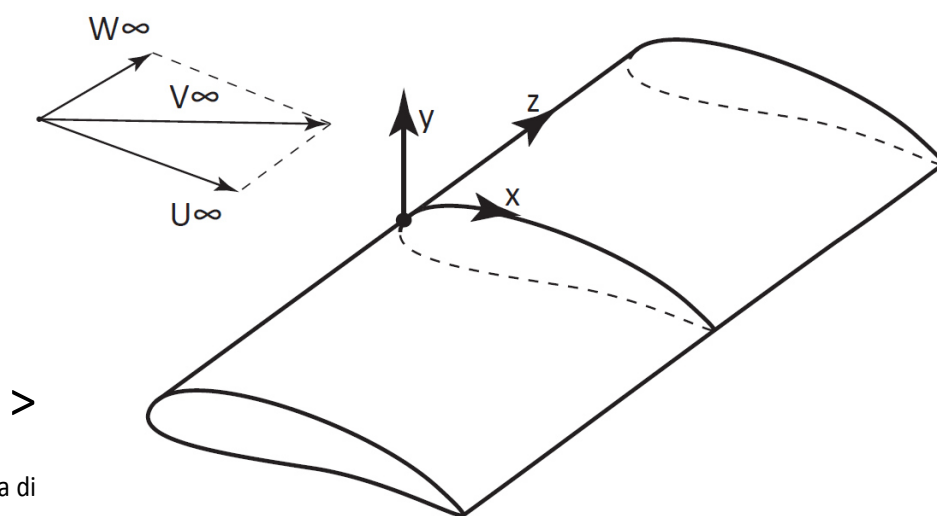


Figura 1 – Sistema di riferimento

Per il flusso esterno si fanno le ipotesi di stazionarietà ed incompressibilità. Si assume inoltre che il profilo di velocità nello strato limite sia omogeneo lungo l'asse z , ovvero che esso si mantenga uguale a se stesso lungo tutta l'apertura alare. La velocità del flusso indisturbato a monte ha due componenti: U_∞ diretta lungo l'asse x e W_∞ diretta lungo l'apertura, parallelamente all'asse z . La risultante è una velocità V_∞ inclinata rispetto all'asse x precedentemente definito.

Questo è il tipico flusso aerodinamico che interessa l'ala di allungamento finito, in cui si osservano i tipici vortici di estremità dovuti al movimento di fluido in direzione trasversale alla superficie alare. In una zona sufficientemente estesa vicina alle estremità, la velocità indotta nella direzione z da queste strutture vorticose si sovrappone al campo di moto parallelo alla direzione x , come rappresentato nella figura seguente.

La diretta conseguenza dell'esistenza di una componente trasversale di velocità è che le linee di corrente del flusso esterno non sono più delle rette parallele alla corda, bensì curve la cui tangente forma localmente un angolo di ampiezza θ con la direzione x . È importante sottolineare che l'angolo θ non è costante lungo la corda del profilo ma cambia in ragione della variazione della componente longitudinale della velocità.

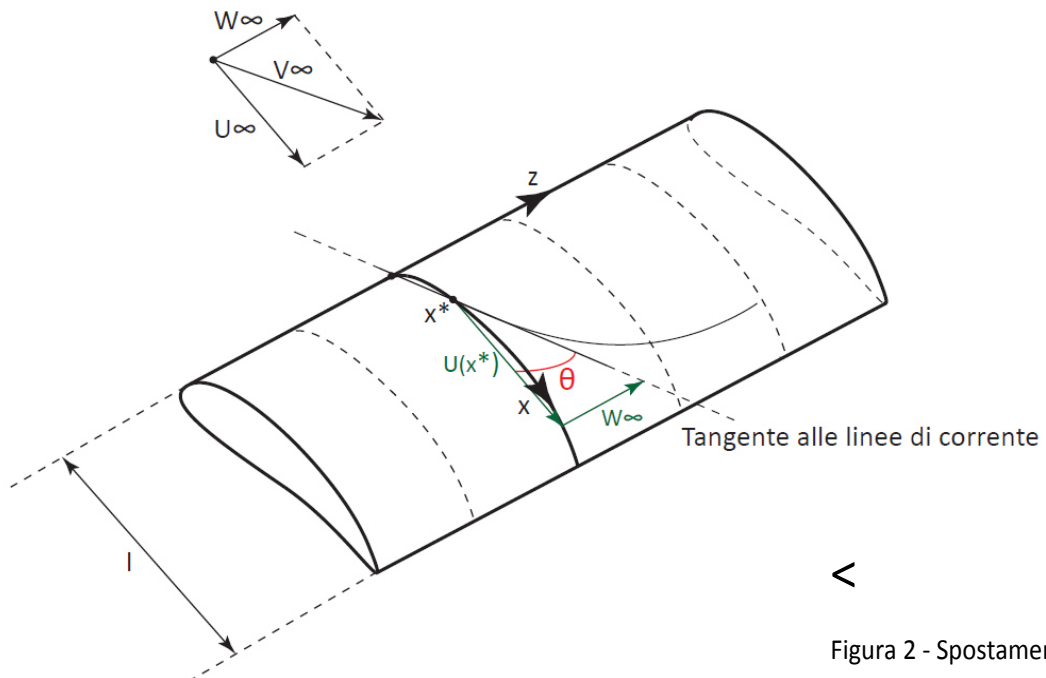


Figura 2 - Spostamento delle linee di corrente

Un flusso esterno così caratterizzato forma uno strato limite tridimensionale la cui completa determinazione, necessaria per intraprendere qualsiasi studio di stabilità, non è un problema di semplice soluzione nel caso più generale.

Oltre alle ipotesi semplificative già introdotte, ovvero stazionarietà, incompressibilità e omogeneità lungo la direzione *spanwise*, per semplificare il calcolo si ammette che le componenti della velocità U_∞ e W_∞ dipendano solo dalla coordinata curvilinea x misurata a partire dal bordo di attacco, ovvero dal punto di arresto della corrente esterna.

Si ha dunque:

$$U_\infty = U_\infty(x) \quad W_\infty = W_\infty(x)$$

Non essendo possibile determinare delle soluzioni analitiche delle equazioni dello strato limite, per calcolare una soluzione si ricorre ad approssimazioni delle componenti della velocità del flusso esterno: una scelta opportuna è quella di rappresentare U_∞ con uno sviluppo in serie di potenze. Inoltre si considera che W_∞ , come osservato sperimentalmente, è con buona approssimazione costante in una regione sufficientemente estesa lontano dall'estremità alare, in cui si verifica la sovrapposizione con i vortici di estremità.

Con le ipotesi fatte perciò la rappresentazione delle due velocità è:

$$U_\infty = u_1x + u_3x^3 + u_5x^5 + \dots$$

$$W_\infty = \text{const}$$

Per il calcolo del campo di moto nello strato limite lo sviluppo della componente longitudinale può essere arrestato al primo ordine.

Dallo studio dimensionale delle equazioni che governano il moto si ricava che le derivate seconde rispetto alle variabili x e z , tangenti alla superficie alare, possono essere trascurate rispetto alla derivata seconda rispetto alla variabile normale y .

Inoltre l'omogeneità dei profili supposta lungo l'apertura alare elimina la dipendenza dalla variabile z di tutte grandezze di interesse all'interno dello strato limite. L'ipotesi decade naturalmente all'estremità e all'intersezione ala-fusoliera.

Il sistema di equazioni di governo risulta dunque essere:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

In cui è stato sostituito $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_e}{\partial x} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx}$, in quanto la pressione è impressa sullo strato limite dal flusso esterno ed in questo, irrotazionale, si conserva il binomio di Bernoulli, espresso in questo caso in forma differenziale.

Le condizioni al contorno che accompagnano il sistema di equazioni sono:

$$y = 0 \quad u = v = w = 0 \quad ; \quad y = \infty \quad u = U_\infty \quad w = W_\infty$$

Ovvero deve essere rispettata la condizione di aderenza (*no slip*) a parete e all'esterno dello strato limite, matematicamente per $y \rightarrow \infty$, le velocità u e w devono eguagliare quelle della corrente indisturbata.

Si può notare come le scelte semplificative adottate riducono il grado del sistema, nel senso che u e v possono essere ottenute tramite la prima e l'ultima equazione, il calcolo si completa infine con la determinazione di w grazie alla seconda equazione.

Il calcolo delle componenti u e v deriva dalla soluzione dell'equazione differenziale ordinaria di Falkner e Skan. Questa si ottiene dal sistema di equazioni di governo dello strato limite bidimensionale. Con l'introduzione della funzione di corrente ψ nel bilancio di quantità di moto in direzione x , le velocità u e v possono essere espresse come:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Quindi, sostituendo a ψ la funzione di corrente adimensionalizzata:

$$f = \frac{\psi}{U_\infty \delta} \quad ; \quad \frac{\delta}{x} = \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

e ad y la variabile adimensionale:

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} \qquad u_1 = \frac{U_\infty}{x}$$

e ricavando le espressioni delle derivate di ψ nei termini di f e di η si ottiene l'equazione cercata. Nel caso studiato:

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'f') = 0 \qquad \beta = \frac{m+1}{2m} = 1 \quad (m = 1)$$

In cui β è un parametro che descrive la corrente esterna, espressa , nel caso generale di strato limite che si sviluppa dopo un punto di arresto regolare, dalla relazione:

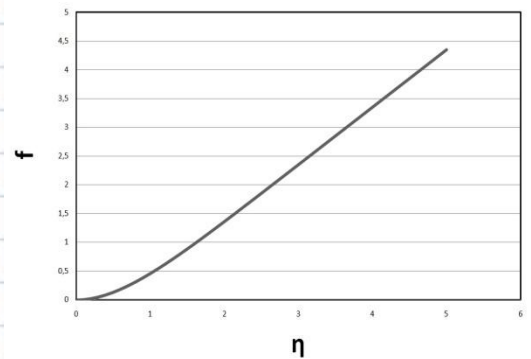
$$U = ax^m$$

Le condizioni al contorno derivano dalle precedenti, nei termini delle nuove grandezze:

$$\begin{aligned} \eta = 0 \quad f = f' = 0 \\ \eta = \infty \quad f' = 1 \end{aligned}$$

Soluzioni numeriche della funzione f e delle sue derivate prima e seconda, f' ed f'' sono state calcolate per diversi valori del parametro β , nel caso in esame i valori delle funzioni e i rispettivi grafici sono:

η	f	f'	f''
0	0	0	1,232588
0,1	0,0059964	0,1182649	1,132831
0,2	0,02332226	0,2266124	1,034454
0,3	0,0509948	0,3252411	0,938631
0,4	0,08805659	0,4144561	0,846325
0,5	0,13335852	0,4946493	0,758307
0,6	0,186701	0,5662805	0,675171
0,7	0,24657292	0,6298609	0,59735
0,8	0,31242302	0,6859375	0,525131
0,9	0,38352925	0,7350793	0,458672
1	0,45922702	0,7778653	0,398013
1,1	0,53890971	0,8148734	0,343096
1,2	0,62202803	0,8466711	0,293776
1,3	0,7080886	0,873808	0,249836
1,4	0,79665179	0,8968086	0,211003
1,5	0,887329	0,9161682	0,176958
1,6	0,97977949	0,9323482	0,147351
1,7	1,07370688	0,9457741	0,121813
1,8	1,16885548	0,9568338	0,099964
1,9	1,26500648	0,9658772	0,081425
2	1,36197417	0,9732167	0,065825
2,2	1,55776033	0,9838534	0,04204
2,4	1,75525389	0,9905494	0,02602
2,6	1,95380683	0,9946336	0,015597
2,8	2,15299652	0,9970457	0,009049
3	2,35255669	0,9984242	0,005078
3,2	2,55232542	0,9991861	0,002755
3,4	2,75220768	0,9995931	0,001444
3,6	2,95214968	0,9998032	0,000731
3,8	3,15212205	0,999908	0,000357
4	3,35210931	0,9999584	0,000169
4,2	3,55210365	0,9999819	0,000077
4,4	3,75210121	0,9999923	0,000034
4,6	3,9521002	0,9999969	0,000014
4,8	4,15209979	0,9999988	0,000006
5	4,35209964	0,9999995	0,000002

