

POLITECNICO DI TORINO



Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea

**Analisi della dispersione  
Lagrangiana nei flussi turbolenti  
attraverso la teoria delle reti  
complesse**

**Relatore**

Stefania Scarsoglio

**Correlatore**

Giovanni Iacobello

**Candidato**

Sergio SCALABRINO

Luglio 2019

# Ringraziamenti

La mia famiglia mi ha trasmesso la curiosità spassionata, i miei professori mi hanno trasmesso il sapere complesso semplificandolo, i miei amici mi hanno dimostrato una forte dose di ammirazione. Senza loro, probabilmente non sarei qui; anche in questo piccolo lavoro meritano dei ringraziamenti.

# Motivi del lavoro

Non esiste ancora una trattazione analitica e generale per lo studio e la risoluzione dei problemi riguardanti la turbolenza, fenomeno largamente presente in natura e in molte applicazioni ingegneristiche e dunque di primaria importanza; per questo finora sono state utilizzate tecniche di tipo numerico e sperimentale, applicabili spesso solamente a singoli casi. Si ha pertanto la necessità di trovare approcci e strumenti adatti allo studio della turbolenza in maniera più ampia e versatile.

In questo lavoro si analizza un flusso turbolento in un canale piano simulato numericamente (DNS) dal punto di vista Lagrangiano con un approccio basato sulla teoria delle reti complesse, sfruttandone le definizioni, i criteri e le migliori potenzialità.

L'insieme di particelle è geometrizzato in una rete di connessioni variabile nel tempo, connessioni valutate con un criterio di prossimità spaziale fra le singole particelle; tali variazioni mettono progressivamente in risalto le caratteristiche e i vari regimi del flusso turbolento, divenendo così uno strumento utile e veloce per lo studio della turbolenza dal punto di vista sia spaziale che temporale.

Si mostra in particolare quale distribuzione spaziale tali particelle assumono, in termini di collegamenti fra esse, tramite delle *probability density function* (PDF) per diversi istanti temporali, calcolando inoltre valore medio e deviazione standard dei set di dati che rappresentano tali collegamenti.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	5
1.1	Cenni sulla turbolenza . . . . .	5
1.2	Descrizione lagrangiana della turbolenza . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Turbolenza di parete</b>	8
2.1	Proprietà e regioni caratteristiche . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Reti complesse</b>	13
3.1	Generalità . . . . .	13
3.2	Definizioni e notazioni . . . . .	15
3.3	Metriche di centralità . . . . .	16
3.3.1	Degree centrality . . . . .	16
3.3.2	<i>Strength</i> di un nodo . . . . .	16
3.3.3	Eigenvector centrality . . . . .	17
3.3.4	Closeness centrality . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Flussi turbolenti e reti complesse</b>	18
4.1	Descrizione del flusso e costruzione della rete . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Risultati</b>	22
5.1	Dinamica delle particelle . . . . .	22
5.2	Studio metriche di centralità . . . . .	26
5.3	Studio nodi caratteristici . . . . .	31
5.4	Risultati normalizzati . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	43
	<b>Bibliografia</b>	44

# 1. Introduzione

## 1.1 Cenni sulla turbolenza

Quando si comincia a studiare la fluidodinamica i primi flussi trattati sono spesso quelli *laminari*: ad essi si associano velocità regolari, un movimento coerente di particelle, un ordine in generale. Ma ciò è in disaccordo con l'esperienza di tutti i giorni: l'impetuoso scorrere dei fiumi, le cascate, il propellente espulso da un razzo assumono presto un aspetto caotico e difficilmente associabile all'ordine. Essi infatti vengono definiti *flussi turbolenti*, in opposizione ai laminari. Subito ci appaiono caotici, non prevedibili in dettaglio; Richard Feynman lo definì "l'ultimo problema irrisolto della fisica classica" <sup>[1]</sup>. In opposizione a quelli laminari, la prima caratteristica dei flussi turbolenti è dunque il fatto che la velocità varia in maniera significativa ed irregolare sia nello spazio che nel tempo.

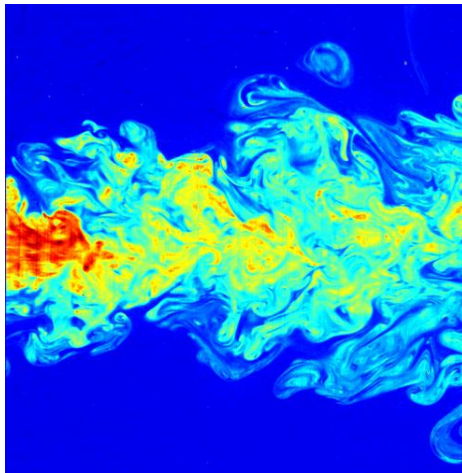


Figura 1.1. Getto turbolento visualizzato per mezzo di fluorescenza indotta da laser, *Wikipedia*<sup>[2]</sup>

È utile fare un confronto con il regime laminare per capire le caratteristiche di quello turbolento. In genere un flusso turbolento è dovuto alle forze d'inerzia alte

rispetto a quelle viscosive. Tali forze d'inerzia contrastano completamente le forze viscosive tipiche di un fluido in regime laminare; dunque il parametro fondamentale che discrimina il regime del flusso (laminare o turbolento) è il **numero di Reynolds**:

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu}$$

dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $U$  la sua velocità macroscopica (media),  $\mu$  la sua viscosità dinamica, e  $L$  è la grandezza caratteristica del fenomeno. Esso ci permette di stabilire quando avverrà la transizione da regime laminare a regime turbolento, in particolari situazioni. Ci sono flussi caratteristici in cui si usano precisi  $Re$  per la transizione: nel caso del condotto cilindrico è  $Re = 2300$ , a meno di disturbi. Riguardo a questo esempio, in Figura 1.2 si nota la differenza tra i due regimi:

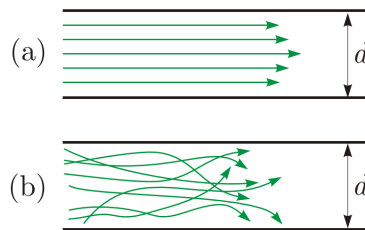


Figura 1.2. Rappresentazione del regime di moto laminare (a) e turbolento (b) all'interno di un condotto cilindrico, *Wikipedia*<sup>[2]</sup>

Guardando più da vicino, si scopre che nel flusso turbolento nascono strutture vorticosive tridimensionali e di grandezze differenti, che rendono il flusso non predicibile nel tempo, poichè ogni fluttuazione anche di piccola entità comporta grandi variazioni del campo di moto già qualche istante dopo. Inoltre, ci sono fluttuazioni turbolente delle quantità del campo di moto, sia spaziali che temporali.

Una caratteristica fondamentale dei flussi turbolenti è l'incentivo che essi danno a due fenomeni: *dissipazione*, per cui a causa dell'elevato sforzo di taglio viscoso l'energia cinetica del fluido si trasforma in energia interna; e la *diffusione*, ben più efficiente nel regime turbolento rispetto a quello laminare, nel trasporto e nello scambio di massa fluida, quantità di moto ed energia.

Ciò assume un'importanza pratica se pensiamo per esempio a qualche applicazione ingegneristica: flussi nei tubi, camere di combustione e relativi processi chimici (incentivati dalla turbolenza), turbine (dove si cerca la turbolenza per evitare la separazione laminare, la quale causerebbe perdite di rendimento maggiori) .

In definitiva, perchè studiamo i flussi turbolenti? Principalmente per tre motivi: la grande maggioranza dei flussi è turbolenta; il trasporto e lo scambio di materia, quantità di moto e calore nei flussi è di elevata importanza pratica; e infine la turbolenza incentiva lo svolgersi di questi processi<sup>[3]</sup>.

## 1.2 Descrizione lagrangiana della turbolenza

È noto che per descrivere il moto di un fluido si possono utilizzare due tipi di coordinate: *euleriane* e *lagrangiane*. Il punto di vista *euleriano* fissa un punto  $\mathbf{x}$  nello spazio (o un volume di controllo) e descrive il variare nel tempo delle grandezze fisiche "che gli scorrono attraverso", per esempio la velocità o la pressione; la generica quantità fisica evolverà seguendo una funzione del tipo  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ . Il punto di vista *lagrangiano* invece focalizza l'attenzione su una o più particelle fluide, seguendole nel loro moto; la generica funzione sarà dunque dipendente dalla particella iniziale  $\mathbf{x}_o$  scelta, cioè  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_o, t)$ . I due punti di vista sono legati dalla *derivata materiale* o *lagrangiana*:

$$\frac{D\mathbf{f}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}}_{\text{derivata a punto fisso}} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{f}}_{\text{termine convettivo}}$$

Ciascun modo di descrivere trova le sue applicazioni in diversi contesti e uno è preferito rispetto all'altro in base alla specifica situazione. Ci si chiede quale dei due modi sia il più adatto per la descrizione della turbolenza: possiamo rispondere a questa domanda pensando alle caratteristiche principali della turbolenza, quali l'intensificazione dei fenomeni di diffusione, di trasporto, dello scambio di quantità di moto e di calore. Dato che questi fenomeni avvengono fra singole particelle è naturale che essi siano indirizzati ad una descrizione *lagrangiana*, punto di vista che recentemente è stato utilizzato con successo per la trattazione teorica del mixing turbolento<sup>(3)</sup>. Importanti contributi in questa linea di ricerca includono quelli di Taylor (1921)<sup>[4]</sup> che studiò la statistica dello spostamento di una particella fluida e quelli di Richardson (1926) che studiò la dispersione di coppie di particelle<sup>[5]</sup>. Ciò che si fa quindi è un vero e proprio *tracciamento* delle particelle, seguendole appunto "lagrangianamente", e così si possono calcolare le proprietà lagrangiane della turbolenza.

Nel flusso portato come esempio (sezione 5) vedremo infatti come scegliere delle particelle, tracciarle nella loro evoluzione e studiarne la dinamica, tramite le reti complesse (sezione 3), la cui analisi porta ad una caratterizzazione del mixing turbolento, dal punto di vista lagrangiano.

# 2. Turbolenza di parete

## 2.1 Proprietà e regioni caratteristiche

La maggior parte dei flussi turbolenti d'interesse sono delimitati da una o più pareti solide, distinguendoli in *flussi interni*, come i flussi in tubi e condotti, e *flussi esterni*, per esempio il flusso d'aria che investe un aereo, o lo scorrere di un fiume<sup>[3]</sup>.

La necessità di calcolare la resistenza agente su un aereo in volo oppure la forza d'attrito sulle pareti di un tubo in cui scorre un fluido ha portato ad un attento e duraturo studio di questi flussi di parete, considerando quindi la loro importanza pratica. In genere le grandezze che si calcolano sono il profilo medio del vettore velocità, e le leggi d'attrito a parete, la quale subisce uno sforzo di taglio a causa del fluido che scorre. Tra i vari flussi di primaria importanza pratica (di cui alcuni in Figura 2.1) , in questo lavoro usiamo come esempio il flusso in un canale piano, detto appunto *canale piano turbolento*.