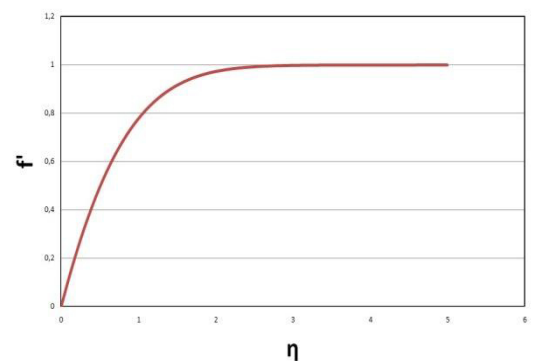


^

Figura 4 – Grafico di f

Figura 5 - Grafico di $f' = \frac{u}{U_\infty}$

v



<

Figura 3 – Soluzione numerica delle funzioni f , f' ed f'' per $\beta = 1$

Il primo calcolo numerico della componente di velocità w lungo l'asse z fu eseguito da W.R. Sears attorno agli anni '50 del secolo scorso, essa si ottiene dall'integrazione dell'equazione differenziale ordinaria:

$$g'' + fg' = 0$$

Con le condizioni al contorno:

$$\eta = 0 \quad g = 0$$

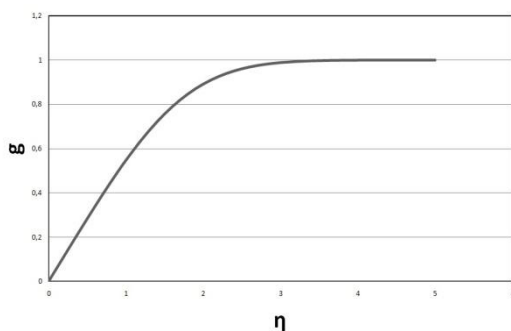
$$\eta = \infty \quad g = 1$$

La soluzione g , essendo nota la soluzione della funzione f , si ottiene per integrazione diretta dell'equazione e, come mostrato da L. Prandtl, risulta essere analiticamente:

$$g(\eta) = \frac{\int_0^\eta \left(e^{-\int_0^\eta f d\eta} \right) d\eta}{\int_0^\infty \left(e^{-\int_0^\eta f d\eta} \right) d\eta}$$

Anche i valori numerici di g sono calcolati e riportati nella tabella di seguito assieme al grafico della funzione:

η	g	η	g	η	g
0	0	1,2	0,6388	3,4	0,9964
0,1	0,057	1,4	0,72	3,6	0,9981
0,2	0,114	1,6	0,7892	3,8	0,999
0,3	0,1709	1,8	0,8462	4	0,9995
0,4	0,2275	2	0,8913	4,2	0,9998
0,5	0,2836	2,2	0,9257	4,4	0,9999
0,6	0,3389	2,4	0,9509	4,6	1
0,7	0,3932	2,6	0,9686	4,8	1
0,8	0,4462	2,8	0,9807	5	1
0,9	0,4975	3	0,9885	$g'(0)$	0,5705
1	0,5469	3,2	0,9934		



Λ

Figura 6 – Soluzione numerica della funzione $g = \frac{w}{W_\infty}$

<

Figura 7 – Grafico di $g = \frac{w}{W_\infty}$

Il flusso di strato limite è dunque noto, le componenti della velocità possono essere espresse in funzione delle soluzioni delle equazioni f e g :

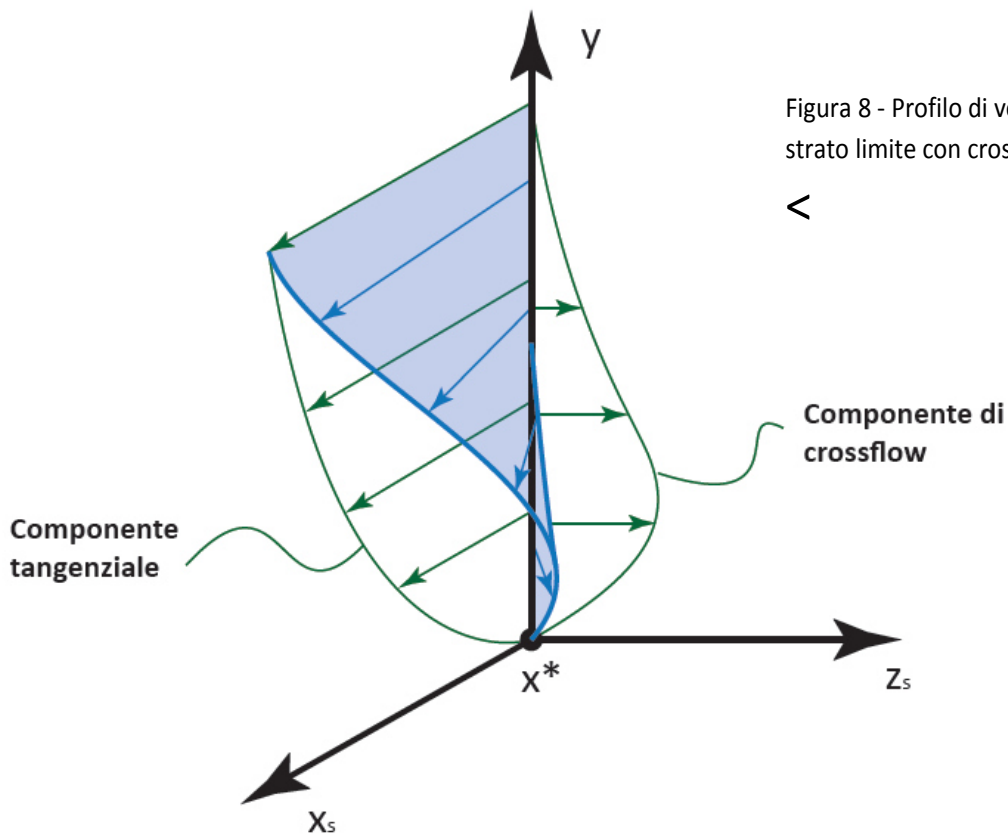
$$u \cong u_1 x f' + \dots = U_\infty f'$$

$$v \cong 0$$

$$w \cong W_\infty g + \dots$$

La componente $v(x, y)$ è trascurabile rispetto alle altre due. Se si considera il flusso ancora laminare essa è dello stesso ordine di grandezza dei disturbi e fisicamente rappresenta il fenomeno dell'entrainment che si verifica nei flussi turbolenti.

Prima di intraprendere lo studio della stabilità si effettua una rotazione del sistema di riferimento precedentemente descritto. Poiché le linee di corrente non sono parallele alla corda è possibile introdurre una terna di assi ruotati in modo da essere solidali al flusso. L'asse x_s è localmente tangente alle linee di corrente, l'asse z_s è sempre perpendicolare ad esso e tangente alla superficie alare, mentre la direzione y rimane invariata. Nelle figure 8 e 9 è rappresentato il dettaglio del profilo di velocità con la componente di *crossflow* e il grafico globale dello strato limite nei due sistemi di riferimento.



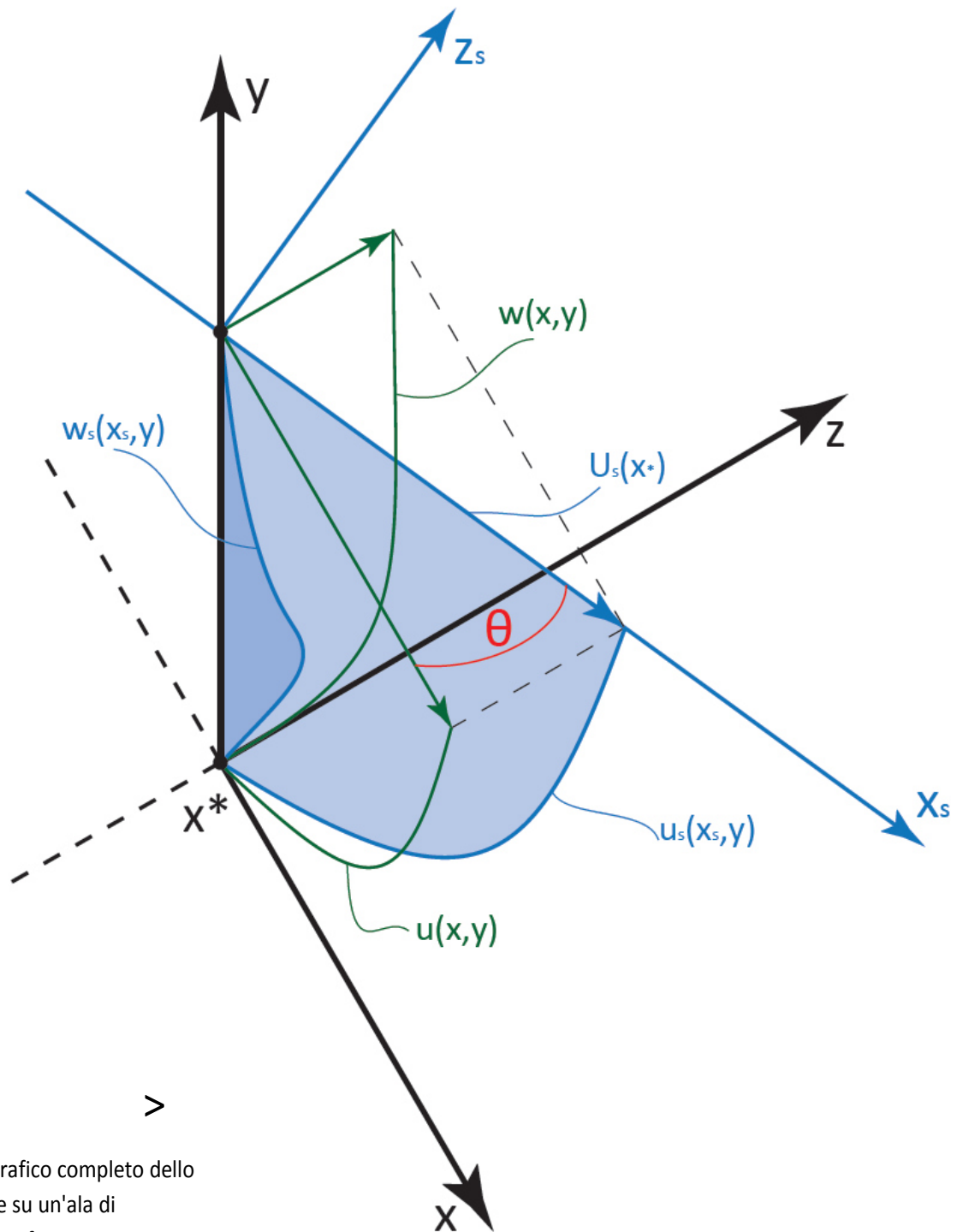


Figura 9 - Grafico completo dello strato limite su un'ala di allungamento finito

Le componenti della velocità nello strato limite dipendono dalla nuova variabile x_s , in direzione *streamwise*, e dalla variabile y :

$$u_s = u_s(x_s, y) \quad w_s = w_s(x_s, y)$$

Inoltre, come illustrato nella precedente rappresentazione schematica, sono verificate le relazioni geometriche:

$$U_s(x_s) = \sqrt{U_\infty^2(x_s) + W_\infty^2}$$

$$U_\infty = U_s \cos \theta \quad W_\infty = U_s \sin \theta$$

$$\frac{W_\infty}{U_\infty(x_s)} = \tan \theta$$

Perciò le grandezze nel nuovo sistema di riferimento possono essere messe in relazione alla terna di assi solidale alla superficie alare per mezzo dell'angolo di rotazione θ :

$$u_s = u \cos \theta + w \sin \theta$$

$$w_s = -u \sin \theta + w \cos \theta$$

Ovvero, sostituendo ad u e w le espressioni ottenute in funzione delle soluzioni delle equazioni dello strato limite:

$$u_s = U_\infty f' \cos \theta + W_\infty g \sin \theta$$

$$w_s = -U_\infty f' \sin \theta + W_\infty g \cos \theta$$

Le relazioni precedenti possono essere ulteriormente riscritte considerando le relazioni geometriche che intercorrono tra le grandezze definite nei due sistemi di riferimento. Adimensionalizzando rispetto alla velocità U_s calcolata lungo la direzione tangente alle linee di corrente si ottiene infine che la rappresentazione finale delle due componenti di velocità è:

$$u_s = f' \cos^2 \theta + g \sin^2 \theta$$

$$w_s = \sin \theta \cos \theta (g - f')$$

2.2 Sistema di equazioni perturbative

Il flusso base del quale si vuole studiare la stabilità è caratterizzato da una componente di velocità lungo l'asse tangente alle linee di corrente e da una componente di *crossflow* perpendicolare alle stesse. Entrambe le componenti dipendono solo dalla coordinata y normale alla superficie. Il campo di moto nello strato limite è il tipico flusso di taglio caratterizzato da una vettore velocità:

$$\bar{U} = (U_s(y), 0, W_s(y))$$

Per questo tipo di flusso la continuità è automaticamente soddisfatta e le equazioni della quantità di moto in direzione x_s e z_s , dunque rispetto al sistema di riferimento solidale al flusso, stabiliscono le relazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{Re_l} \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{Re_l} \frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2} \end{cases}$$

Le grandezze U_s e W_s nelle equazioni sono adimensionalizzate rispetto alle velocità della corrente indisturbata U_∞ , mentre il termine di pressione esterna P è dell'ordine di ρU_∞^2 . Per quanto riguarda le variabili spaziali x , y e z , esse sono tutte adimensionalizzate rispetto alla lunghezza della corda del profilo l , dunque per il flusso base il numero di Reynolds è definito come:

$$Re_l = \frac{\rho U_\infty l}{\mu}$$

Per affrontare l'analisi della stabilità del flusso di strato limite dell'ala finita si sovrappone ad esso un sistema tridimensionale di piccole perturbazioni di velocità che soddisfano il sistema di equazioni di Navier – Stokes. Dalla valutazione del transitorio di ciascuna perturbazione verrà valutata la stabilità del flusso. Se si osserva un'amplificazione nel tempo del disturbo studiato si avrà instabilità dello strato limite, al contrario uno smorzamento temporale delle perturbazioni indicherà una configurazione stabile.