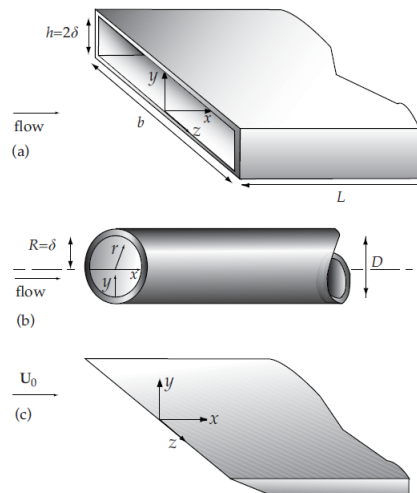


Figura 2.1. Schemi di (a) flusso in un canale , (b) in un tubo, e (c) strato limite turbolento su lamina piana<sup>[3]</sup>.



Nonostante le differenti geometrie e condizioni al contorno, i diversi flussi (in un canale, in un condotto e strato limite su lamina piana) presentano delle forti similarità:

- (i) il vettore velocità media  $U_m$  è sempre diretto parallelo alla parete;
- (ii) sulla parete le condizioni di aderenza impongono che la velocità sia nulla;
- (iii) nella *regione interna* dove la viscosità  $\nu$  e lo sforzo di taglio a parete  $\tau_w$  sono parametri importanti, il comportamento vicino a parete è uguale per tutti i casi.

Possiamo dunque distinguere due regioni: *regione esterna* e *regione interna*. Quella esterna è dipendente dalla geometria, soprattutto nello sviluppo dello strato limite (definito come quel sottile strato di fluido, di spessore  $\delta$ , in cui la velocità varia dal valore nullo a parete al valore della corrente fluida indisturbata) ; quella interna invece è comune a tutti i flussi turbolenti di parete completamente sviluppati. Bisogna a tal fine esprimersi attraverso *unità viscosi*, che servono a scalare velocità e lunghezze vicino a parete, quali:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

detta *velocità di attrito*, e

$$\delta_v = \frac{\nu}{u_\tau}$$

detta *lunghezza viscosa*. Da essa possiamo definire anche la coordinata verticale adimensionale (in unità di parete):

$$y^+ = \frac{y}{\delta_v}$$

Il suo significato (come la sua espressione matematica) è quello di un numero di Reynolds locale: determina l'importanza relativa della viscosità e della turbolenza. Tramite queste unità di parete possiamo distinguere diverse regioni nel flusso vicino a parete, riassunte nella Tabella 2.1 ( $H$ : semi-altezza canale):

Regione	Posizione	Proprietà
Regione interna	$\frac{y}{H} < 0.1$	$U_m$ determinato da $u_\tau$ e $y^+$ , non da $U_0$ (velocità al centro) e $H$
Sottostrato viscoso	$y^+ < 5$	Sforzi di Reynolds trascurabili, dominano gli effetti viscosi
Buffer layer	$5 < y^+ < 30$	Regione tra il sottostrato viscoso e la regione logaritmica
Regione logaritmica	$30 < y^+ < 0.3H$	È valida la legge logaritmica

Tabella 2.1: regioni caratteristiche del flusso vicino a parete<sup>[3]</sup>.

Queste regioni sono comuni a tutti i flussi turbolenti di parete, poichè non dipendenti dalla geometria. Le leggi che regolano le regioni sono:

$$U^+ = y^+$$

per il sottostrato viscoso, dove  $U^+ = U_m/u_\tau$  è la velocità media in unità viscosi, e

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$$

per la regione logaritmica, dove  $\kappa$  è la *costante di Von Karman*, e  $B$  una costante che dipende dalla rugosità della parete. Sperimentalmente si è trovato che per una vasta categoria di correnti a parete esse valgono  $\kappa = 0.41$  e  $B = 5.2$ , rispettivamente, e ciò suggerisce l'universalità della legge. I risultati sperimentali sono in accordo con l'andamento teorico, come visibile dal grafico in Figura 2.2:

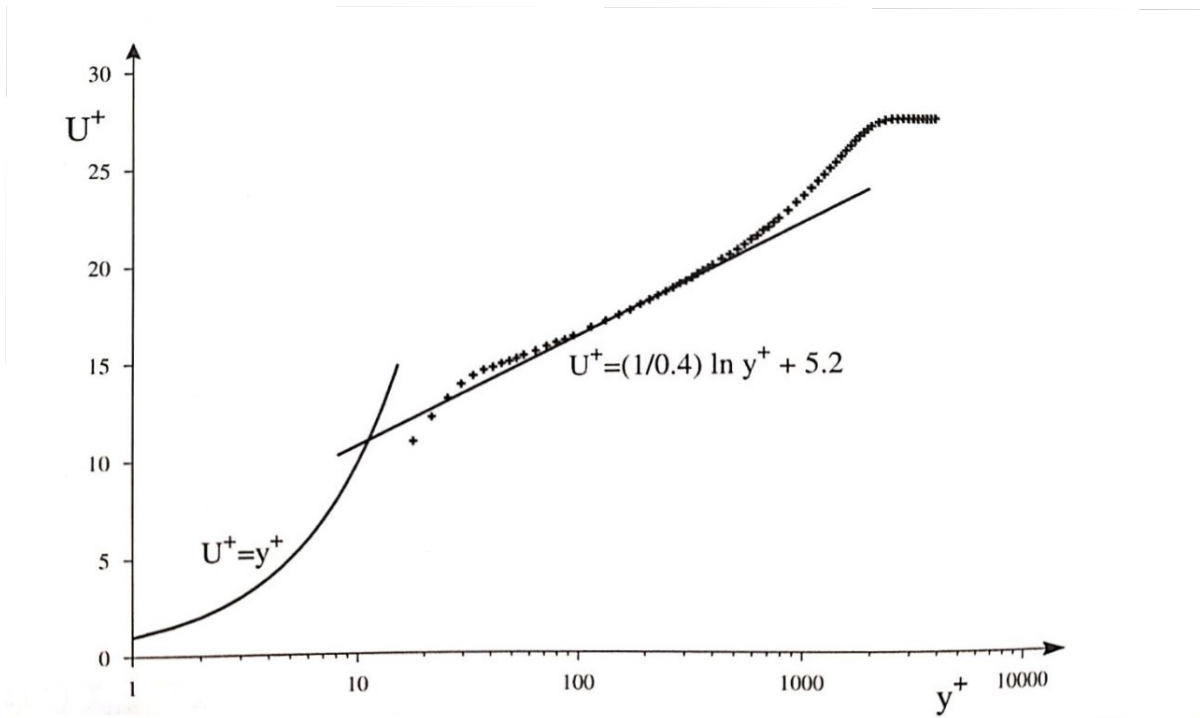


Figura 2.2. Confronto legge universale a parete e dati numerici<sup>[7]</sup>.

È anche interessante studiare l'andamento vicino a parete degli sforzi viscosi e degli sforzi turbolenti di Reynolds  $-\rho \langle u_i u_j \rangle$  (le parentesi  $\langle \rangle$  indicano che le quantità al loro interno sono mediate alla Reynolds<sup>[3]</sup>), adimensionalizzati rispetto allo sforzo d'attrito totale  $\tau$ , somma dei due precedenti, come visibile in Figura 2.3. Notiamo in figura come molto vicino alla parete lo sforzo totale è quasi interamente viscoso: siamo infatti nel *sottostrato viscoso*, dove gli sforzi di Reynolds sono trascurabili rispetto agli sforzi viscosi. Già a  $y^+ = 12$ , cioè pochissimo più lontano dalla parete, esso scende al 50%, per poi tendere a zero e lasciar spazio agli sforzi turbolenti, dominanti già da  $y^+ = 30$ : fin dalla regione logaritmica essi sono gli unici sforzi d'attrito presenti<sup>[3]</sup>.

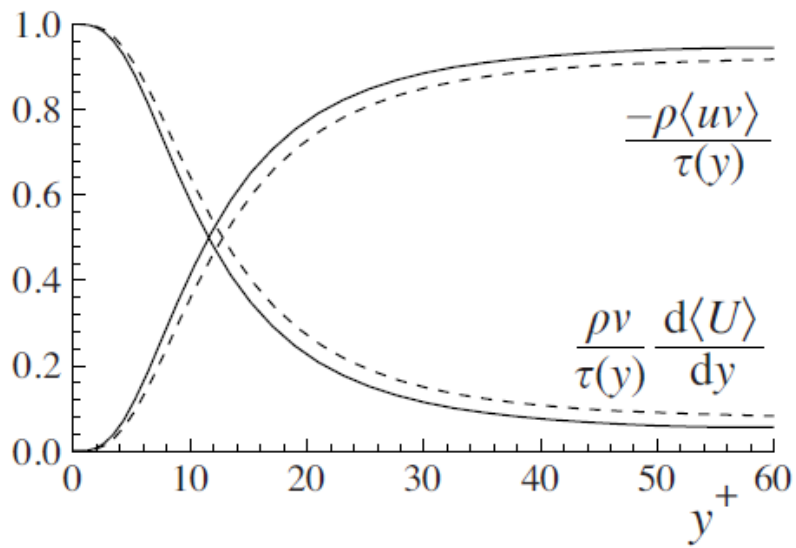


Figura 2.3. Contributi di sforzi viscosi e turbolenti rispetto allo sforzo di taglio totale<sup>[3]</sup>.

Quanto detto finora è valido per ciascun flusso turbolento a parete; nella descrizione del flusso d'esempio ci aspettiamo dei risultati che provano ciò. Inoltre, proveremo a far emergere tale comportamento anche utilizzando gli strumenti delle reti complesse (sezione 3), provando così la loro potenza e utilità.

# 3. Reti complesse

## 3.1 Generalità

Si possono citare molti esempi di sistemi composti da un grande numero di unità interconnesse, ovvero delle reti: in biologia, esiste una fitta rete di neuroni che trasporta i segnali elettrici nel corpo; nella società, tutte le persone formano una rete, invisibile, di conoscenze e reciproche influenze; la definizione stessa di Internet, World Wide Web, richiama al concetto di rete.

Una rete dunque è definibile come un insieme di elementi, che sono collegati opportunamente fra loro.

Un caso storico spesso citato in merito, e che per ammirazione del protagonista citerò anch'io, è il *Problema dei sette ponti di Königsberg*. Il problema richiede la possibilità di seguire un percorso che passi una e una sola volta per ciascun ponte (vedi Figura 3.1).

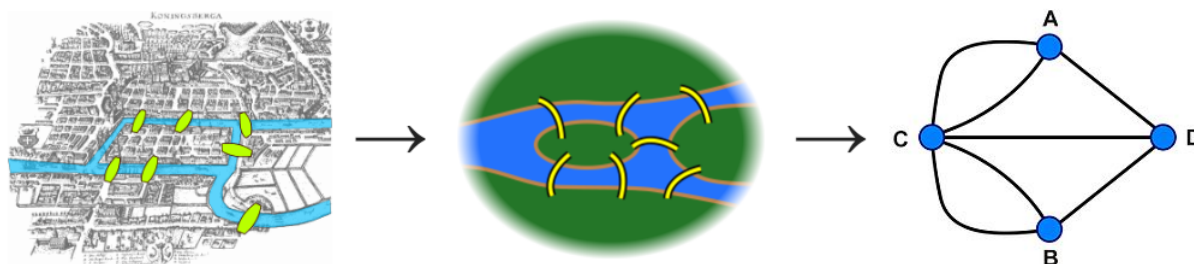


Figura 3.1. Königsberg e i suoi sette ponti. *Wikipedia*<sup>[8]</sup>

Nel 1736 il matematico Eulero lavorò a questo dilemma tutt'altro che banale, dandovi una risposta negativa; dal punto di vista matematico fu uno dei primi problemi della teoria dei grafi, e di conseguenza l'importanza<sup>[8]</sup>.