Il sistema perturbativo, per il quale si fa la sola ipotesi di incompressibilità, deve verificare le relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re_{\delta^*}} \nabla^2 \tilde{u} \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re_{\delta^*}} \nabla^2 \tilde{v} \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \frac{1}{Re_{\delta^*}} \nabla^2 \tilde{w} \end{array} \right.$$

In cui le grandezze:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{u}(x, y, z, t) & \tilde{w} &= \tilde{w}(x, y, z, t) \\ \tilde{v} &= \tilde{v}(x, y, z, t) & \tilde{p} &= \tilde{p}(x, y, z, t) \end{aligned}$$

rappresentano le velocità e la pressione del campo di moto delle perturbazioni.

La variabile spaziale z è definita nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$, x e y variano invece nella semiretta $[0, +\infty)$. L'adimensionalizzazione delle grandezze fisiche che compaiono nel sistema è fatta rispetto alla velocità U_∞ del flusso indisturbato, per quanto riguarda le tre componenti perturbative della velocità, la pressione ha dimensione ρU_∞^2 , mentre stavolta tutte le tre coordinate spaziali sono adimensionalizzate rispetto allo spessore di spostamento δ^* :

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

al quale si riferisce anche il numero di Reynolds che compare nel sistema di governo del campo di moto perturbato:

$$Re_{\delta^*} = \frac{\rho U_\infty \delta^*}{\mu} = \frac{U_\infty \delta^*}{\nu}$$

Con il Reynolds globale del flusso base intercorre la relazione:

$$Re_{\delta^*} = 1,72 \sqrt{Re_l}$$

Il campo di moto risultante dalla sovrapposizione è caratterizzato quindi dalle grandezze:

$$u = U_s + \tilde{u} \quad v = \tilde{v} \quad w = W_s + \tilde{w} \quad p = P + \tilde{p}$$

Il sistema di equazioni perturbative, considerando anche le relazioni ricavate dall'equazioni di Navier – Stokes applicate al flusso base di strato limite, diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U_s \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U_s}{\partial y} + W_s \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{1}{Re_{\delta^*}} \nabla^2 \tilde{u} \quad (1) \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U_s \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + W_s \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{1}{Re_{\delta^*}} \nabla^2 \tilde{v} \quad (2) \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + U_s \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial W_s}{\partial y} + W_s \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{1}{Re_{\delta^*}} \nabla^2 \tilde{w} \quad (3) \end{array} \right.$$

In esso sono stati trascurati i termini corrispondenti al prodotto di due grandezze relative alle perturbazioni in quanto per ipotesi si ha:

$$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \ll U_\infty, W_\infty$$

In questo modo è possibile linearizzare il sistema di equazioni del moto. Inoltre i coefficienti delle derivate parziali U_s e W_s , così come le rispettive derivate, sono noti data la conoscenza del flusso base.

Per semplificare la ricerca di una soluzione numerica del sistema, le equazioni da (1) a (3) si combinano in modo da eliminare i termini di pressione derivando incrociato e sommando in modo opportuno. Dalle varie combinazioni si ottengono altrettante equazioni nei termini delle componenti del campo di vorticità delle perturbazioni:

$$\tilde{\omega} = \left(\tilde{\omega}_x = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z}, \tilde{\omega}_y = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}, \tilde{\omega}_z = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \widetilde{\omega}_z}{\partial t} + U_s \frac{\partial \widetilde{\omega}_z}{\partial x} + W_s \frac{\partial \widetilde{\omega}_z}{\partial z} + \frac{\partial U_s}{\partial y} \frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial z} - \frac{\partial W_s}{\partial y} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z} - \widetilde{v} \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} = \frac{1}{Re_{\delta^*}} \nabla^2 \widetilde{\omega}_z & A \\ \frac{\partial \widetilde{\omega}_x}{\partial t} + U_s \frac{\partial \widetilde{\omega}_x}{\partial x} + W_s \frac{\partial \widetilde{\omega}_x}{\partial z} + \frac{\partial U_s}{\partial y} \frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial x} - \frac{\partial W_s}{\partial y} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \widetilde{v} \frac{\partial^2 W_s}{\partial y^2} = \frac{1}{Re_{\delta^*}} \nabla^2 \widetilde{\omega}_x & B \\ \frac{\partial \widetilde{\omega}_y}{\partial t} + U_s \frac{\partial \widetilde{\omega}_y}{\partial x} + W_s \frac{\partial \widetilde{\omega}_y}{\partial z} + \frac{\partial U_s}{\partial y} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial z} - \frac{\partial W_s}{\partial y} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} = \frac{1}{Re_{\delta^*}} \nabla^2 \widetilde{\omega}_y & C \end{cases}$$

Le equazioni (A) e (B) così ottenute si combinano ulteriormente derivando incrociato e sottraendo opportunamente. In questo modo, definendo la grandezza cinematica:

$$\nabla^2 \widetilde{v} = \widetilde{\Gamma} = \frac{\partial \widetilde{\omega}_z}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{\omega}_x}{\partial y}$$

si ottiene un sistema di equazioni che, unitamente alla (C) ricavata in precedenza, descrive completamente il flusso perturbato nei termini della vorticità – velocità delle perturbazioni:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + W \frac{\partial}{\partial z} \right) \widetilde{\Gamma} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial^2 W}{\partial y} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial z} = \frac{1}{Re_{\delta^*}} \nabla^2 \widetilde{\Gamma} & (4) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + W \frac{\partial}{\partial z} \right) \widetilde{\omega}_y + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} = \frac{1}{Re_{\delta^*}} \nabla^2 \widetilde{\omega}_y & (5) \\ \nabla^2 \widetilde{v} = \widetilde{\Gamma} & (6) \end{cases}$$

La (4) e la (5) sono rispettivamente le equazioni di Orr – Sommerfeld e Squire, note dall'analisi lineare classica della stabilità per perturbazioni tridimensionali, scritte utilizzando variabili differenti.

Prima di risolvere numericamente il sistema, tutte le variabili sono decomposte nel piano $x - z$ mediante una trasformazione bidimensionale di Laplace - Fourier. La generica grandezza relativa alla perturbazione diventa nel piano delle fasi (α, γ) :

$$\hat{g}(y, t, \alpha, \gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g(x, y, z, t) e^{-i\alpha x - i\gamma z} dx dz$$

Il parametro α è in generale un numero complesso $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ la cui parte reale rappresenta il numero d'onda delle perturbazioni in direzione x_s e la parte complessa rappresenta il fattore di smorzamento spaziale, mentre γ è un numero reale e, analogamente, è il numero d'onda nella direzione del cross-flow z_s .

Sostituendo le grandezze trasformate nel sistema si ha che le equazioni alle derivate parziali, che governano il flusso studiato, diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \bar{k} \right] \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = (-i(k \cos \phi + i\alpha_i)U_s + i k \sin \phi W_s) \left[\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} - \bar{k} \hat{v} \right] + i(k \cos \phi + i\alpha_i) \frac{d^2 U_s}{dy^2} \hat{v} \\ \quad + i k \sin \phi \frac{d^2 W_s}{dy^2} \hat{v} + \frac{1}{Re_{\delta^*}} \left[\frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial y^4} - 2\bar{k} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \bar{k}^2 \hat{v} \right] \quad (7) \\ \frac{\partial \hat{\omega}_y}{\partial t} = (-i(k \cos \phi + i\alpha_i)U_s - i k \sin \phi W_s) \hat{\omega}_y - i k \sin \phi \frac{dU_s}{dy} \hat{v} \\ \quad + i(k \cos \phi + i\alpha_i) \frac{dW_s}{dy} \hat{v} + \frac{1}{Re_{\delta^*}} \left[\frac{\partial^2 \hat{\omega}_y}{\partial y^2} - \bar{k} \hat{\omega}_y \right] \quad (8) \\ \left[\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} - \bar{k} \hat{v} \right] = \hat{\Gamma} \quad (9) \end{array} \right.$$

Dove $k = \sqrt{\alpha_r^2 + \gamma^2}$ è il numero d'onda polare, $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\gamma}{\alpha_r} \right)$ è l'angolo di obliquità della perturbazione, e $\bar{k} = k^2 - \alpha_i^2 + 2i\alpha_i k \cos \phi$.

Il sistema deve essere risolto introducendo delle adeguate condizioni al contorno e iniziali. La prima equazione in \hat{v} è del 4° ordine, occorre dunque specificare 4 condizioni agli estremi del dominio di definizione:

$$y = 0 \rightarrow \begin{cases} \hat{v} = 0 \\ \frac{d\hat{v}}{dy} = 0 \end{cases}$$

$$y = \infty \rightarrow \begin{cases} \hat{v} = 0 \\ \frac{d\hat{v}}{dy} = 0 \end{cases}$$

ovvero la velocità di perturbazione deve rispettare la condizione di aderenza (*no slip*) e deve annullarsi nel flusso esterno; gli stessi vincoli sono imposti alla sua derivata prima rispetto alla variabile y .

Per la componente di vorticità $\hat{\omega}_y$ è sufficiente specificare due vincoli:

$$y = 0 \rightarrow \hat{\omega}_y = 0 \quad y = \infty \rightarrow \hat{\omega}_y = 0$$

Le condizioni iniziali sulle due variabili sono invece del tipo:

$$\hat{v}(y, t = 0) = \frac{y}{y_0} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{\sigma}}$$

$$\widehat{\omega}_y(y, t = 0) = 0$$

La velocità iniziale raggiunge un massimo all'interno dello strato limite e si annulla, con derivata nulla, nel flusso esterno. Il parametro y_0 determina la posizione del massimo del profilo, mentre σ determina la larghezza del profilo attorno ad esso.

Per la vorticità verticale, invece, è naturale impostare condizioni iniziali nulle

2.3 Descrizione dei parametri

Il sistema di equazioni perturbative trasformato nel piano (α, γ) contiene numerosi parametri che devono essere definiti a priori e in alcuni casi anche calcolati per poter risolvere numericamente il sistema.

Uno dei parametri più importanti è il numero d'onda polare della perturbazione tramite il quale si determina la lunghezza d'onda λ della stessa:

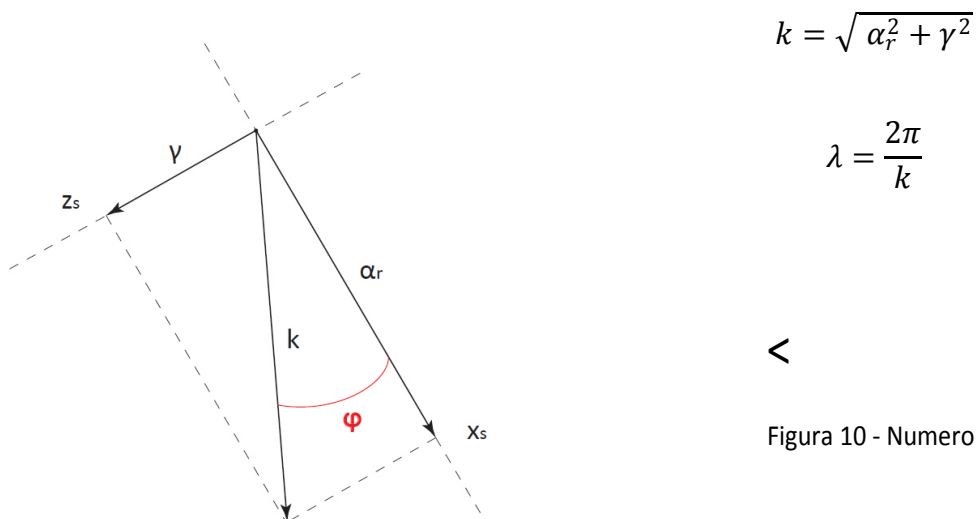


Figura 10 - Numero d'onda polare

Come suggerisce intuitivamente la figura, il numero d'onda polare è legato a quelli longitudinale e trasversale attraverso l'angolo di obliquità ϕ della perturbazione rispetto al piano fisico (x_s, z_s) . Questo secondo parametro rappresenta l'incidenza con la quale l'onda perturbativa entra nello strato limite:

- $\phi = 0$, onda longitudinale
- $\phi = \frac{\pi}{4}$, onda obliqua
- $\phi = \frac{\pi}{2}$, onda trasversale

Come si osserva facilmente nella rappresentazione di figura 10, geometricamente risultano verificate le relazioni:

$$\alpha_r = k \cos \phi$$

$$\gamma = k \sin \phi$$

dalle quali si possono ricavare i numeri d'onda nelle due direzioni spaziali.

Un altro parametro geometrico che determina la soluzione delle equazioni di Navier – Stokes è l'angolo di crossflow θ . Con esso si misura quanto sono inclinate le linee di corrente dello strato limite a causa della componente trasversale di velocità W_∞ : è infatti l'angolo formato tra la velocità $U(x^*)$, parallela all'asse x , e la velocità $U_s(x^*)$, diretta invece come la tangente alle linee di corrente.

Il suo valore, come già accennato non è costante lungo la corda del profilo, ma cambia in ragione della variazione della velocità longitudinale e della contemporanea invarianza della componente di velocità diretta lungo l'apertura alare. Ad un punto fissato della corda, è stato scelto al 20 % della sua lunghezza l , si possono determinare dei valori notevoli del parametro per il calcolo delle soluzioni.

Ovviamente sono rispettate le relazioni geometriche:

$$U(x^*) = U_s(x^*) \cos \theta$$

$$W_\infty = U_s(x^*) \sin \theta$$

>

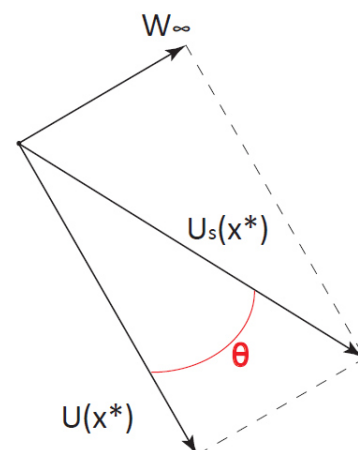


Figura 11 – Angolo di crossflow

Infine il parametro fondamentale da cui dipende il sistema di equazioni è naturalmente il numero di Reynolds. In esso dunque sono raccolte tutte le informazioni relative alla tipologia del campo di moto preso in esame.

Nello studio della stabilità dello strato limite le condizioni limite oltre le quali si inizia a verificare l'amplificazione dei disturbi e si instaura la turbolenza (che grazie al processo di entrainment incrementa gli effetti dei fenomeni di trasporto molecolare assicurando la stabilità del flusso) sono espresse proprio tramite il numero di Reynolds critico.

2.4 Scelta e calcolo dei parametri

Nelle simulazioni numeriche delle equazioni perturbative effettuate sono stati fissati, o opportunamente calcolati, tutti i parametri fisici e geometrici dai quali dipende ogni configurazione di flusso perturbato, e dunque ogni soluzione numerica.

Sono stati innanzitutto scelti due valori per il numero di Reynolds, ai quali ci si aspetta di incontrare una discreta varietà di transitori per le diverse configurazioni di onde perturbative introdotte. Riferendosi alla letteratura classica sulla stabilità idrodinamica, in particolare ai lavori storici di Schlichting e Tollmien sono stati presi in considerazione i valori indicativi di:

$$Re_{\delta} = \frac{U_{\infty} \delta}{\nu} = 300$$

$$Re_{\delta} = \frac{U_{\infty} \delta}{\nu} = 3000$$

Calcolati rispetto allo spessore di strato limite δ . Secondo un'analisi preliminare alle simulazioni numeriche si dovrebbero riscontrare delle configurazioni di stabilità per il Reynolds più basso e di instabilità per quello più elevato.

I parametri geometrici del flusso sono stati scelti arbitrariamente. Per l'angolo di obliquità della perturbazione ϕ sono stati presi in considerazione tre valori in modo da rappresentare il transitorio di tre diverse tipologie di onde: quelle longitudinali, allineate all'asse x_s , quelle trasversali allineate alla direzione z_s , e onde oblique con una componente del numero d'onda (α_r e γ) diversa da zero in entrambe le direzioni.

Sono stati scelti dunque per il parametro ϕ i valori π , $\pi/4$ e $\pi/2$, rispettivamente per onde longitudinali, oblique e trasversali, come spiegato nel paragrafo precedente.

Per l'angolo di crossflow θ sono stati invece considerati due valori: $\pi/8$ e $\pi/4$.

Anche il fattore di smorzamento spaziale delle perturbazioni longitudinali, costituito dalla parte immaginaria α_i del parametro α di trasformazione nella direzione x , deve essere fissato arbitrariamente. In realtà per questioni energetiche esso può assumere solo valori positivi. Per valori minori di zero infatti l'energia della perturbazione diverge ad infinito, comportando dunque una condizione non fisicamente accettabile. Si è dunque posto, per tutte le configurazioni:

$$\alpha_i = 0.02$$

La determinazione del numero d'onda polare delle perturbazioni merita un trattamento più approfondito. È stato scelto di esaminare il transitorio di quattro perturbazioni di lunghezza d'onda di diverso ordine di grandezza. Sono stati presi come riferimenti dimensionali la corda l e lo spessore di strato limite δ . Per non appesantire troppo la simulazione delle equazioni, l'onda perturbativa di lunghezza maggiore è stata considerata del doppio della corda, ovvero $2l$. Di conseguenza, per rispettare la scelta iniziale, sono state studiate perturbazioni dell'ordine di grandezza di $0.2l$, di $0.02l$ e dell'ordine dello spessore di strato limite nel punto x^* scelto per l'analisi del problema.

Il numero d'onda polare k dipende dal numero di Reynolds, perché da questo a loro volta dipendono gli spessori di strato limite e di spostamento.

Innanzitutto occorre notare che i numeri di Reynolds considerati sono riferiti allo spessore δ , riferendo i valori fissati in precedenza allo spessore δ^* , rispetto al quale è adimensionalizzato il sistema perturbativo, si ha che:

$$Re_{\delta^*} = 0.344 Re_{\delta}$$

$$Re_{\delta} = 2.901 Re_{\delta^*}$$

Si ottengono perciò i valori del numero di Reynolds:

$$Re_{\delta^*} = 103.4$$

$$Re_{\delta^*} = 1034$$

Ai quali corrispondono rispettivamente i Reynolds globali riferiti alla lunghezza della corda:

$$Re_l = 3600$$

$$Re_l = 360000$$

Per determinare i valori numerici di k si deve ricorrere alle relazioni:

$$\frac{\delta}{x} = 4.99 \frac{1}{\sqrt{Re_x}} = 0.0836l \quad \frac{\delta}{x} = 4.99 \frac{1}{\sqrt{Re_x}} = 0.00832l$$

$$\frac{\delta^*}{x} = 1.72 \frac{1}{\sqrt{Re_x}} = 0.0286l \quad \frac{\delta^*}{x} = 1.72 \frac{1}{\sqrt{Re_x}} = 0.00286l$$

In cui si è considerato $x = x^* = 0.2l$, come sempre specificato, ed $l = 1 m$. I valori sulla sinistra corrispondono al Reynolds più basso, quelli sulla destra, di conseguenza all'altro valore. Adimensionalizzando la lunghezza λ delle perturbazioni rispetto a δ^* si ottengono 4 numeri d'onda diversi per ognuno dei due numeri di Reynolds considerati.

I valori di tutti i parametri utilizzati per le simulazioni numeriche sono riportati nella seguente tabella.

	Re = 103.4	Re = 1034
Φ	0 - $\pi/4$ - $\pi/2$	0 - $\pi/4$ - $\pi/2$
θ	$\pi/8$ - $\pi/4$	$\pi/8$ - $\pi/4$
k	0.018 - 0.18 - 1.8 - 2.17	0.0018 - 0.018 - 0.18 - 2.17

<

Figura 12 - Tabella riassuntiva dei parametri fisici utilizzati

Si nota in particolare che il valore più grande, quindi quello relativo al disturbo di lunghezza d'onda dell'ordine dello spessore δ , è uguale per entrambi i valori del numero di Reynolds. Si mantiene infatti costante il rapporto:

$$\frac{\delta}{\delta^*} = 2.901$$

Inoltre, i numeri d'onda delle due perturbazioni di lunghezza più corta sono, per il Reynolds più basso, molto simili. Ciò significa che lo spessore di strato limite, come verificato dal calcolo è dell'ordine di grandezza del centesimo della corda. Data la vicinanza dei due parametri, il comportamento che si otterrà dalle simulazioni sarà probabilmente molto simile.

2.5 Fattore di amplificazione e fattore di crescita

Uno degli aspetti caratterizzanti il problema ai valori iniziali impostato è quello di poter valutare tutto il transitorio delle varie perturbazioni prima che queste si assestino secondo il proprio comportamento asintotico.

Al fine di interpretare l'evoluzione temporale di ciascuna, l'eventuale amplificazione o smorzamento e la conseguente stabilità dello stato limite, è indispensabile introdurre una grandezza che sia il metro di valutazione del comportamento dei disturbi. Tale grandezza è la densità di energia cinetica della perturbazione, definita analiticamente come:

$$\begin{aligned} e(t; \alpha, \gamma, Re) &= \frac{1}{2} \frac{1}{2y_d} \int_{-y_d}^{+y_d} (|\hat{u}^2| + |\hat{v}^2| + |\hat{w}^2|) dy \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2y_d} \frac{1}{|\alpha^2 + \gamma^2|} \int_{-y_d}^{+y_d} \left(\left| \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right|^2 + |\alpha^2 + \gamma^2| |\hat{v}^2| + |\hat{\omega}_y|^2 \right) dy \end{aligned}$$

in cui y_d rappresenta l'estensione del dominio spaziale nella direzione perpendicolare alla superficie alare. La scelta del suo valore non è univoca ma è condizionata dalla necessità di rispettare le condizioni al contorno imposte sulla velocità \hat{v} , alla quale si impone di annullarsi assieme alla sua derivata agli estremi dell'intervallo, ovvero a parete e nel flusso esterno. L'ampiezza del dominio spaziale dunque dovrà essere adeguata per ciascuna onda perturbativa studiata. Risulterà più grande per onde lunghe e meno grande per onde corte, ma indicativamente compresa, come ordine di grandezza, tra 10^1 e 10^2 .

Normalizzando la densità di energia cinetica rispetto al suo valore iniziale si ottiene il fattore di amplificazione $G(t)$:

$$G(t; \alpha, \gamma) = \frac{e(t; \alpha, \gamma)}{e(t=0; \alpha, \gamma)}$$

Con questa grandezza si può effettivamente stimare l'entità della crescita o decrescita delle perturbazioni nel tempo e, soprattutto, confrontare i transitori ottenuti al variare dei parametri utilizzati.

Infine con il fattore di crescita temporale r , definito come:

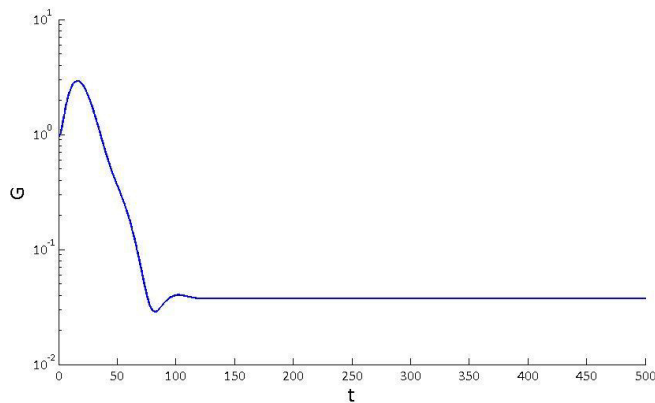
$$r(t; \alpha, \gamma) = \frac{\ln e(t; \alpha, \gamma)}{2t}, \quad t > 0$$

si possono valutare sia il transitorio iniziale quanto il comportamento asintotico della perturbazione che è approssimabile con un andamento asintotico esponenziale. La ragione di tale definizione deve essere fatta risalire a quella della precedente grandezza, il fattore di amplificazione $G(t)$. Questo, parametrizzando un'energia, è dimensionalmente congruente con una velocità al quadrato, perciò:

$$G(t) \sim u^2, \quad u \sim e^{rt} \rightarrow G(t) \sim e^{2rt} \rightarrow r \sim \frac{\ln G}{2t}, \quad t > 0$$

Il fattore di crescita r discrimina dunque il comportamento crescente o decrescente della perturbazione, rispettivamente per valori positivi e negativi.