Come si vede dalla Figura 3.1, le diverse aree diventano elementi  $A, B, C$  e  $D$ ,

mentre i ponti sono i collegamenti tra questi 4 elementi; essa è una rete per definizione. Ogni elemento ha più o meno importanza relativa rispetto agli altri, in base a quanti e quali collegamenti possiede.

Oggi le reti trovano applicazione più immediata e utile: basti pensare a *Google*, che per darci i risultati in pochi millisecondi deve indagare su una immensa rete di risultati, o la rete che collega i diversi aeroporti nel mondo. Riguardo a quest'ultimo esempio, possiamo intuire che non è solo importante il numero di collegamenti tra un elemento (aeroporto) e l'altro, ma anche quanti passeggeri vengono trasportati: in questo caso si parlerà di *rete pesata*. Già capiamo dunque che diversi aspetti vanno tenuti in considerazione, e che servono le giuste definizioni per poter essere trattati matematicamente. Ci costruiamo così strumenti adatti allo studio delle complesse interazioni tra i diversi elementi.

## Examples

- Neural networks
- Power grids
- Gas networks
- Internet router network
- World Wide Web
- Road networks
- Airline networks
- **Call networks**
- Social networks
- Social media networks

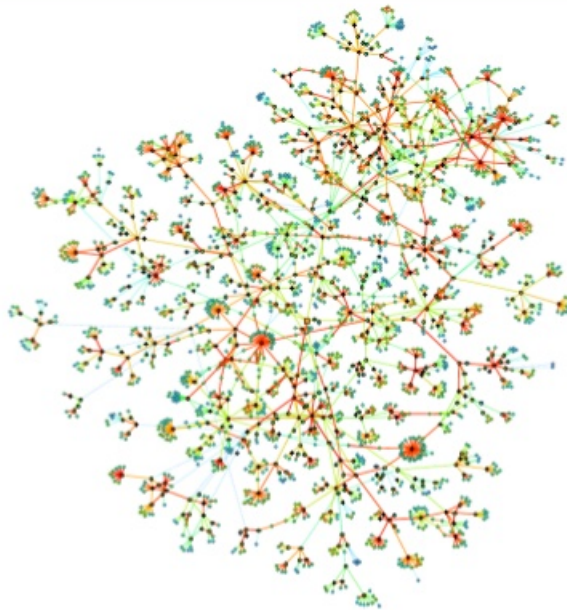


Figura 3.2. Alcuni esempi di reti complesse<sup>[12]</sup>.

## 3.2 Definizioni e notazioni

Seguendo l'articolo di Boccaletti et al.<sup>[9]</sup>, diamo le principali definizioni che verranno usate in questo lavoro: esse si basano in primis sulla teoria dei grafi.

Un grafo non orientato  $G = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$  consiste di due insiemi  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{L}$  tali che  $\mathcal{N} \neq \emptyset$  e  $\mathcal{L}$  è un insieme di coppie di elementi di  $\mathcal{N}$ , senza contarne l'ordine. Gli  $N$  elementi di  $\mathcal{N} \equiv \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$  sono detti *nod*i (o *vertici*) del grafo  $G$ , mentre gli elementi di  $\mathcal{L} \equiv \{l_1, l_2, \dots, l_K\}$  sono i suoi *collegamenti* (o *linee*).

Ci si riferisce ai nodi  $n_i$  con il loro ordine  $i$  nell'insieme  $\mathcal{N}$ ; il collegamento fra due nodi  $i$  e  $j$  viene indicato come  $l_{ij}$ . Notiamo che in un grafo non orientato  $l_{ij} = l_{ji}$ , mentre in uno orientato, che qui non tratteremo, ciò non è vero (vedi in Figura 3.3 (b)). Quando due nodi sono connessi fra loro si dicono *adiacenti*.

Il modo più comune di disegnare un grafo è un insieme di punti, i nodi, collegati da delle linee (anche curve, la forma è irrilevante) se esiste fra loro un collegamento.

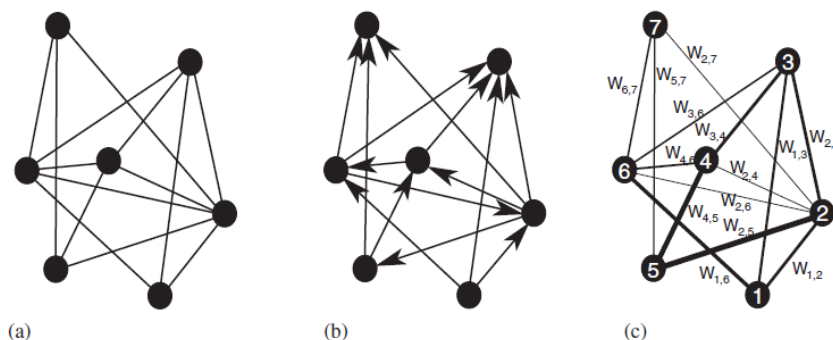


Figura 3.3. Grafo non orientato(a), orientato (b) e pesato(c) <sup>[9]</sup>

In figura 3.3 (a), il grafo ci dice solo se due nodi sono collegati o no; in figura 3.3 (b), vi è un grafo orientato, in cui conta il verso del collegamento tra due nodi adiacenti; quello in 3.3 (c) invece è un grafo pesato: ad ogni collegamento si associa un numero,  $W_{i,j}$ , che rappresenta l'importanza del collegamento, realizzata graficamente con un aumento di spessore. Tale valore può essere naturalmente pensato come appartenente ad una matrice quadrata di dimensione  $N \times N$ , detta *matrice dei pesi*, contenente le informazioni su tutti i collegamenti fra i vari nodi:

$$W_{i,j} = \begin{pmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} & \cdots & W_{1,N} \\ W_{2,1} & W_{2,2} & \cdots & W_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N,1} & W_{N,2} & \cdots & W_{N,N} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Se due nodi non sono collegati, il rispettivo valore  $W_{i,j}$  è pari a 0; per un grafo non orientato ovviamente la matrice è simmetrica. Il criterio di valutazione del peso varia da problema a problema; nel nostro specifico caso vedremo che è stato usato un criterio di prossimità spaziale, con la classica notazione di distanza euclidea.

### 3.3 Metriche di centralità

Ciascun nodo possiede un certo grado di importanza nella rete di cui fa parte, in base a quanti e quali nodi si collegano con esso. Per l'analisi di una rete è utile quantificare questa importanza; a partire dalla matrice dei pesi è possibile rispondere a queste domande in diverse maniere. Tutte le definizioni seguenti ci torneranno utili per lo studio del canale piano turbolento dal punto di vista Lagrangiano nel prossimo capitolo.

#### 3.3.1 Degree centrality

La prima metrica di centralità che definiamo è la *degree centrality* del nodo  $i$ , che conta semplicemente il numero di collegamenti del nodo  $i$  con tutti i suoi nodi adiacenti:

$$C_D(i) = \sum_{j \in \mathcal{N}} A_{i,j} \quad j \neq i \quad (3.2)$$

dove  $I_{i,j}$  è 1 se i due nodi  $i, j$  sono collegati, e 0 altrimenti. Non viene tenuto conto del peso di tali collegamenti.

#### 3.3.2 Strength di un nodo

Si definisce *strength* di un nodo (o peso del nodo) come il numero:

$$S_i = \sum_{j \in \mathcal{N}} W_{i,j} \quad (3.3)$$

ovvero la somma degli elementi della riga  $i$ , corrispondenti al nodo  $i$ . Essa dà informazioni sul numero di collegamenti, ma anche sul loro peso: un nodo con tanti collegamenti ma di basso peso può avere una *strength* minore di un nodo con pochi collegamenti, ma di elevata importanza (ovvero  $W_{i,j}$  elevato in modulo). Dunque costituisce la versione pesata della *degree centrality*.



### 3.3.3 Eigenvector centrality

Un nodo può avere collegamenti con elevato peso, però bisogna anche vedere con che tipo di nodi esso è ben collegato: nodi a loro volta centrali oppure isolati?

La *eigenvector centrality* assegna un elevato punteggio al nodo  $i$  se esso possiede collegamenti con nodi che a loro volta possiedono un elevato punteggio poichè centrali, e al contrario assegna un basso punteggio se i nodi adiacenti sono più isolati. Dunque, essa tiene conto dell'importanza dei propri vicini, dei nodi adiacenti.

Viene chiamata così perchè è calcolabile dall'equazione agli autovalori:

$$\mathbf{W}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

In genere ci saranno diversi autovalori  $\lambda$ , fra questi l'autovalore massimo assicura che l'autovettore associato abbia valori tutti con lo stesso segno (dal teorema di Perron-Frobenius)<sup>[6]</sup>. L'elemento  $i$  dell'autovettore corrispondente  $\mathbf{x}_{eig}$  è il punteggio di centralità assegnato al nodo  $i$ . I punteggi sono normalizzati in modo tale che la somma di tutti i punteggi di centralità sia pari a 1.

### 3.3.4 Closeness centrality

Infine l'ultima metrica che useremo è la *closeness centrality*: più un nodo è centrale, più esso è vicino a tutti gli altri nodi, in termini di percorso più breve, ovvero il percorso che collega due nodi tale per cui la somma dei pesi dei collegamenti che costituiscono tale percorso è minimizzata.

Essa dunque deve essere più elevata quanto più piccola è la distanza che separa due nodi. Si può intuire che la definizione si baserà sul reciproco della distanza: infatti la closeness centrality è definita come

$$C_C(i) = \sum_{j \neq i} \frac{1}{d(j, i)} \quad (3.4)$$

dove  $d(j, i)$  è la distanza in termini di percorso più breve tra i nodi  $i$  e  $j$ . È dunque la somma dei reciproci delle distanze, o meglio la non ancora normalizzata media armonica delle distanze.

## 4. Flussi turbolenti e reti complesse

Come già detto la peculiarità dei flussi turbolenti è l'incentivo che essi danno ai processi di diffusione e scambio; l'importanza pratica che ne deriva è facilmente intuibile: dalle reazioni chimiche, alla combustione, ai fenomeni atmosferici, essi tutti subiscono processi di mixing più o meno notevoli, che con difficoltà sono studiabili.

Vari studi hanno dimostrato che l'analisi del mixing turbolento dal punto di vista Lagrangiano - in cui l'attenzione è posta sulle particelle in avvezione - è più adatta rispetto a quello Euleriano, almeno per molti casi <sup>[10]</sup>.

Tramite le reti complesse, possiamo studiare il mixing turbolento dal punto di vista Lagrangiano, geometrizzando l'insieme di particelle come una rete che interagisce. Abbiamo così da un lato una rappresentazione dell'evolversi del flusso nel tempo, ovvero l'evoluzione nel tempo della rete pesata (tramite prossimità spaziale), e dall'altro un modo per studiare la dinamica di tale flusso, mettendone in risalto caratteristiche principali ma anche eventi anomali o difficilmente prevedibili. Ciò sarà visibile dall'andamento spaziale/temporale delle metriche che abbiamo definito precedentemente.

L'uso delle reti complesse dunque è uno strumento nuovo e potente per l'analisi della turbolenza dal punto di vista lagrangiano, che merita di essere approfondito in studi successivi.