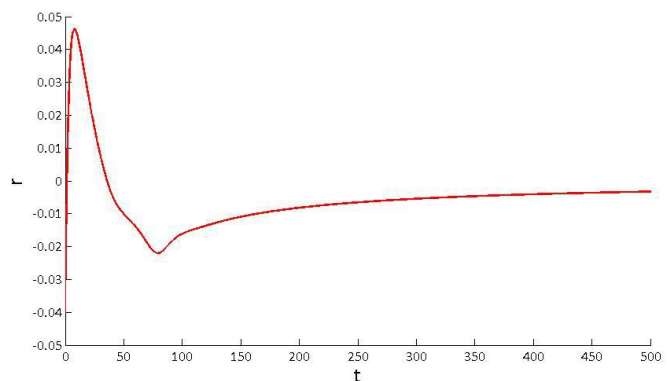
Nella figura seguente si può osservare il confronto fra le due grandezze appena definite per una perturbazione smorzata stabile.



<

Figura 13 – Esempio di andamento temporale del fattore di amplificazione $G(t)$

Figura 14 – Esempio di andamento del fattore di crescita $r(t)$



>

3. Risultati delle simulazioni

3.1 Procedimento

Il sistema di equazioni trasformato, con le relative condizioni al contorno ed iniziali

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \bar{k} \right] \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = (-i(k \cos \phi + i\alpha_i)U_s + iksin\phi W_s) \left[\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} - \bar{k} \hat{v} \right] + i(k \cos \phi + i\alpha_i) \frac{d^2 U_s}{dy^2} \hat{v} \\ \quad + iksin\phi \frac{d^2 W_s}{dy^2} \hat{v} + \frac{1}{Re_{\delta^*}} \left[\frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial y^4} - 2\bar{k} \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} + \bar{k}^2 \hat{v} \right] \\ \frac{\partial \hat{\omega}_y}{\partial t} = (-i(k \cos \phi + i\alpha_i)U_s - iksin\phi W_s) \hat{\omega}_y - iksin\phi \frac{dU_s}{dy} \hat{v} \\ \quad + i(k \cos \phi + i\alpha_i) \frac{dW_s}{dy} \hat{v} + \frac{1}{Re_{\delta^*}} \left[\frac{\partial^2 \hat{\omega}_y}{\partial y^2} - \bar{k} \hat{\omega}_y \right] \end{array} \right.$$

$$B.C. \quad y = 0 \rightarrow \begin{cases} \hat{v} = 0 \\ \frac{d\hat{v}}{dy} = 0 \end{cases}, \quad y = \infty \rightarrow \begin{cases} \hat{v} = 0 \\ \frac{d\hat{v}}{dy} = 0 \end{cases}; \quad y = 0 \rightarrow \hat{\omega}_y = 0, \quad y = \infty \rightarrow \hat{\omega}_y = 0$$

$$I.C. \quad \hat{v}(y, t = 0) = \frac{y}{y_0} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{\sigma}}; \quad \hat{\omega}_y(y, t = 0) = 0$$

dove $\bar{k} = k^2 - \alpha_i^2 + 2i\alpha_i k \cos \phi = \bar{k} - \alpha_i^2 + 2i\alpha_i \alpha_r$, viene risolto numericamente con l'utilizzo del metodo delle linee. Tutti i parametri presenti, in particolare quelli fisici distintivi delle onde, sono inseriti opportunamente. Anche la soluzione numerica delle equazioni dello strato limite costituisce un dato del problema. Ogni perturbazione è studiata singolarmente.

La finestra temporale di osservazione è stata scelta sulla base di 250 tempi-scala che si sono rivelati sufficienti per catturare tutto il transitorio della maggior parte delle onde perturbative. In alcuni casi, specialmente per i numeri d'onda più grandi, è stato possibile estendere la simulazione fino a 500 tempi-scala, senza riscontrare, fortunatamente, differenze sostanziali nei comportamenti.

Il solutore determina inizialmente i valori della componente \hat{v} della velocità e della componente $\hat{\omega}_y$ della vorticità del campo di moto perturbativo.

Con la valutazione sistematica del grafico di \hat{v} in funzione della coordinata adimensionale y/δ^* si controlla se la soluzione intermedia rispetta le condizioni al contorno imposte.

In caso negativo, per soddisfare i vincoli è possibile estendere il dominio spaziale. Infiltrando la griglia di calcolo, invece, si ottiene una maggiore accuratezza dei risultati. In entrambi i casi si aumenta la quantità di dati raccolti ma, per contro, la simulazione richiede molto più tempo per essere conclusa.

Le altre componenti della velocità, \hat{u} e \hat{w} , vengono determinate successivamente tramite le relazioni ricavate dalla equazione di continuità e dalla definizione della vorticità in direzione y :

$$\begin{cases} \hat{u} = \frac{(-i(\alpha_r + i\alpha_i)\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \gamma\hat{\omega}_y)}{i(k^2 - \alpha_i^2 + 2i\alpha_i\alpha_r)} \\ \hat{w} = \frac{(-\gamma\frac{\partial \hat{v}}{\partial y} - i(\alpha_r + i\alpha_i)\hat{\omega}_y)}{i(k^2 - \alpha_i^2 + 2i\alpha_i\alpha_r)} \end{cases}$$

Una volta completato il calcolo del campo di moto delle perturbazioni viene valutato e plottato l'andamento temporale del fattore di amplificazione $G(t)$ e del fattore di crescita $r(t)$.

In particolare il grafico della prima grandezza, è significativo per l'interpretazione del transitorio dell'onda studiata. Il fattore $G(t)$ è definito come la densità di energia legata alle velocità dei disturbi tridimensionali, normalizzata rispetto all'energia iniziale del flusso perturbato; il suo comportamento in funzione del tempo distingue tra le onde stabili, la cui energia decresce, e quelle instabili, che, all'opposto, hanno energia crescente. Matematicamente ciò corrisponde nei due casi, rispettivamente, a valori minori e maggiori di 1.

Il grafico del fattore $r(t)$ quantifica invece l'entità della crescita o decrescita della densità di energia precedentemente definita. Risulta perciò di fondamentale interesse per il confronto quantitativo dei transienti qualitativamente simili. Generalmente non interessa esaminare l'intero comportamento del parametro, ma solo il valore asintotico, che costituisce, dalla definizione stessa della grandezza, l'esponente dell'andamento cui tendono i disturbi studiati per tempi-scala sufficientemente grandi. In questo senso si fare una precisazione. I valori riportati devono essere giustamente interpretati alla luce dell'approssimazione del valore asintotico con l'ultimo valore calcolato, anche per le simulazioni in cui, probabilmente, la condizione asintotica non si era ancora raggiunta.

Un'ultima menzione deve essere fatta riguardo i criteri adottati per il plottaggio dei grafici ottenuti. Per agevolare la visualizzazione, i transitori sono stati raggruppati al variare del numero d'onda delle perturbazioni studiate e sono stati differenziati cromaticamente, come riportato dalla legenda. Il valore di ogni fattore $r(t)$ è riportato per ogni curva dei grafici.

3.2 Commento dei risultati

Lo studio condotto offre una panorama vario e completo di transitori. Per facilitare la visione d'insieme del lavoro svolto e catturare la varietà di comportamenti osservabili i grafici dell'andamento del fattore di amplificazione di tutte le perturbazioni sono stati raggruppati nelle due pagine seguenti. Ogni figura è accompagnata da una breve didascalia che mette in evidenza i parametri che la caratterizzano.

La sinottica permette così una valutazione preliminare dell'influenza esercitata da alcuni parametri sulla stabilità dello strato limite.

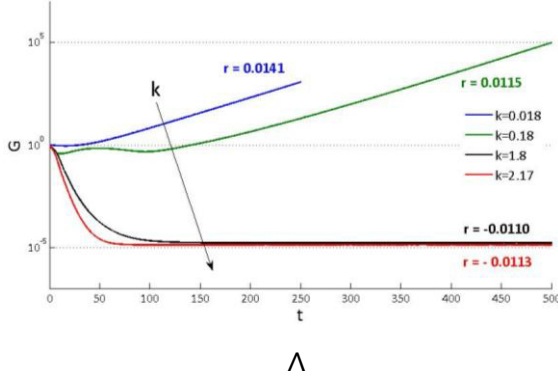
Il risultato che attira immediatamente l'attenzione, visto lo scopo dello studio, è l'esistenza di onde stabili solo per il valore più basso del numero di Reynolds. In quest'ottica si può ulteriormente osservare che nessun disturbo, tra quelli corrispondenti alle due lunghezze d'onda maggiori, è asintoticamente smorzato: tutti raggiungono un andamento esponenziale crescente. Questo risultato è in buon accordo con quanto previsto per via sperimentale: le onde più lunghe sono solitamente le più instabili.

Un esame più attento evidenzia, infine, che solo per le perturbazioni trasversali è stato ottenuto un comportamento monotono crescente, mentre quasi tutti i transitori mostrano all'interno dei primi 100 – 150 tempi-scala una successione di crescite e decrescite. Non è stato riscontrato alcun caso di transitorio monotono decrescente.

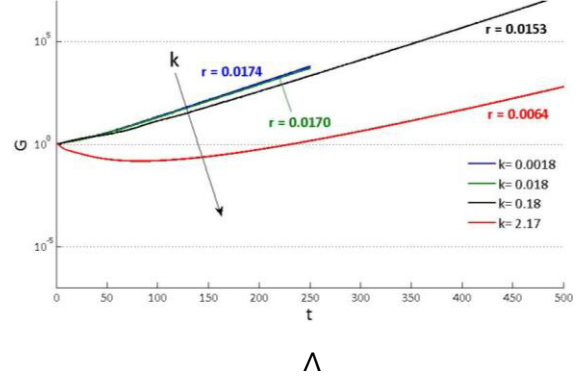
Per un'analisi migliore, volta ad evidenziare ogni caratteristica del comportamento di tutti i disturbi simulati, è necessario fissare il valore di alcuni parametri eccetto uno e discutere tutte le differenze che si riscontrano al variare di quest'ultimo.

Una scelta possibile è quella di fissare il numero di Reynolds e l'angolo di *crossflow* e far variare l'angolo di obliquità delle perturbazioni. In questo modo si delinea un quadro descrittivo completo che si presta facilmente ad un successivo confronto.

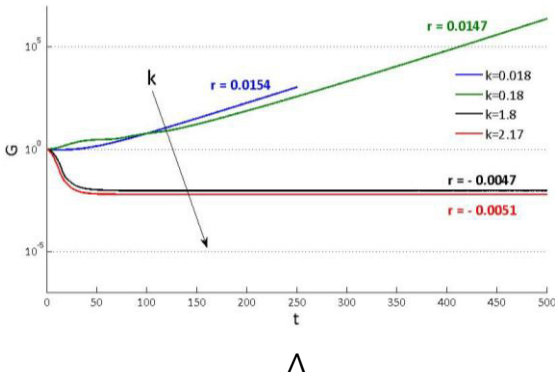
$$\theta = \frac{\pi}{4}$$



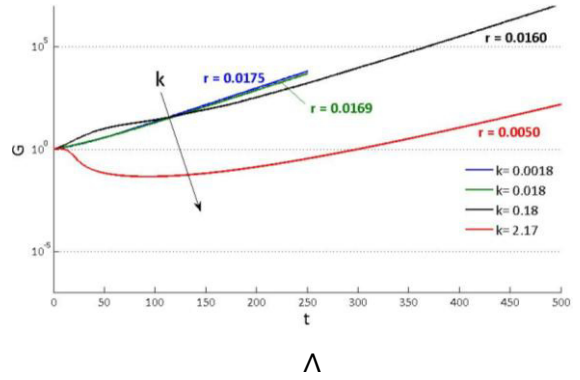
$Re_{\delta^*} 103.4 \quad \phi = 0$



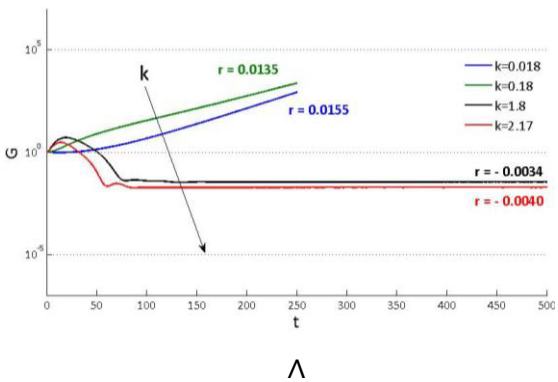
$Re_{\delta^*} 1034 \quad \phi = 0$



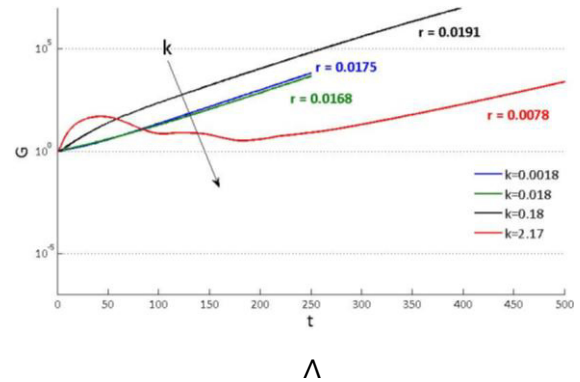
$Re_{\delta^*} 103.4 \quad \phi = \frac{\pi}{4}$