## 4.1 Descrizione del flusso e costruzione della rete

Come anticipato, si usano i risultati di un flusso in un canale piano turbolento, avendo risolto numericamente (DNS)<sup>[10]</sup> le equazioni di continuità e di Navier-Stokes (NS):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.1)$$

dove  $\mathbf{u}$  e  $\rho$  denotano la velocità e la densità del fluido,  $p$  la pressione totale,  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  la vorticità e  $t$  il tempo. I parametri utilizzati, in unità adimensionali, sono:

- $H$  semi-altezza del canale
- $u_\tau$  velocità d'attrito
- $\nu$  viscosità cinematica
- $Re_\tau = \frac{H u_\tau}{\nu} = 950$
- $2\pi H$  lunghezza del canale della direzione del flusso
- $\pi H$  larghezza del canale
- $\nabla p$  costante nella direzione del flusso
- $x^+, z^+$  direzioni nel piano, parallele al flusso e perpendicolare rispettivamente
- $y^+$  direzione perpendicolare al piano
- $T^+ = 15200$  tempo totale di simulazione, dove  $T^+ = u_\tau^2 T / \nu$
- $\Delta t^+ = 4.75$  time-step, dove  $\Delta t^+ = u_\tau^2 \Delta t / \nu$
- $\Delta y^+ = 7.8$  massimo intervallo nella direzione perpendicolare al flusso
- $y^+ = 0, 1900$  valori massimali nelle due pareti

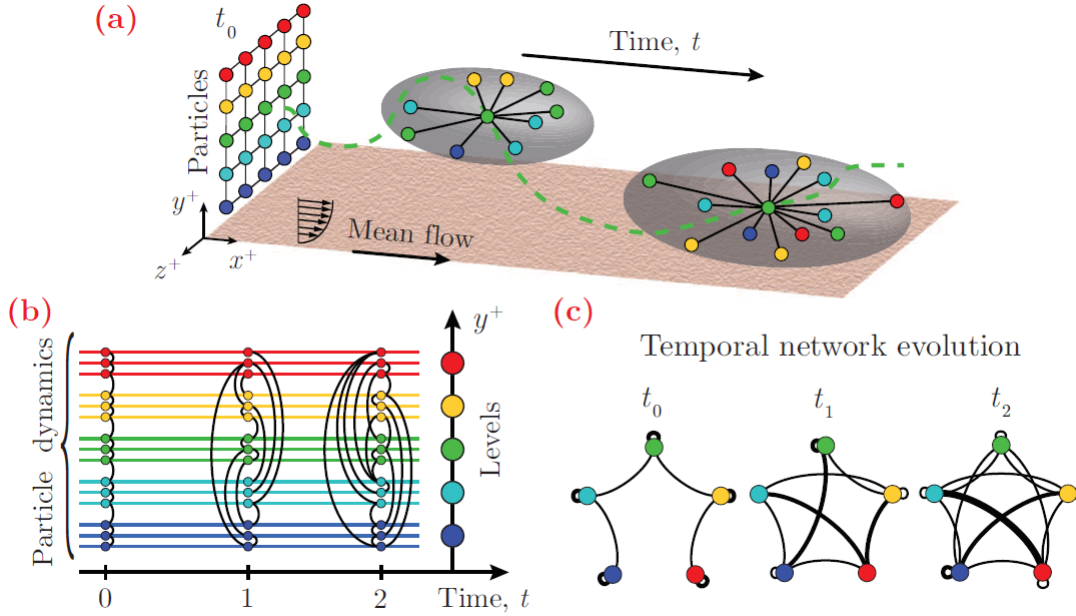


Figura 4.1. (a): set iniziale di particelle rilasciato ad  $x^+ = 0$ , ellissoidi attorno una particella; (b) dinamica delle particelle; (c) evoluzione temporale delle corrispondenti reti. *Iacobello, Scarsoglio et al.*<sup>[10]</sup>

Un insieme di  $N_y \times N_z$  particelle, con  $N_y = N_z = 100$ , è rilasciato dalla posizione  $x^+ = 0$  (per esempio, vedi figura 4.1 con  $N_y = N_z = 5$ ). Le particelle sono state divise in  $N_y$  livelli  $l_i$  (ognuno con 100 particelle) in senso perpendicolare alla parete, ciò per porre l'attenzione sul mixing in direzione normale alla parete. I diversi livelli sono stati resi con colori diversi in Figura 4.1; tali livelli diventano i *nodi* della rete che andremo a costruire. In questo modo i nodi sono statisticamente significativi perchè non rappresentano una sola particella. Non appena il fluido comincia a scorrere, le particelle appartenenti ai diversi livelli si mescolano fra loro, a causa della turbolenza in attività<sup>[10]</sup>.

Le interazioni fra i nodi sono studiate con un criterio di mutua prossimità spaziale: in particolare si definisce attorno ad ogni particella un ellissoide di riferimento, e un'altra particella è collegata alla prima se essa rientra spazialmente in tale ellissoide di riferimento (vedi figura 5.1 (a)).

L'ellissoide è definito dai suoi semiassi nello spazio  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ , valori definiti dalle scale spaziali della turbolenza; la loro definizione può essere tutt'altro che banale. In questo lavoro usiamo la distanza euclidea media  $\langle \mathbf{d} \rangle$  come proporzionale ai semiassi tramite un fattore  $\alpha_i = 0.5$ . In figura 5.1 (b) e (c) gli archi rappresentano i collegamenti tra i livelli, il cui peso è rappresentato dallo spessore<sup>[10]</sup>.

A ciascuna coppia di nodi  $(i, j)$  è associato dunque il peso del loro *link*, che esprime

il numero totale di connessioni stabilite tra tutte le particelle del livello  $l_i$  e tutte quelle del livello  $l_j$ , a due a due. Questo peso varia nel tempo, dunque la rete stessa varia nel tempo: la sua evoluzione temporale che descrive la dinamica delle particelle può essere studiata tramite la *matrice dei pesi*:

$$W_{i,j}(\mathbf{a}, t^+) = \sum_{p \in l_i} \sum_{q \in l_j} I_{p,q}(\mathbf{a}, t^+) \quad i, j = 1, \dots, N_y \quad (4.2)$$

dove  $W_{i,j} = W_{j,i}$ , e la funzione binaria  $I_{p,q}$  è pari a 1 se la particella  $p$  si trova dentro l'ellissoide della particella  $q$  (o viceversa), al tempo  $t^+$ , altrimenti è uguale a 0. In questo modo il peso del collegamento  $(i, j)$  conta esattamente il numero di connessioni stabilite fra tutte le particelle del livello  $l_i$  e tutte le particelle del livello  $l_j$ , prese singolarmente<sup>[10]</sup>.

Tramite questa matrice  $\mathbf{W}$  siamo in grado di visualizzare l'andamento temporale delle particelle, collocate all'inizio alla stessa altezza  $y^+$ , studiando come variano i diversi pesi  $W_{i,j}$  ad ogni  $t^+$ : quando essi sono pari a 0 non c'è collegamento, mentre quando sono diversi da 0, bisogna vedere quant'è elevato in modulo, ovvero quanto è forte il collegamento fra i due nodi. Otteniamo così informazioni sul mixing turbolento in maniera efficace, studiando una matrice  $100 \times 100$  che rappresenta in verità la topologia della rete ad ogni istante temporale.

# 5. Risultati

## 5.1 Dinamica delle particelle

Come già detto, le particelle partono da una configurazione a griglia  $100 \times 100$ , dalla posizione  $x^+ = 0$ . Per tempi brevi la loro dinamica è caratterizzata da un moto quasi puramente avvertivo: le particelle centrali si allontanano di molto dalla posizione iniziale, dato che non subiscono gli effetti di aderenza a parete e sperimentano a pieno l'effetto del moto medio, mentre le particelle vicino a parete si spostano di molto meno a causa dell'aderenza a parete. Assumono quindi una forma caratteristica "ad arco", simmetrica rispetto alla semi-altezza del canale come visibile in Figura 5.1:

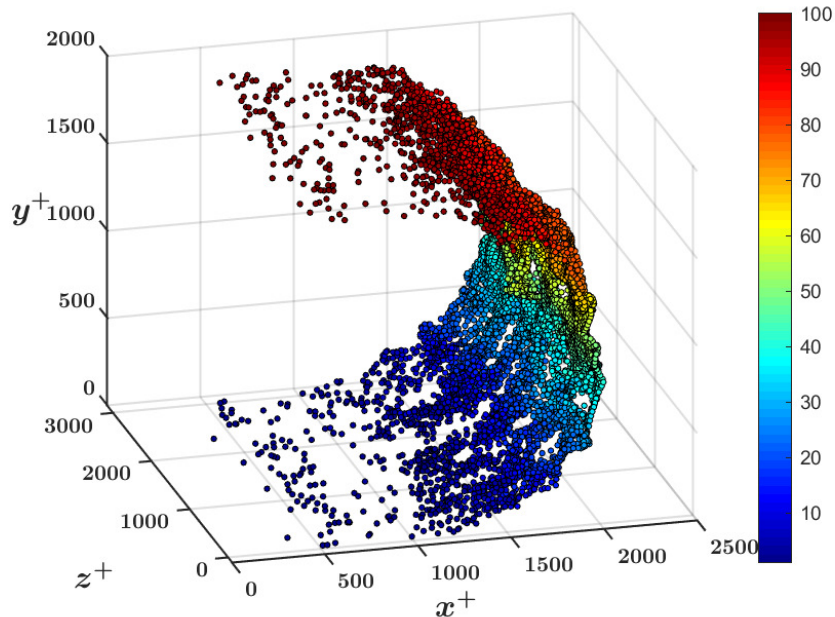


Figura 5.1. Posizioni delle particelle per tempi brevi, esempio con  $t^+ = 190$ ; i diversi colori rappresentano i livelli  $l_i$ , ancora allineati alle loro  $y^+$  iniziali

Andando progressivamente verso tempi lunghi si nota che la forma ad arco viene sostituita da una distribuzione spaziale di particelle, in cui tutti i livelli si sono dispersi fra le varie posizioni  $y^+$  e non c'è più distinzione tra configurazione vicino a parete e lontano dalla parete, come visibile in Figura 5.2:

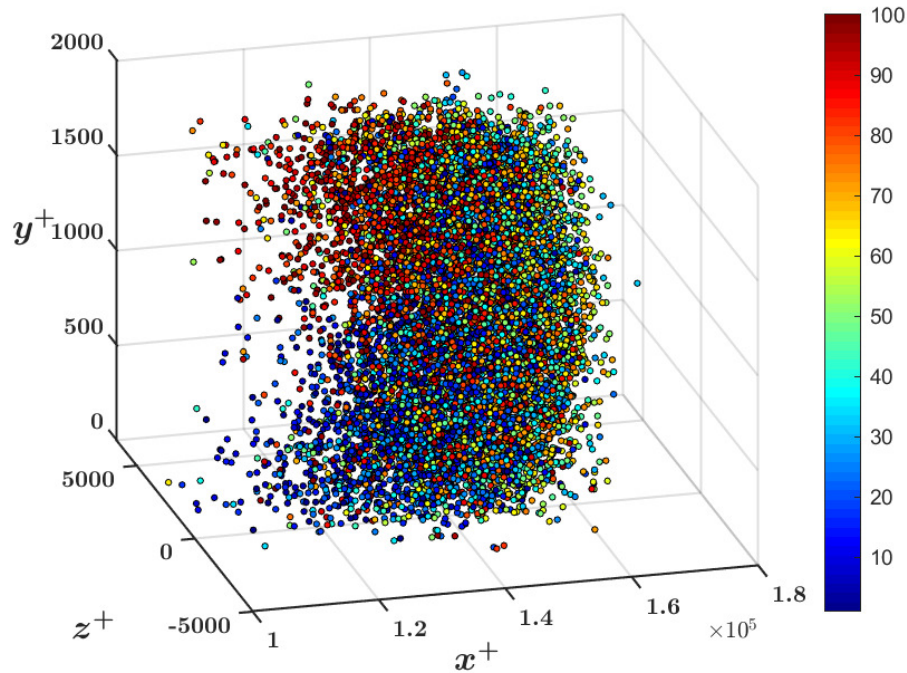


Figura 5.2. Posizioni delle particelle per tempi lunghi, esempio con  $t^+ = 15192$ ; i diversi colori rappresentano i livelli  $l_i$ , ormai completamente distribuiti per tutta l'altezza del canale

Si capisce dunque che il mixing turbolento all'inizio ha un lieve effetto, per cui il flusso è dominato dall'avvezione; per tempi lunghi invece le particelle si mescolano efficacemente tra loro grazie al suo effetto. Ci chiediamo dunque come e quando il mixing turbolento cominci ad agire, e con quale importanza: per studiare ciò possiamo utilizzare la matrice dei pesi precedentemente definita.

Possiamo scegliere sei tempi caratteristici e guardarne la matrice  $W_{i,j}(t^+)$  ad essi associata, per provare a catturare la topologia della rete.

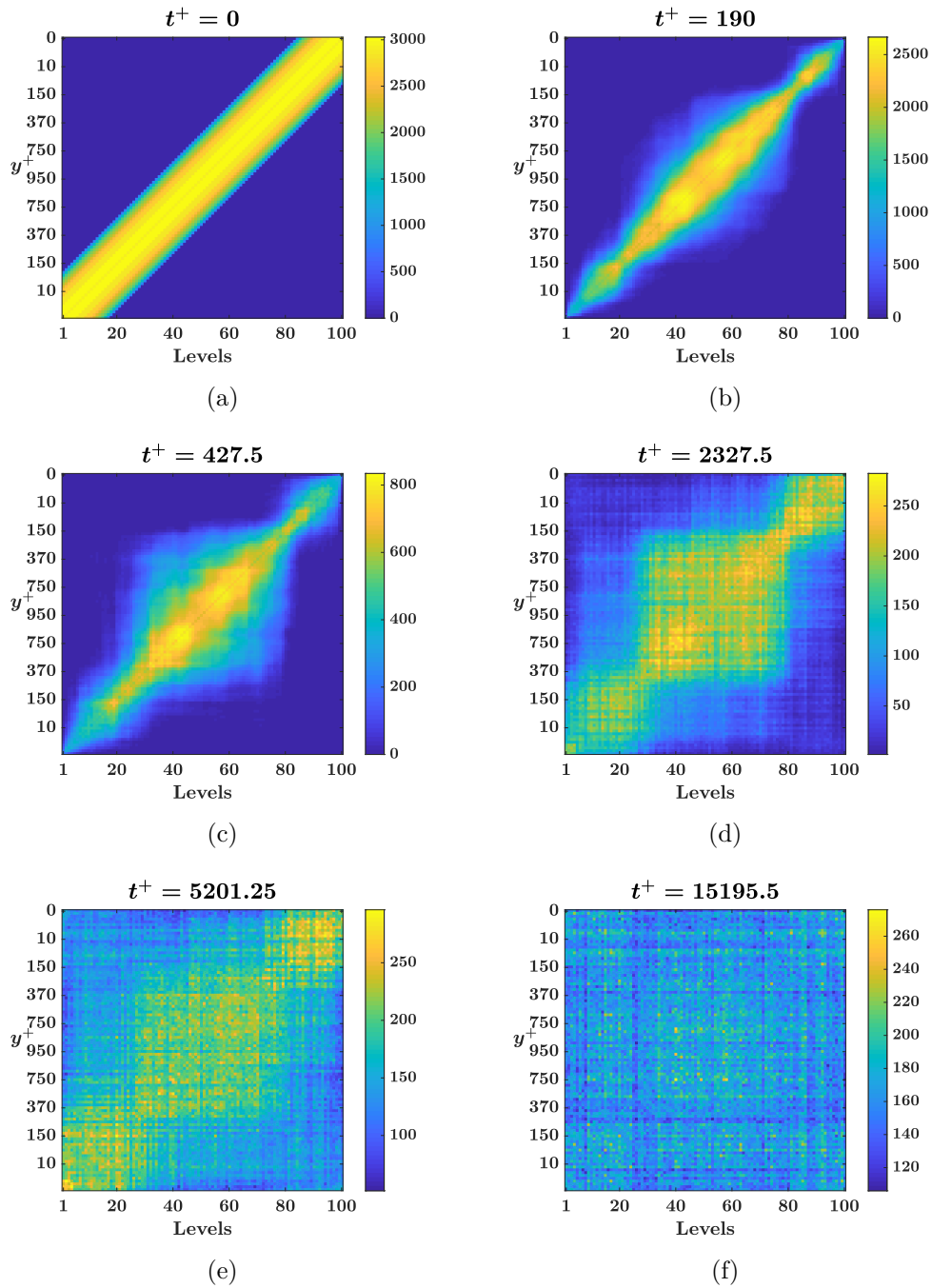


Figura 5.3. (a-f) : in ordinate i valori di  $y^+ \in [0; 950]$  relativi dunque alla parete più vicina; in ascisse i livelli da 1 a 100; i colori rappresentano il peso del *link* tra il livello in ascissa e il livello corrispondente al valore  $y^+$  in ordinata.



Nei primi istanti temporali (Figure 5.3 (a-c)) la configurazione della matrice è ancora per lo più diagonale: ciò significa che i livelli sono collegati con se stessi e con i loro vicini; al massimo nascono dei deboli collegamenti con livelli un pò più lontani (Figura 5.3 (c)), corrispondenti a valori  $W_{i,j}$  piccoli fuori dalla diagonale. Queste matrici corrispondono alla situazione della Figura 5.1, in cui la dinamica del flusso è dominato dall'avvezione e la distribuzione spaziale delle particelle lungo  $y^+$  assume la forma di un arco; le particelle sono ancora nelle loro posizioni  $y^+$  iniziali corrispondenti al proprio livello, e il mixing turbolento è ancora debole.

Per tempi più lunghi il mixing turbolento comincia ad avere un effetto rilevante, per cui si passa dalla struttura diagonale della matrice ad una "a tre quadrati" (Figura 5.3 (d)) fino ad una struttura apparentemente random (Figura 5.3 (f)). Vediamo dunque che a valle (cioè per elevati valori di  $x^+$ ) la matrice  $\mathbf{W}(t^+)$  presenta valori piccoli, ma tutti diversi da 0: i livelli si sono collegati tutti fra di loro. Il motivo per cui i link hanno un valore basso è spiegabile così: all'inizio le particelle, distribuite spazialmente a forma di arco, sono tutte vicine fra loro ed occupano uno spazio denso, dunque i link, seppur pochi in numero, possiedono un peso elevato; quando invece il mixing turbolento muove le particelle da parete verso il centro, esse si spostano in una zona meno densa (o proprio priva) di particelle, per cui lo spazio occupato da tutte esse non è "ottimizzato", ma il più caotico e disperso possibile, ragion per cui il peso dei link decresce a valori ben più bassi.

Data questa visione d'insieme delle matrici, passiamo adesso ad un altro punto di vista: per tutti i nodi studiamo alcune metriche di centralità. Potrebbero così emergere caratteristiche particolari difficilmente intuibili dallo studio della matrice dei pesi nel tempo.

## 5.2 Studio metriche di centralità

Le metriche esplorate sono la *degree centrality*, la *strength*, la *eigenvector centrality* e la *closeness centrality*. La loro valutazione permette di conoscere l'importanza di un qualunque nodo della rete sotto certi aspetti particolari, aspetti che per ciascuna metrica sono differenti. Vengono considerati tutti i nodi/livelli, ma per i soli 7 istanti temporali importanti.

**Degree centrality:** con essa valutiamo semplicemente il numero di collegamenti, stavolta non pesati, che ciascun livello possiede con gli altri. I livelli centrali pure qui sono più centrali, ma la loro centralità cresce nel tempo in maniera opposta rispetto alla *strength*: ciò perché contiamo solo il numero di collegamenti ma non la distribuzione spaziale effettiva delle particelle. Infatti, il livello di centralità dei livelli a parete addirittura decresce per i primi istanti temporali, per poi crescere bruscamente e stabilizzarsi già dal quarto istante temporale, con un numero di collegamenti pari a 100, il più alto valore possibile (vedi Figura 5.4).

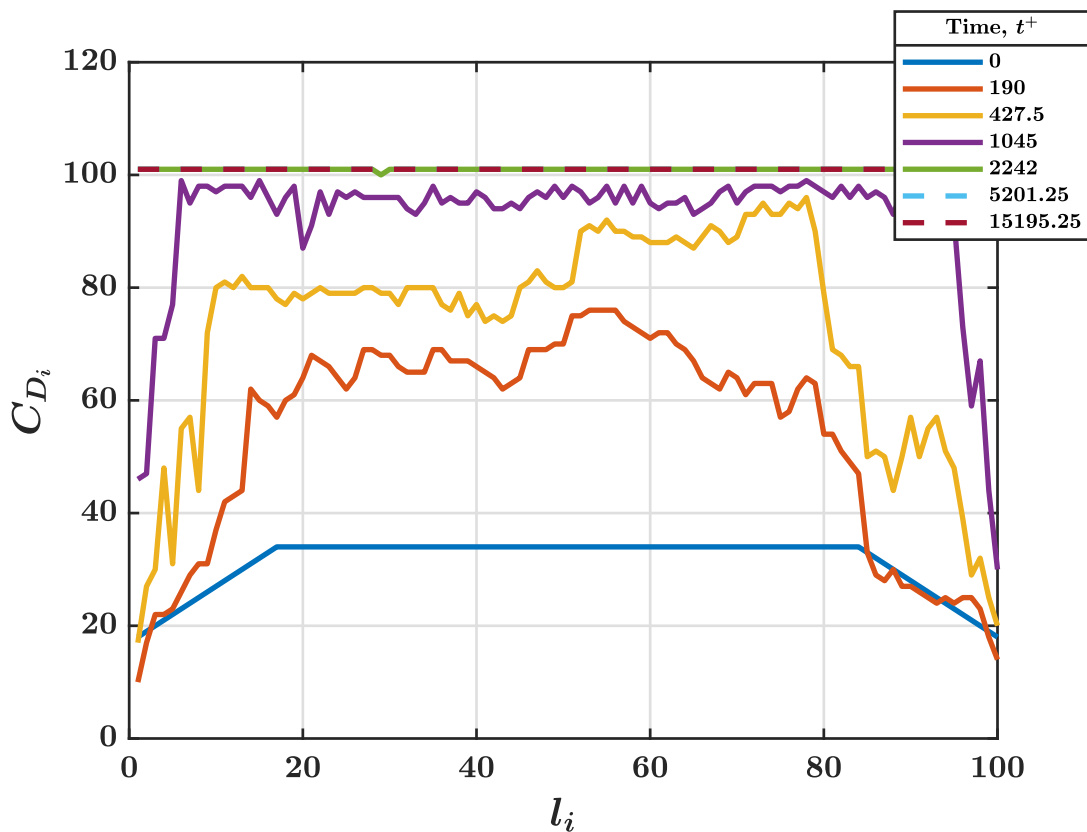


Figura 5.4. *Degree centrality* per tutti i livelli  $l_1, \dots, l_{100}$  in alcuni tempi  $t^+$  caratteristici

**Strength:** con essa valutiamo semplicemente il numero di collegamenti, pesati, che ciascun livello possiede con gli altri. I livelli intermedi in questo caso sono più centrali (secondo questo criterio) rispetto agli altri, e ciò lo si vede fino al quinto istante temporale; poi diventa tutto più uniforme (vedi Figura 5.5).