$Re_{\delta^*} 1034 \quad \phi = \frac{\pi}{4}$

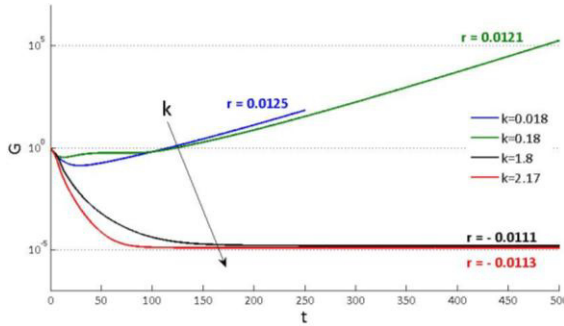


$Re_{\delta^*} 103.4 \quad \phi = \frac{\pi}{2}$



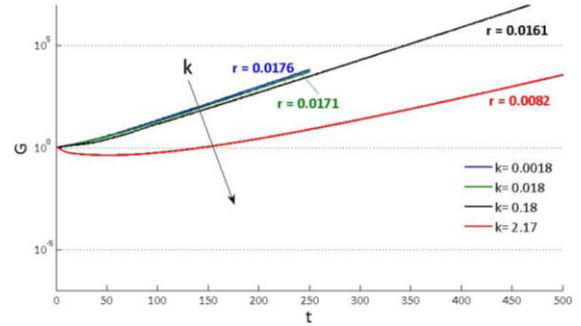
$Re_{\delta^*} 1034 \quad \phi = \frac{\pi}{2}$

$$\theta = \frac{\pi}{8}$$



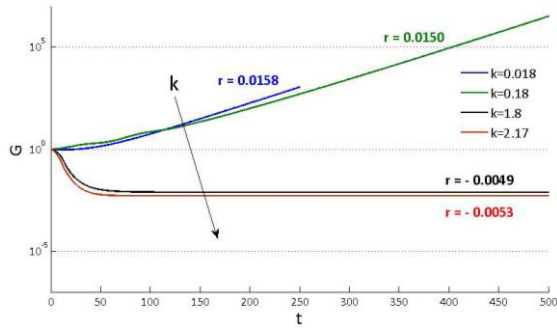
Λ

$Re_{\delta^*} 103.4 \quad \phi = 0$



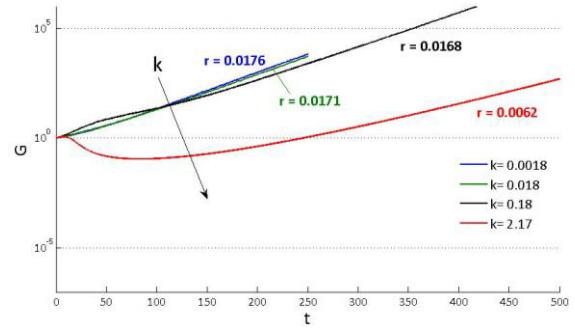
Λ

$Re_{\delta^*} 1034 \quad \phi = 0$



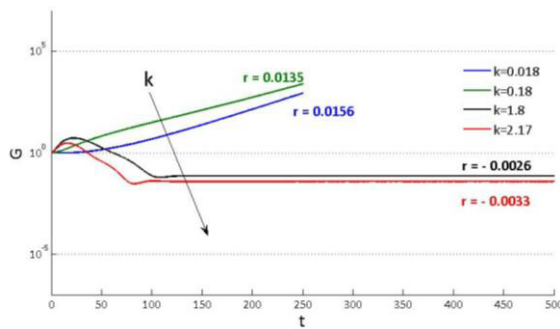
Λ

$Re_{\delta^*} 103.4 \quad \phi = \frac{\pi}{4}$



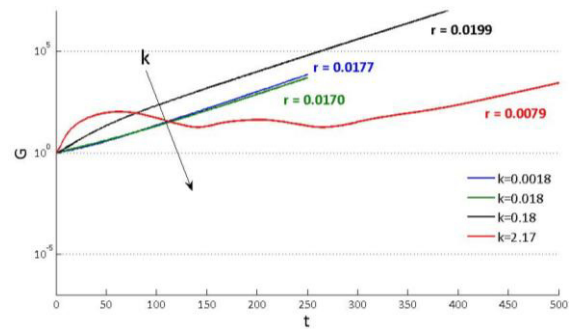
Λ

$Re_{\delta^*} 1034 \quad \phi = \frac{\pi}{4}$



Λ

$Re_{\delta^*} 103.4 \quad \phi = \frac{\pi}{2}$



Λ

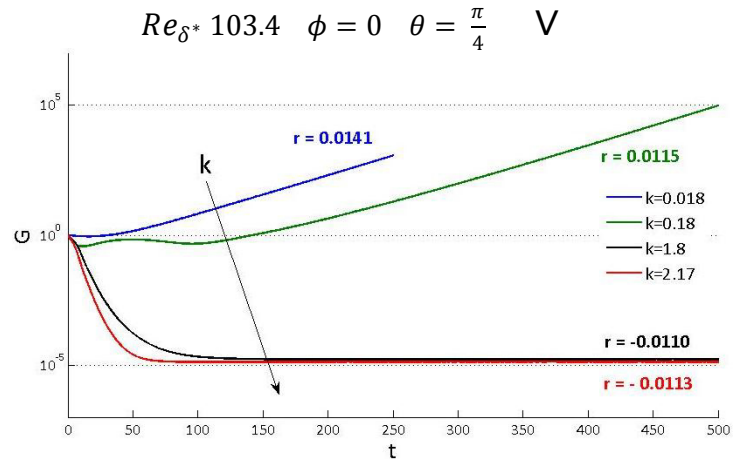
$Re_{\delta^*} 1034 \quad \phi = \frac{\pi}{2}$

Il primo set considerato corrisponde ai parametri: $Re_{\delta^*} 103.4$ e $\theta = \pi/4$.

Cominciando la descrizione dalle onde più lunghe, rappresentate in blu, si nota che queste abbiano tutte un comportamento molto simile qualitativamente. Attorno ai 50 tempiscala si verifica la decisiva amplificazione che

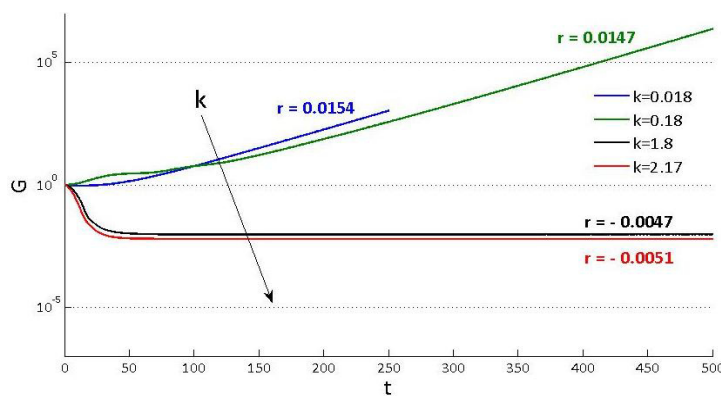
raggiunge presto l'evoluzione asintotica. L'obliquità influenza proporzionalmente il fattore di crescita, anche se negli ultimi due casi il valore calcolato è circa lo stesso.

Per il numero d'onda $k = 0.18$, relativo ai disturbi dell'ordine di $0.2l$, si evidenziano i risultati più interessanti. Nonostante da un punto vista qualitativo si osservi pressappoco lo stesso andamento per le tre curve, quantitativamente si evidenzia una



crescita maggiore all'aumentare del parametro

$V \quad Re_{\delta^*} 103.4 \quad \phi = \frac{\pi}{4} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

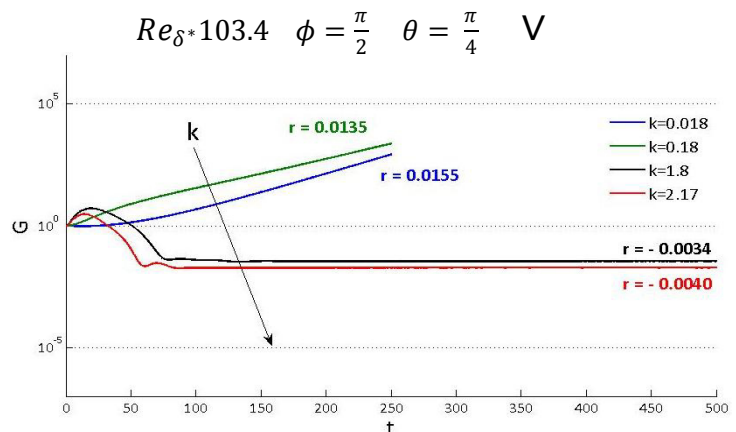


ϕ . La fase transitoria mostra un profilo piuttosto vario. Prima della decisiva crescita asintotica, si alternano fasi di crescita e decrescita, tuttavia lo smorzamento si verifica solo per onde longitudinali, in quanto le curve relative alle altre non attraversano mai

l'asse orizzontale. È interessante riscontrare come nei casi di onde oblique e trasversali l'amplificazione iniziale sia maggiore delle corrispondenti di lunghezza maggiore.

Infine i disturbi più corti sono tutti progressivamente smorzati. Le prime due figure mostrano un andamento molto simile, in cui il decadimento decisivo avviene prima dei 100 tempiscala, ma con un'entità molto maggiore nel caso longitudinale.

Le onde trasversali mostrano il comportamento più particolare. Dopo una iniziale forte amplificazione, che dura circa 15 tempiscala, si osserva uno smorzamento rapido che si assesta al valore asintotico. Il transitorio ha una durata



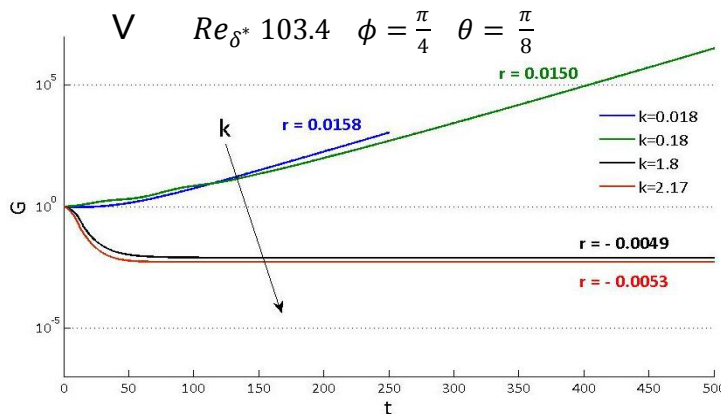
simile, vista anche la vicinanza dei due numeri d'onda.

Si analizzano ora i *runs* che corrispondono ai parametri $Re_{\delta^*} = 103.4$ e $\theta = \pi/8$.

Iniziando nuovamente la descrizione dalle onde perturbative più lunghe, si può immediatamente notare che esse ricalcano l'andamento evidenziato in precedenza, caratterizzato da

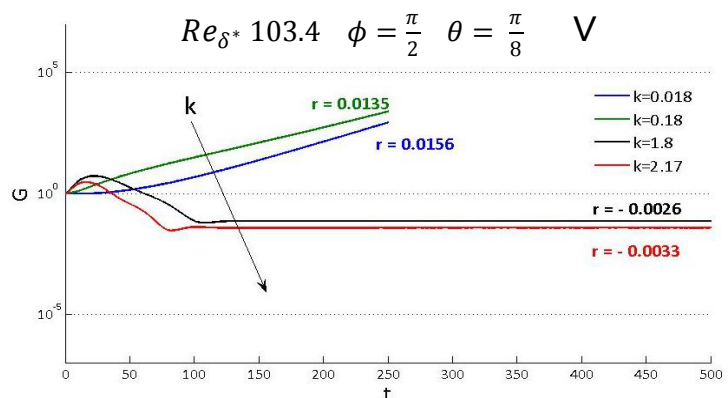
un andamento asintotico crescente. Solo nel caso di $\phi = 0$ si può osservare un iniziale smorzamento che raggiunge il minimo attorno ai 25 tempi-scala.

Esaminando i disturbi di lunghezza d'onda subito più piccola, si conferma l'uniformità di comportamento con la serie precedente. Il profilo riscontrato è sempre costituito da un alternarsi di fasi di crescita e decrescita, che nel caso longitudinale comporta uno



smorzamento che dura fino ai 100 tempiscala. Per tutti e tre i casi si verifica che l'amplificazione iniziale del disturbo è maggiore del corrispondente di onda più lunga, mentre il fattore di crescita, asintoticamente, tende ad un valore minore.

Lo smorzamento totale si verifica per le perturbazioni con numero d'onda più piccolo: $k = 1.8$ e $k = 2.17$. Il caso longitudinale e obliquo si differenziano rispetto alla velocità con la quale avviene la "reiezione" del disturbo che risulta praticamente dimezzata, passando da 100 a 50 tempiscala rispettivamente. Una particolarità riscontrata per questo gruppo di simulazioni, è rappresentata dalla sensibile differenza tra i fattori di amplificazione. Le configurazioni di perturbazione dirette longitudinalmente allo strato limite, in generale per ogni configurazione analizzata, è meno amplificato degli altri. La differenza è particolarmente sensibile se si considera il fattore con cui vengono smorzati i disturbi per tutti e tre i valori di ϕ .



A $Re_{\delta^*} = 1034$ e $\theta = \pi/4$, si osserva, come anticipato, la non esistenza di configurazioni stabili.

Le perturbazioni di lunghezza d'onda dell'ordine di 2l e 0.2l non mostrano significative variazioni di comportamento nei tre casi rappresentati dalle figure: nei primo 50 tempi-scala della

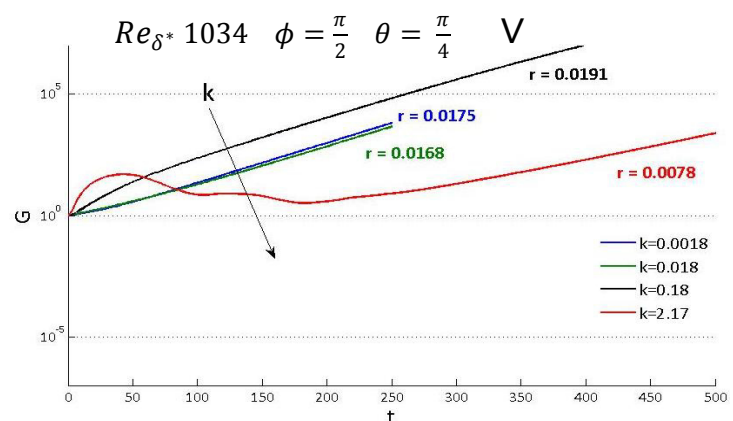
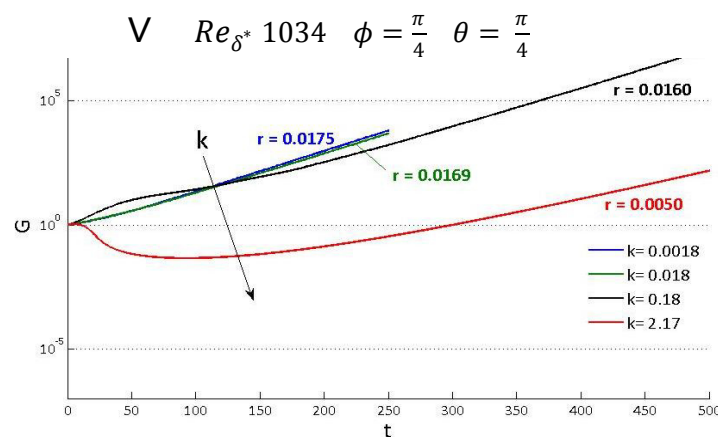
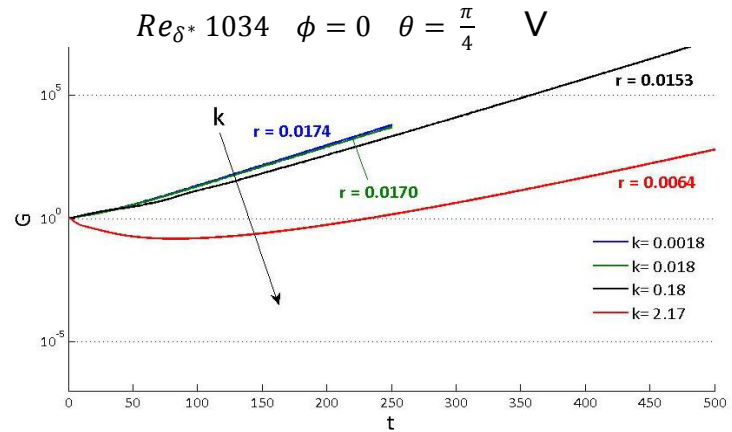
simulazione si può addirittura affermare che le 6 configurazioni non sono distinguibili. Anche il valore dei rispettivi fattori di crescita è molto simile: non si hanno variazioni superiori al 2%.

Il disturbo con numero d'onda $k = 0.18$, mostra le variazioni più significative. Longitudinalmente non è mai amplificato maggiormente dei due casi precedenti. Per

$\phi = \pi/4$ si evidenzia un periodo iniziale che termina a 100 tempi-scala in cui si verifica una forte crescita. Aumentando ulteriormente l'incidenza sullo strato limite la tendenza è confermata, e l'amplificazione risulta asintoticamente maggiore di tutti gli altri casi finora presi in esame: il fattore r si

attesta al valore di 0.0191, ben superiore rispetto alle altre configurazioni.

L'andamento della perturbazione più corta evidenzia delle sensibili differenze negli esempi riportati. L'onda longitudinale presenta un transitorio che può essere suddiviso a metà: nei primi 250 tempiscala si ha smorzamento, in seguito si verifica la decisiva amplificazione. Questo comportamento è rispettato anche da disturbo obliquo, con le piccole differenze di un breve periodo iniziale di amplificazione e di un più lungo intervallo di attenuazione. Per il caso trasversale, infine, si osserva una sorta di comportamento "oscillatorio" in cui però il fattore G non assume mai valori minori di 1.



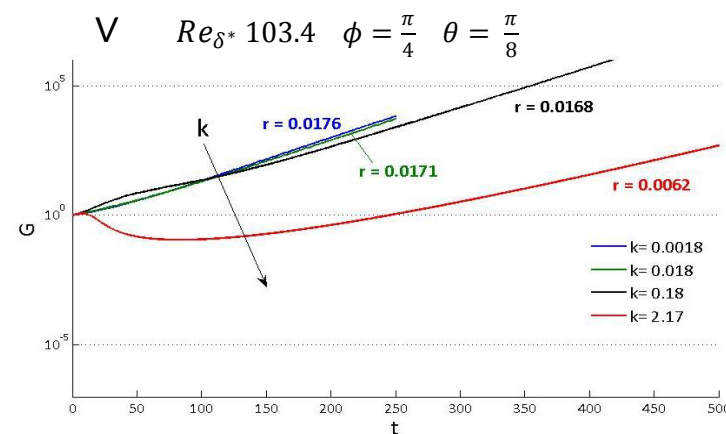
L'ultimo gruppo di simulazioni corrisponde a $Re_{\delta^*} = 1034$ e $\theta = \pi/8$.

Il quadro così composto riporta una situazione molto simile al caso precedente.

Le onde lunghe, $k = 0.0018$ e $k = 0.018$, non dimostrano significative variazioni né per quanto riguarda la forma delle

curve che rappresentano il transitorio né nei fattori di crescita che rimangono praticamente invariati nei tre casi.

La perturbazione di numero d'onda subito minore conferma la stessa evoluzione osservata in precedenza: longitudinalmente l'amplificazione è meno accentuata dei corrispondenti casi a lunghezza d'onda maggiore; i disturbi trasversali evidenziano nuovamente una crescita più importante sia nei primi 50 tempi-scala che



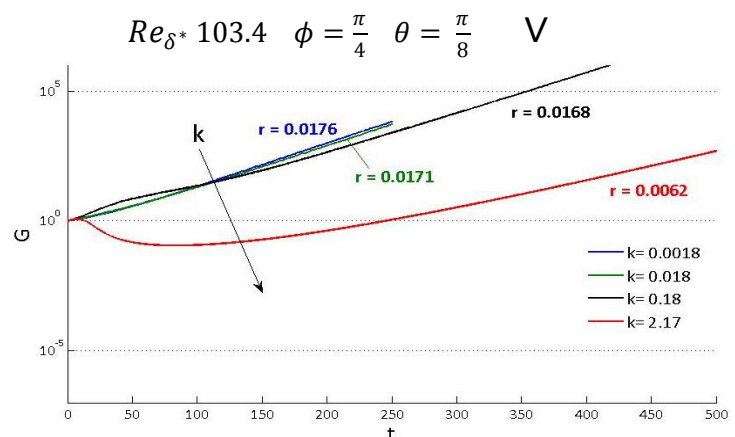
asintoticamente. In direzione obliqua si ha un comportamento intermedio tra i due appena descritti.

Anche per il numero d'onda dell'ordine di grandezza dello strato limite si riscontra la similitudine sottolineata per gli altri casi.

Quantitativamente si possono invece osservare

alcune differenze. Per $\phi = 0$ e $\phi = \pi/4$, la durata della finestra temporale in cui si verifica lo smorzamento del disturbo è minore del caso con $\theta = \pi/4$, precedentemente analizzato. Nel caso completamente trasversale, invece, si

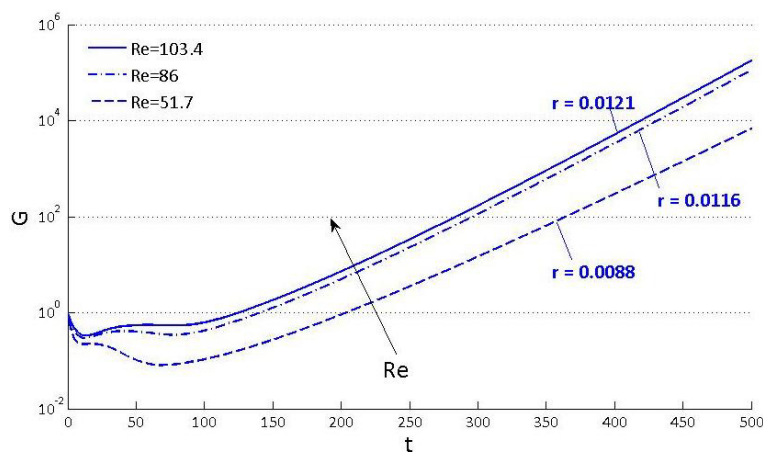
determina il comportamento opposto: il periodo "oscillatorio" dura fino ai 350–400 tempi-scala. Inoltre le oscillazioni, seppur di poco, sono più numerose.



3.3 Influenza del numero di Reynolds

La sinottica delle figure che riportano le simulazioni mostra chiaramente che l'aumento del numero di Reynolds comporta, per ogni configurazione, un naturale incremento dell'amplificazione e conseguentemente del fattore di crescita, che è la causa dell'instabilità asintotica di ciascuna.

Ciò è raffigurato semplicemente nell'immagine successiva, che confronta una serie di transitori ottenuti variando il numero di Reynolds a fissati valori degli altri parametri: ϕ e θ .



<

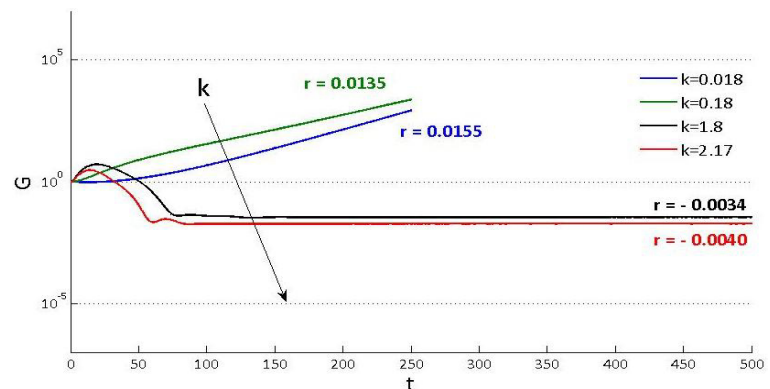
Figura 1 – Aumento del fattore di crescita al variare del Reynolds.
 $\phi = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

Accanto a questa tendenza generale, di facile riscontro, isolando alcuni casi possono essere messi in luce effetti del parametro particolari solo di determinate configurazioni.