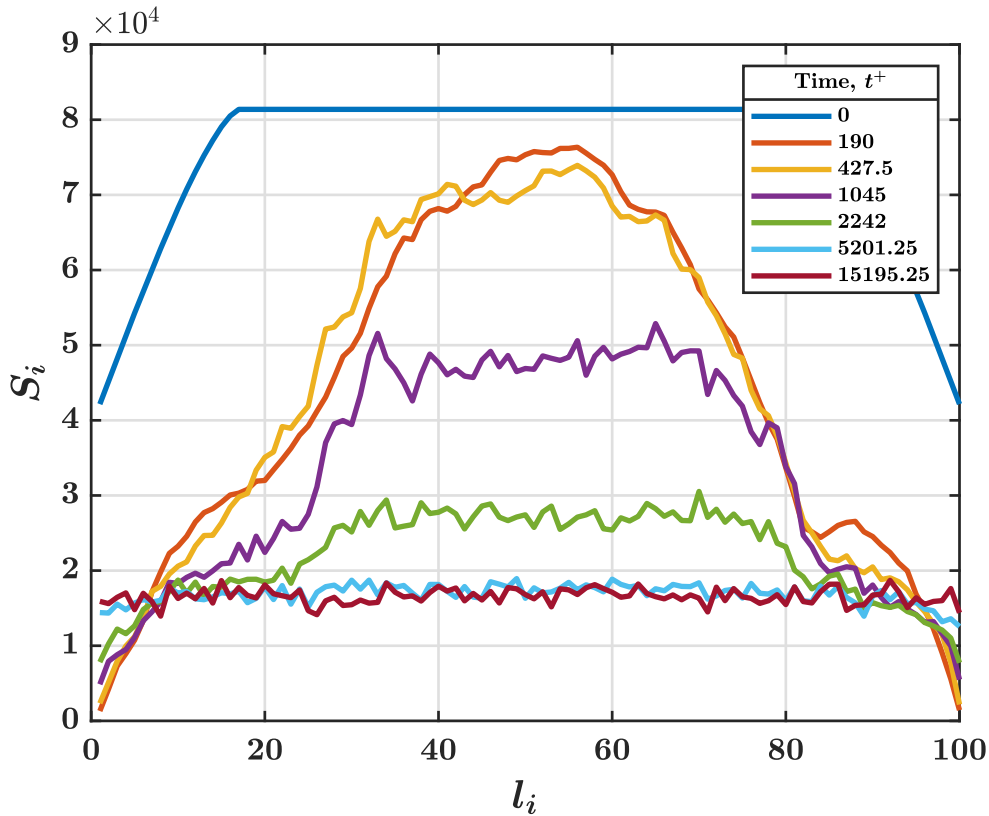


Figura 5.5. *Strength* per tutti i livelli  $l_1, \dots, l_{100}$  in alcuni tempi  $t^+$  caratteristici

Il motivo di ciò è lo stesso spiegato precedentemente: le particelle passano da una configurazione ad arco, densa, in cui i nodi appartenenti a livelli contigui sono molto vicini fra loro, ad una configurazione uniforme in cui le particelle di ciascun livello occupano il più grande spazio possibile, poco denso, mosse lungo la normale alla parete dal mixing turbolento. Si spiegano così gli alti valori raggiunti dalla *strength* di ciascun nodo (vedi paragrafo 3.3.1 e 3.3.2) per i primi tempi, e la loro decrescita per tempi lunghi.

È interessante anche notare che le metriche per ogni tempo si incrociano sempre nello stesso punto: circa  $l_6$  e  $l_{94}$ , corrispondenti a valori di  $y^+ \approx 100$  considerando la parete più vicina. Per valori più vicini a parete, le metriche per tempi brevi hanno un valore sempre più basso dei corrispettivi valori per tempi più lunghi; al

contrario, per livelli più centrali le metriche hanno un valore sempre maggiore nei primi tempi rispetto a tempi lunghi, ma decrescenti. Questa  $y^+$  corrisponde circa al limite della *regione interna*, cioè:

$$\frac{y}{H} < 0.1 \quad \text{definizione regione interna}$$

$$\frac{y}{H} = \frac{y^+}{Re_\tau} \approx \frac{100}{950} \approx 0.1$$

Da questo valore di  $y^+$  (o  $y$ ) in poi è valida la legge logaritmica. I livelli della regione interna pertanto sono quelli che sperimentano gli sforzi viscosi e questo li porta ad un "isolamento" rispetto agli altri nodi, da cui il basso valore di centralità (spiegabile anche col fatto che materialmente non hanno altri livelli "al di sotto" di loro con cui legarsi, risultando svantaggiati rispetto a livelli intermedi).

**Eigenvector centrality:** lo step successivo è contare non solo i collegamenti pesati del nodo  $l_i$ , ma anche quanto il nodo  $l_j$ , a cui è collegato il nodo  $i$  in questione, sia a sua volta "centro" di tanti link. Ciò significa che il livello  $l_i$  ha un elevato "punteggio" se è connesso con i suoi vicini che a loro volta sono ben connessi.

Si nota in Figura 5.6 come i livelli vicini a parete perdono centralità all'inizio (la curva si abbassa ai margini), per poi riacquistarla quando il mixing diventa prevalente. Più sorprendente è la crescita iniziale di centralità dei livelli intermedi attorno a 50, corrispondente alla deviazione dalla "forma ad arco" di questi istanti temporali (Figure 5.3 (b) e (c)), in cui nascono nuovi collegamenti fra particelle. I livelli centrali per tali tempi sono ancora fortemente dominati dall'avvezione dunque rimangono "densi" fra loro senza essere dispersi ovunque dalla turbolenza. Segue dunque un andamento simile alla *strength*, contando in più il punteggio "dei propri vicini".

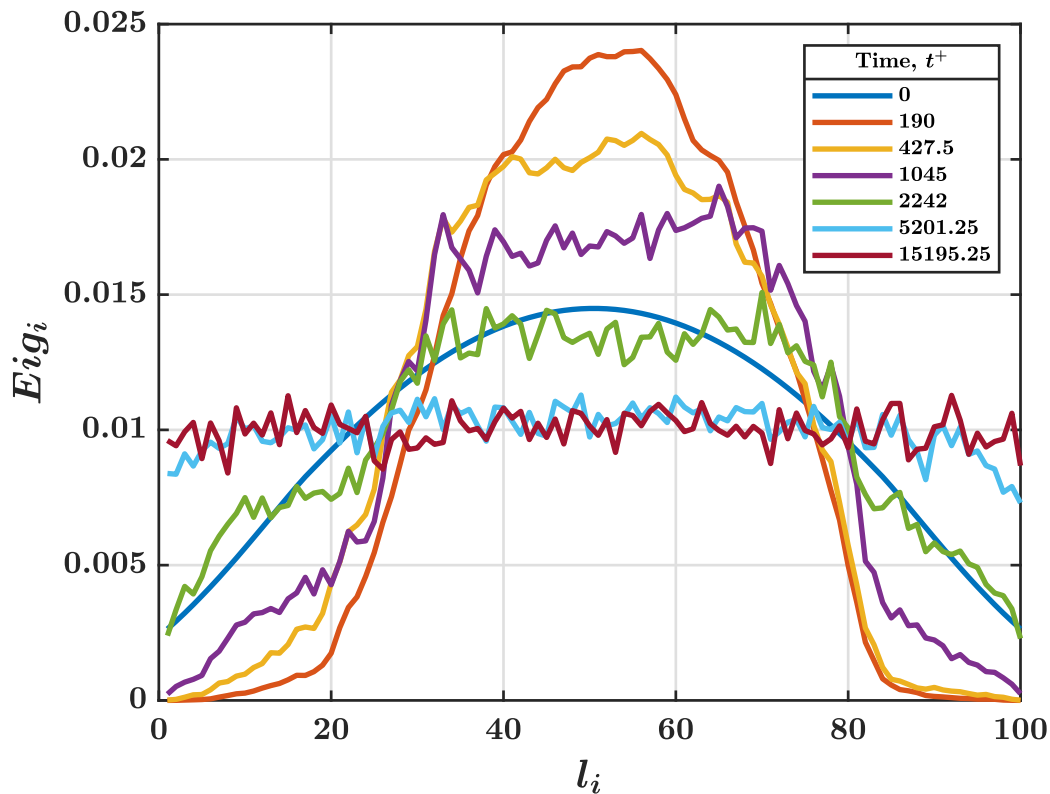


Figura 5.6. *Eigenvector centrality* per tutti i livelli  $l_1, \dots, l_{100}$  in alcuni tempi  $t^+$  caratteristici

La differenza rispetto alla *strength* si manifesta nell'incrocio delle curve. Tale incrocio infatti si ha al livello  $l_{26}$  circa, corrispondente a  $y^+ \approx 500$ , ovviamente col suo speculare  $y^+ \approx 1400$ . Come spiegato nell'articolo di Iacobello, Scarsoglio et al. [5], tali coordinate corrispondono al limite entro cui è confinato il quadrato centrale della struttura "a tre quadrati" di Figura 5.3 (d). Questo valore normale a parete corrisponde al punto in cui lo sforzo di taglio medio  $\partial U_m / \partial y$  decresce repentinamente a 0; infatti le particelle lontane dalla parete quasi non risentono dello sforzo di taglio medio, dove invece le particelle vicine a parete tendono a formare le "code" tipiche della forma ad arco proprio a causa dello sforzo di taglio; l'avvezione dei primi istanti intensifica questa differenza tra le due regioni, allungando le distanze tra i nodi/particelle.

**Closeness centrality:** essa valuta il percorso più breve tra un nodo e tutti gli altri in termini di *shortest path* (vedi paragrafo 3.3.4). Dunque essa rispetto alle altre metriche valuta "l'efficienza" della rete, in termini di complessità di cammino tra un nodo e l'altro. Potremmo dunque scoprire l'efficienza del mixing turbolento.