Si considerano, a titolo di esempio significativo, le simulazioni corrispondenti ai parametri: $Re_{\delta^*} = 103.4$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $Re_{\delta^*} = 103.4$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$, ovvero quelle di onde che incidono sullo strato limite in direzione trasversale. Le figure dei transitori in questione sono di seguito riportate per comodità di verifica.

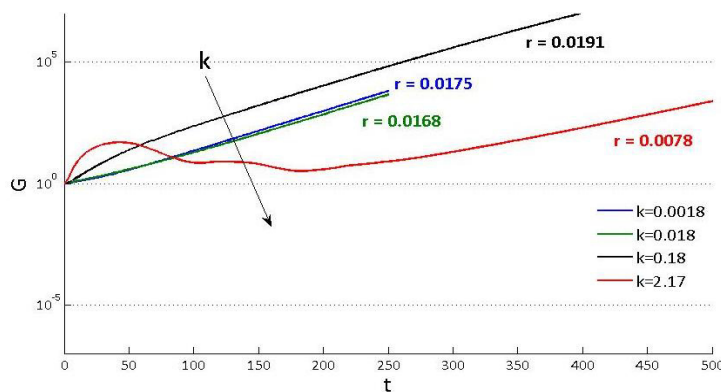
Figura 2 – Grafico dei transitori delle onde di perturbazione per parametri $Re_{\delta^*} = 103.4$
 $\phi = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

>



Innanzitutto si sottolinea che la tendenza generale è rispettata; particolarmente interessante è il comportamento del disturbo di numero d'onda $k = 0.18$ che per il Reynolds più basso rappresenta quello di lunghezza dell'ordine di $0.2l$, mentre al Reynolds più alto è quello di un ordine di grandezza inferiore.

Nonostante questa importante differenza i due transitori hanno un andamento simile durante i primi 100 tempi-scala, caratterizzato da una forte amplificazione. Confrontando il transitorio delle perturbazioni dello stesso ordine di grandezza, si ricava che l'aumento del Reynolds causa un notevole incremento dell'amplificazione che determina, nel secondo caso, l'instabilità del disturbo.

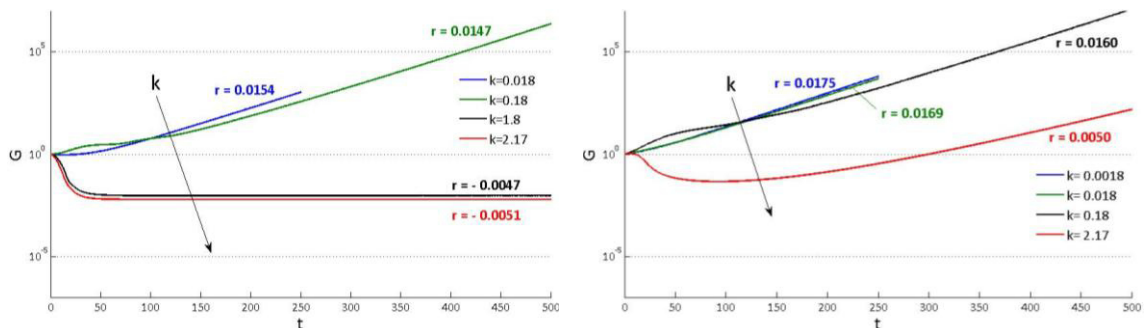


<

Figura 3 – Grafico dei transitori delle onde di perturbazione per parametri $Re_{\delta^*} = 1034$, $\phi = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

Anche l'onda di lunghezza ancora più corta, corrispondente a $k = 2.17$, conferma quanto appena osservato. A $Re_{\delta^*} = 1034$ si ha un andamento instabile, mentre a $Re_{\delta^*} = 103.4$ si verifica lo smorzamento. La forma della curva, caratterizzata dall'alternanza di fasi di crescita e decrescita di $G(t)$, rimane invariata, tuttavia si osserva una sensibile dilatazione temporale del fenomeno.

Risultati del tutto equivalenti si ottengono dall'analisi di onde oblique e longitudinali, come raffigurano le immagine relative al primo caso riportate in seguito.



^

Figura 4 – Confronto dei transitori di onde oblique al variare del Reynolds. $\phi = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

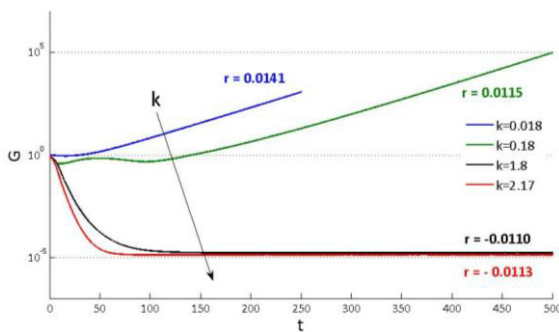
3.4 Influenza dell'angolo di *crossflow*

Sicuramente, l'analisi dettagliata dell'effetto dell'angolo di *crossflow* sulla stabilità dello strato limite fornisce indicazioni più dirette in ottica progettuale. Il parametro θ dipende infatti direttamente dall'intensità della velocità W_∞ e questa può essere almeno modulata con l'introduzione di specifici accorgimenti costruttivi.

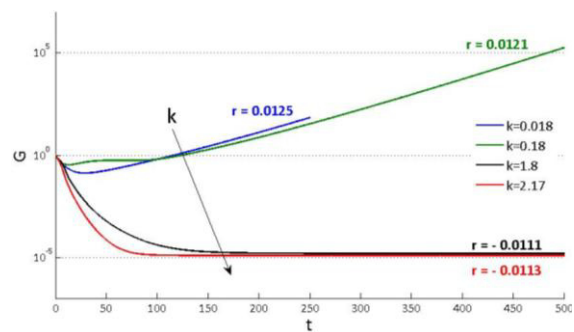
La visione d'insieme delle simulazioni permette di affermare che la variazione del parametro non comporta grosse modifiche del comportamento dinamico delle perturbazioni, ed inoltre non si riscontra alcuna tendenza generale. Ciò è comunque positivo dal punto di vista del progetto aerodinamico, grosse variazioni in funzione dell'angolo di *crossflow* infatti comporterebbero grossi problemi nel controllo del flusso, perché le criticità dovrebbe essere preventivamente evitate.

In questo senso si possono osservare gli effetti contrastanti del parametro per onde longitudinali a diversi valori del numero di Reynolds: a $Re_{\delta^*} = 103.4$ si osserva una migliore attenuazione dei disturbi, caratterizzata dalla decrescita dei fattori di amplificazione; mentre la stessa analisi condotta a $Re_{\delta^*} = 1034$ evidenzia il comportamento opposto.

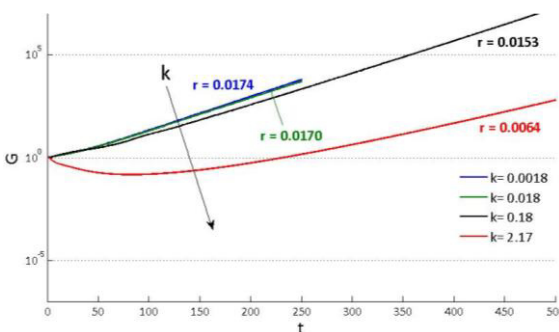
$$Re_{\delta^*} 103.4 \quad \phi = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$



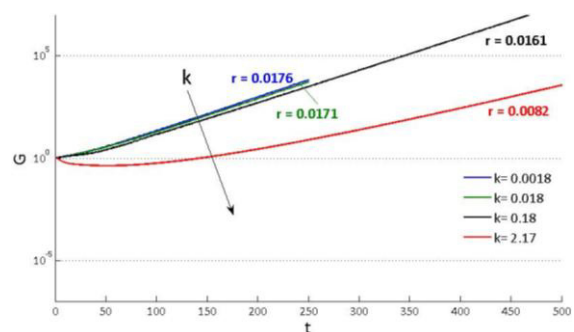
$$Re_{\delta^*} 103.4 \quad \phi = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{8}$$



$$Re_{\delta^*} 1034 \quad \phi = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$



$$Re_{\delta^*} 1034 \quad \phi = 0 \quad \theta = \frac{\pi}{8}$$



Conclusioni

Considerazioni e prospettive

Lo studio svolto nel lavoro di tesi si è posto come obiettivo quello di approfondire le conoscenze riguardo la stabilità dello strato limite sull'ala di allungamento finito.

In quest'ottica piccole perturbazioni tridimensionali sono state sovrapposte al flusso base. Il sistema di equazioni di governo risultante è stato preliminarmente riformulato nei termini della velocità – vorticità e rielaborato secondo una trasformazione di Laplace – Fourier di tutte le grandezze e successivamente risolto numericamente.

Questo approccio innovativo ha permesso di semplificare la soluzione delle equazioni, dal momento che il numero di variabili indipendenti è stato ridotto a due: il tempo e la coordinata y .

L'analisi è stata dunque impostata come un problema ai valori iniziali (IVP), la cui soluzione ha reso possibile la ricostruzione del comportamento dinamico completo di ogni disturbo, incluso il periodo di transitorio iniziale: l'orizzonte sulla fisica delle perturbazioni è perciò molto più ampio rispetto a quello offerto dall'approccio classico. Infatti la valutazione del comportamento delle onde nei primi istanti successivi alla loro sovrapposizione al moto medio (*receptivity*), preclusa dalla teoria lineare asintotica, mette in risalto l'influenza dei parametri fisici e geometrici del particolare disturbo nel determinare l'origine e la propagazione dell'instabilità in seno al flusso. Durante il transitorio, inoltre, è possibile rilevare comportamenti non – lineari, probabilmente dovuti ad effetti di risonanza tra le soluzioni, altrimenti non prevedibili.

I risultati delle simulazioni hanno evidenziato che solo a $Re_l = 3600$ ($Re_{\delta^*} = 103.4$) si verifica lo smorzamento di alcuni disturbi e dunque la stabilità del flusso; a $Re_l = 360000$ ($Re_{\delta^*} = 1034$) ogni configurazione analizzata è maggiormente amplificata e diventa presto instabile asintoticamente.

Le onde di lunghezze maggiore, scelte in relazione ad una corda l di un metro degli ordini di grandezza di $2l$ e $0.2l$, non vengono smorzate per nessuna combinazione degli altri parametri. Questo comportamento non deve destare sorpresa dal momento che le onde lunghe mostrano per via sperimentale una carattere fortemente instabile.

Più inatteso è stato l'andamento riscontrato per le perturbazioni di corta lunghezza d'onda. Anche al numero di Reynolds più basso si osserva un periodo iniziale di forte

crescita che si traduce, a $Re_l = 360000$ nell'instabilità asintotica del disturbo. Questo risultato rappresenta una novità che amplia il campo di instabilità per i numeri d'onda più grandi e che può essere indicativo di una possibile transizione anticipata del flusso di strato limite.

Per quanto riguarda l'angolo di obliquità ϕ delle perturbazioni si è dimostrata una notevole diversità dell'andamento temporale al crescere del parametro: le onde trasversali sono risultate quelle con il transitorio maggiormente influenzato dalle variazioni del parametro, indicando una maggiore instabilità rispetto alle analoghe longitudinali e oblique.

Gli effetti sui transitori dell'ultimo parametro, l'angolo di *crossflow* θ , sono invece molto minori. Fra tutte le simulazioni condotte non è stata rilevata alcuna tendenza generale dell'evoluzione dei disturbi al variare dei parametri, se non una parziale omogeneità nei fattori di amplificazione di diverse configurazioni.

Ciò deve essere interpretato positivamente in ottica progettuale, dal momento che dai calcoli può essere dedotto che la stabilità dello strato limite non è fortemente soggetta all'entità del *crossflow*.

Tutti i risultati ottenuti devono essere interpretati alla luce di quelli che potrebbero essere i futuri ulteriori miglioramenti dello studio condotto. Tra questi deve essere ricordato in primo luogo che può essere aumentato il numero di valori considerati per ogni parametro, in modo da avere una rappresentazione più completa delle variazioni nella stabilità e dunque una migliore conoscenza dell'influenza sulla stessa. In particolare si potrebbe approfondire lo studio degli effetti dell'angolo di *crossflow*, oppure considerare un numero di Reynolds globale ancora più elevato.

Infine, lo studio potrebbe essere reso più accurato con la semplice estensione della finestra temporale di osservazione che permetta, ad esempio, di verificare se e quando viene raggiunta effettivamente la condizione asintotica nei transitori delle perturbazioni.

Sicuramente comunque, per l'importanza del tema trattato e l'innovazione del metodo seguito, il lavoro svolto può essere considerato un ottimo punto di partenza per un possibile futuro lavoro di ampliamento.