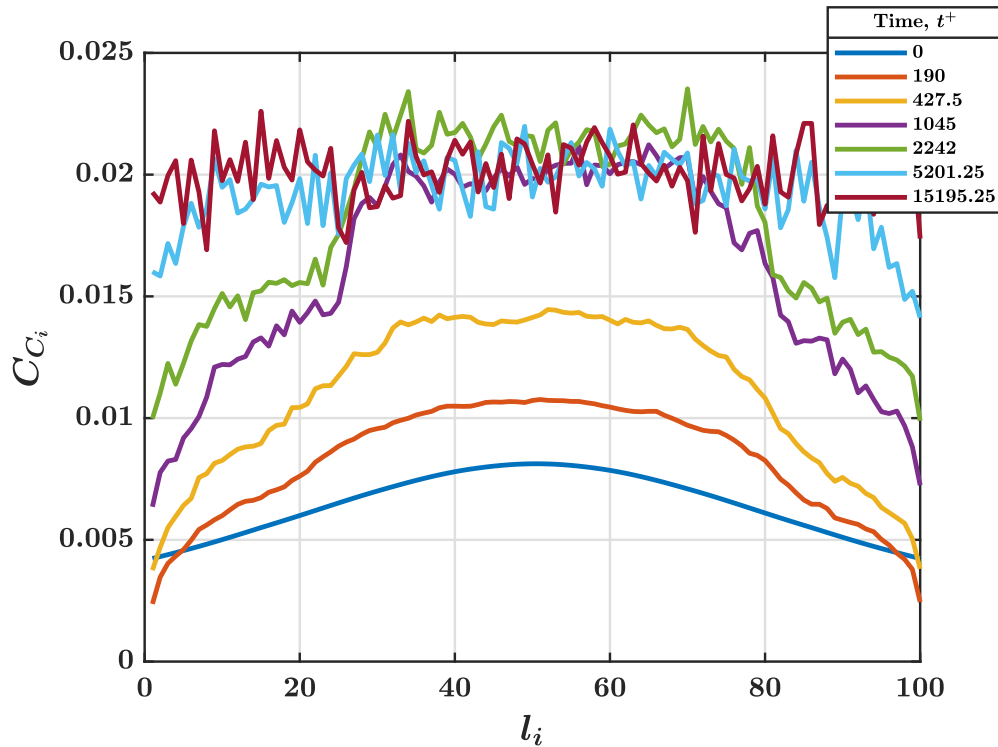


Figura 5.7. *Closeness centrality* per tutti i livelli  $l_1, \dots, l_{100}$  in alcuni tempi  $t^+$  caratteristici

Notiamo in Figura 5.7 che l'andamento è un pò diverso rispetto alle metriche *strength* e *eigenvector*: al crescere del tempo, essa raggiunge valori più alti per tutti i nodi, soprattutto a partire dai livelli centrali; inoltre non ci sono punti in cui le curve si incrociano. Dato che essa valuta lo *shortest path* tra un nodo/livello e tutti gli altri, più le particelle sono mischiate fra loro (tempi lunghi) più è facile trovare un percorso breve che le collega fra loro. Questo non accade ai primi tempi dove l'unico percorso possibile fra due nodi lontani lungo  $y^+$  è percorrere tutti i nodi che si trovano nel mezzo ai due in questione. Si spiega così l'andamento opposto di questa metrica; ciò fa capire come il mixing turbolento avvicini fra loro tutte le particelle e questo potrebbe risultare importante qualora, per esempio, si cerca di far avvenire reazioni chimiche fra particelle di un fluido, o di incentivare lo scambio di quantità di moto e soprattutto calore.

### 5.3 Studio nodi caratteristici

Per avere ulteriori dettagli, studiamo il comportamento lungo l'altezza del canale focalizzandoci soltanto su cinque livelli caratteristici e vedere il loro comportamento nel tempo e relativamente agli altri livelli (per esempio: con chi si lega di preciso il livello 20). In particolare daremo un'interpretazione statistica dei dati, vedendo che tipo di distribuzione essi assumono, la media e la deviazione standard e i loro valori normalizzati.

Per prima cosa valutiamo i  $\Delta l$ , ovvero la differenza in valore assoluto tra gli indici di due livelli legati  $l_i$  e  $l_j$ , per **5 nodi caratteristici**  $l_i = 1; 20; 50; 80; 100$ , cioè si fissa  $l_i$  e si vede con quali livelli  $l_j = 1...100$  esso si lega. Dei valori per ciascun tempo calcoliamo la *probability density function*, o PDF, visualizzata tramite istogrammi nelle Figure 5.8, 5.9,... 5.12:

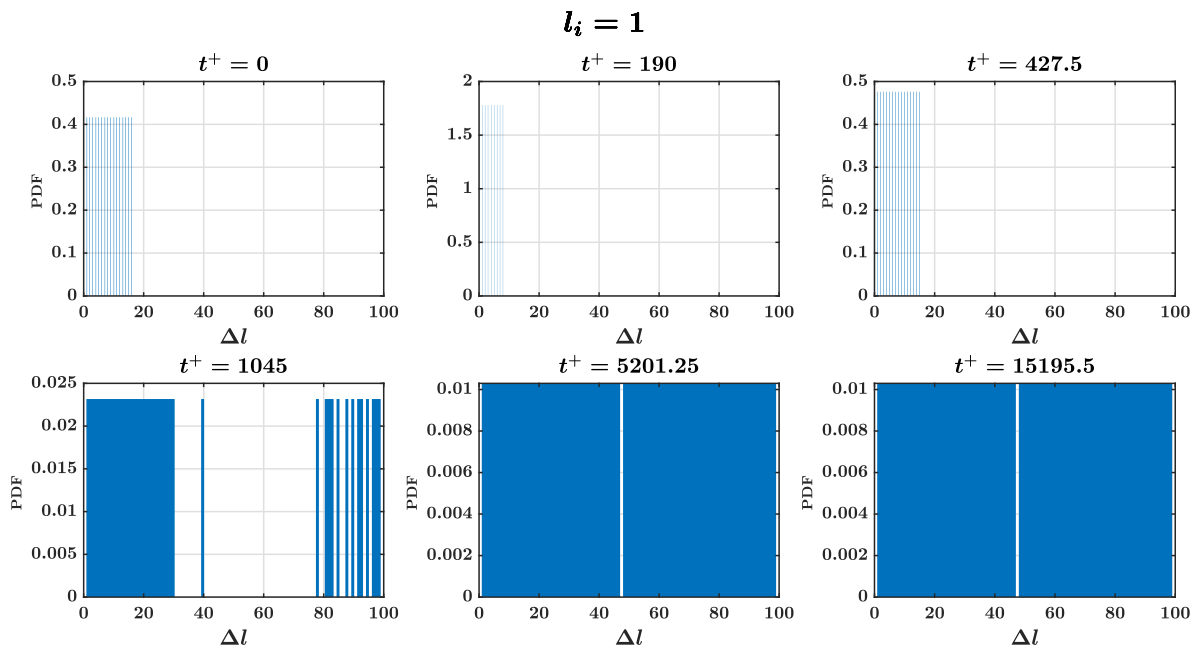


Figura 5.8. PDF del livello 1, per i 6 tempi caratteristici

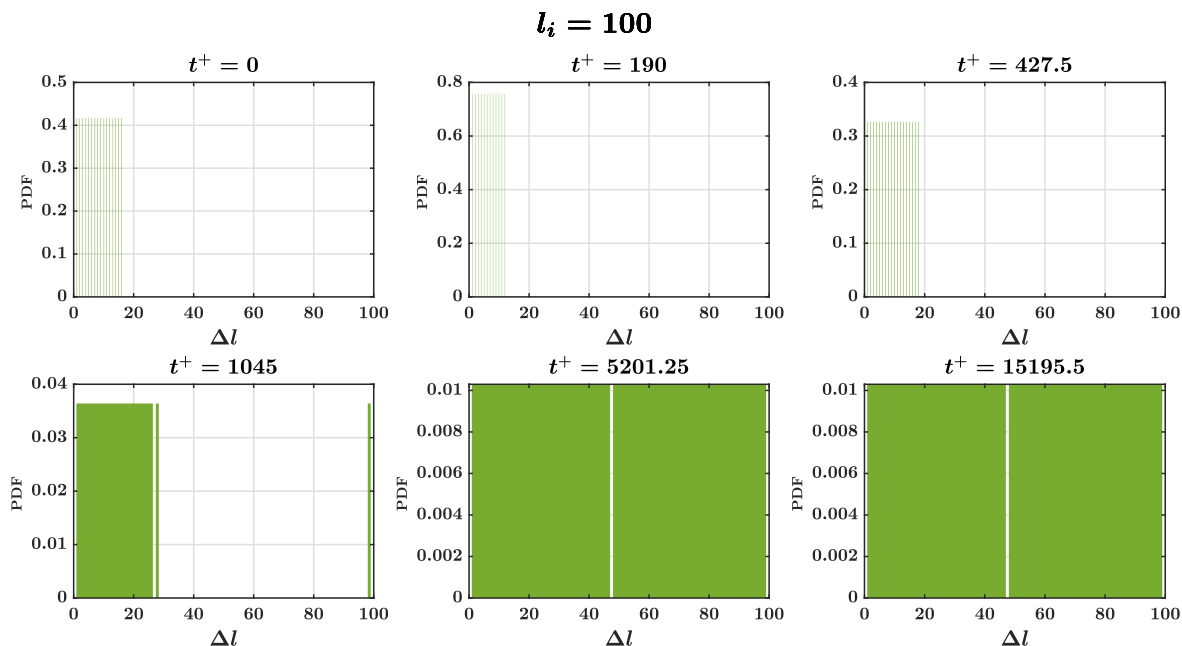


Figura 5.9. PDF del livello 100, per i 6 tempi caratteristici

Notiamo in Figura 5.8 e Figura 5.9 che per i livelli 1 e 100 (quelli più vicini a parete) la probabilità nei primi istanti temporali si stringe e si sposta verso  $\Delta l = 1$ , ovvero i due livelli hanno ancor meno legami rispetto alla situazione iniziale, e poi già dal quarto istante temporale si stabilizza a  $\Delta l = 50$ , con bande tutte della stessa altezza, ovvero sono in pratica legati con quasi tutti gli altri livelli. Questo si può spiegare col fatto che questi livelli sono i primi a sperimentare la turbolenza vicino a parete (invece quelli centrali ne risentono molto poco, sempre per l'avvezione), e all'inizio si spostano verso una zona meno densa di particelle; successivamente però il mixing è completamente sviluppato e statisticamente riescono a legarsi con tutti gli altri livelli.

Ciò che incuriosisce di più è la "coda" che soprattutto il primo livello mostra per  $\Delta l$  alti: ciò significa che esso si lega al livello 100 e i suoi vicini ancor prima che coi livelli centrali vicino a 50, poichè i livelli 1 e 100, risentendo del wall-mixing, migrano verso una zona "vuota" di particelle e lì si uniscono, mentre il livello 50 si è spostato più a valle possedendo esso la più alta velocità media fra i vari livelli. In termini di matrice dei pesi, si traduce tale fenomeno "nell'attivazione" dell'entrata  $W_{1,100}$  ancor prima dell'entrata  $W_{1,50}$ , come spiegato nell'articolo<sup>[10]</sup>.



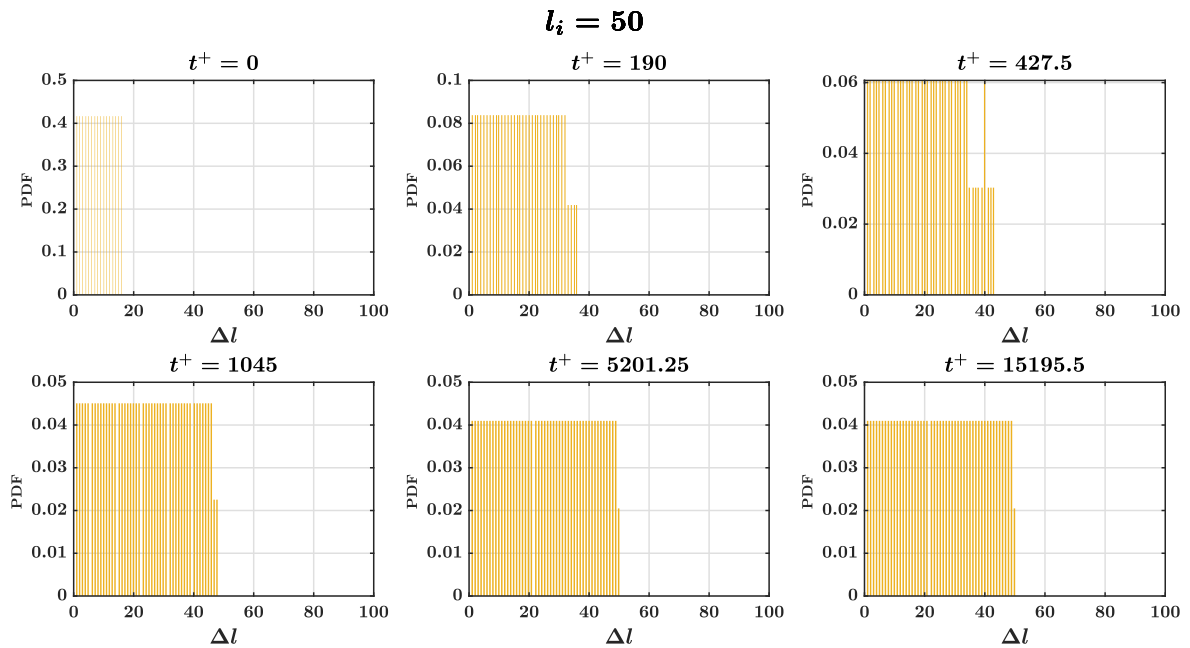


Figura 5.10. PDF del livello 50, per i 6 tempi caratteristici

Per il livello 50 (Figura 5.10) infatti le probabilità si spostano direttamente verso  $\Delta l$  crescenti e si allargano. La situazione stabile è a  $\Delta l = 25$ , la metà, ma con una varianza un po' più piccola rispetto ai primi livelli 1 e 100, poiché tale livello risente meno della turbolenza e più dell'avvezione. Statisticamente non cambia già dal quarto istante temporale  $t^+ = 1045$ , volendo dire che già si è legato con livelli lontani (5...10 e 95...100). Ciò è coerente per esempio con la closeness centrality dei livelli intermedi: essi fungono da "ponte" per qualsiasi shortest path che possa collegare due particelle.

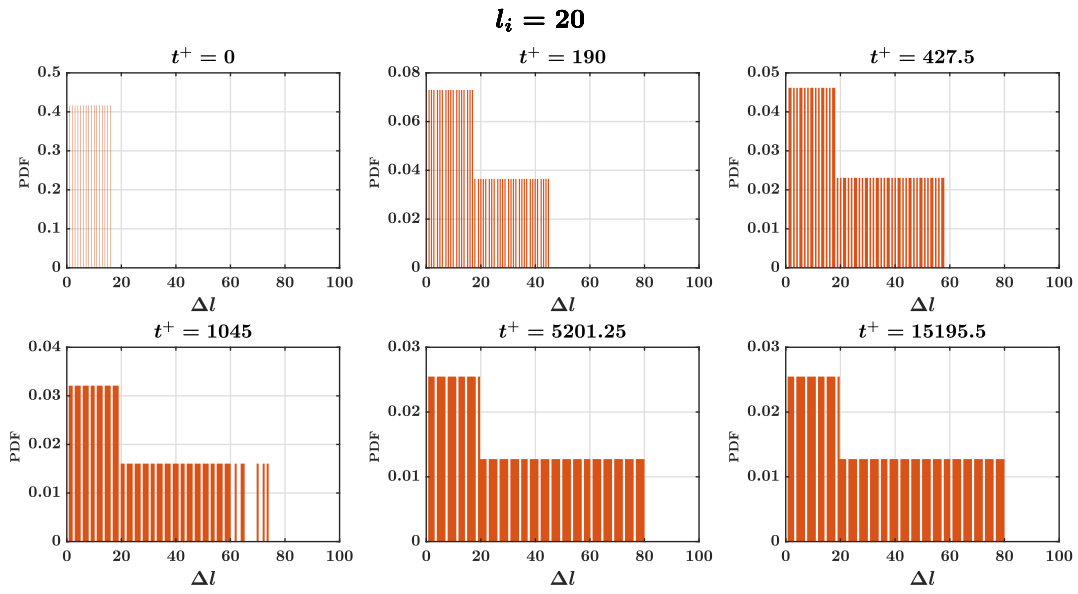


Figura 5.11. PDF del livello 20, per i 6 tempi caratteristici

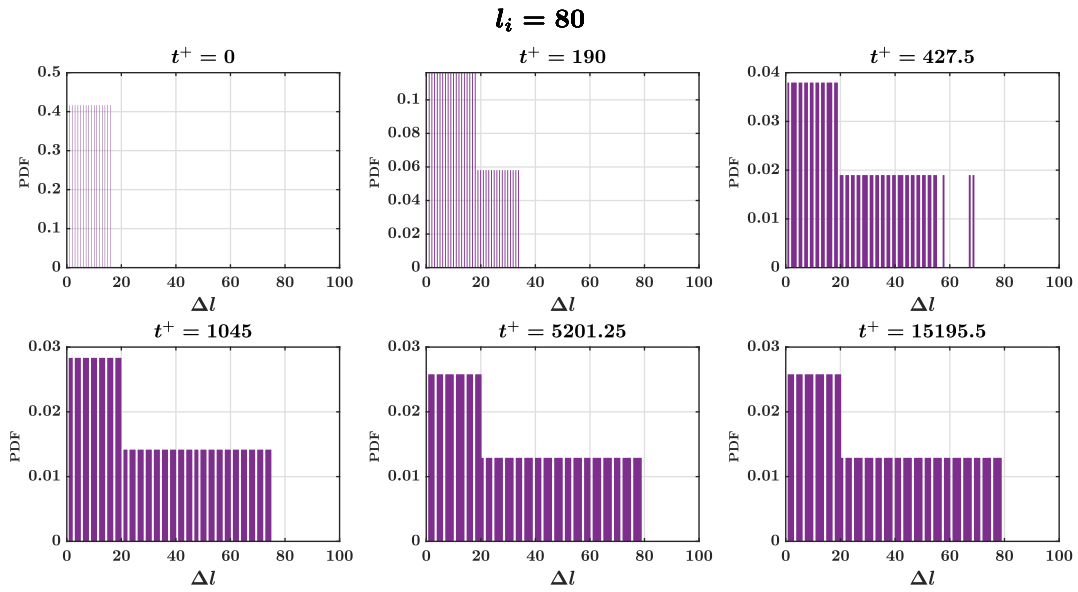


Figura 5.12. PDF del livello 80, per i 6 tempi caratteristici

Una situazione intermedia si sperimenta per i livelli 20 e 80 in Figura 5.11 e 5.12, che risentono in misura comparabile sia dell'avvezione che del mixing. I collegamenti con livelli sempre più distanti nascono progressivamente per tempi crescenti, fino a stabilizzarsi al quinto istante temporale  $t^+ = 5201.25$ . Non si nota però il comportamento dei primi due livelli a parete citati, poiché i livelli 20 e 80 cominciano fin da subito a legarsi ad altri nodi, dunque non la probabilità non si stringe. Notiamo inoltre che non è possibile definire un andamento simmetrico rispetto ad un valor medio, neanche per tempi lunghi, dove invece lo era per gli altri livelli. Questo ovviamente perchè tali livelli non sono in posizioni tali da permettere la simmetria, infatti tra loro e la parete vicina ci sono meno livelli che tra loro e la parete più lontana.

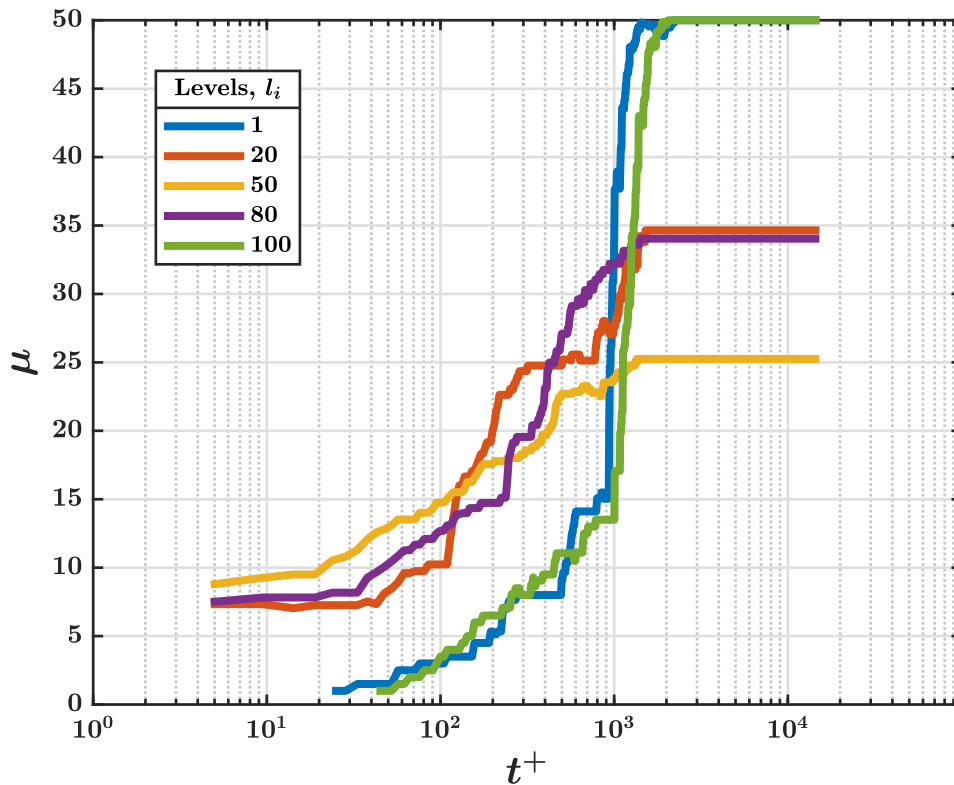


Figura 5.13. Valore medio dei  $\Delta l$  di ciascun nodo caratteristico, per tutti i tempi

Studiamo adesso l'andamento di  $\Delta l = l_i - l_j$  per tutti i tempi di simulazione e non solo i 6 caratteristici; in particolare calcoliamo per ciascun istante *media* e *deviazione standard* dell'insieme di dati, secondo la definizione classica.

In Figura 5.13 è riportata la media; notiamo che per i livelli centrali 20, 80 e 50 essa ha una crescita progressiva e si stabilizza a  $t^+ \approx 1000$ , coerentemente con le rispettive PDF; invece per i livelli a parete, si nota una brusca crescita per lo stesso istante temporale, istante in cui il mixing turbolento muove tali livelli dalla parete verso il centro permettendo di stabilire nuovi collegamenti con livelli distanti, da cui l'aumento improvviso.

I valori medi asintotici  $\mu = 50$  per  $l_1$  e  $l_{100}$  e  $\mu = 25$  per  $l_{50}$  erano prevedibili; è più curioso invece il valore  $\mu = 35$  per  $l_{20}$  e  $l_{80}$ , dovuto all'asimmetria già discussa in merito alle PDF di tali livelli.

Riportiamo adesso il grafico della deviazione standard in Figura 5.14:

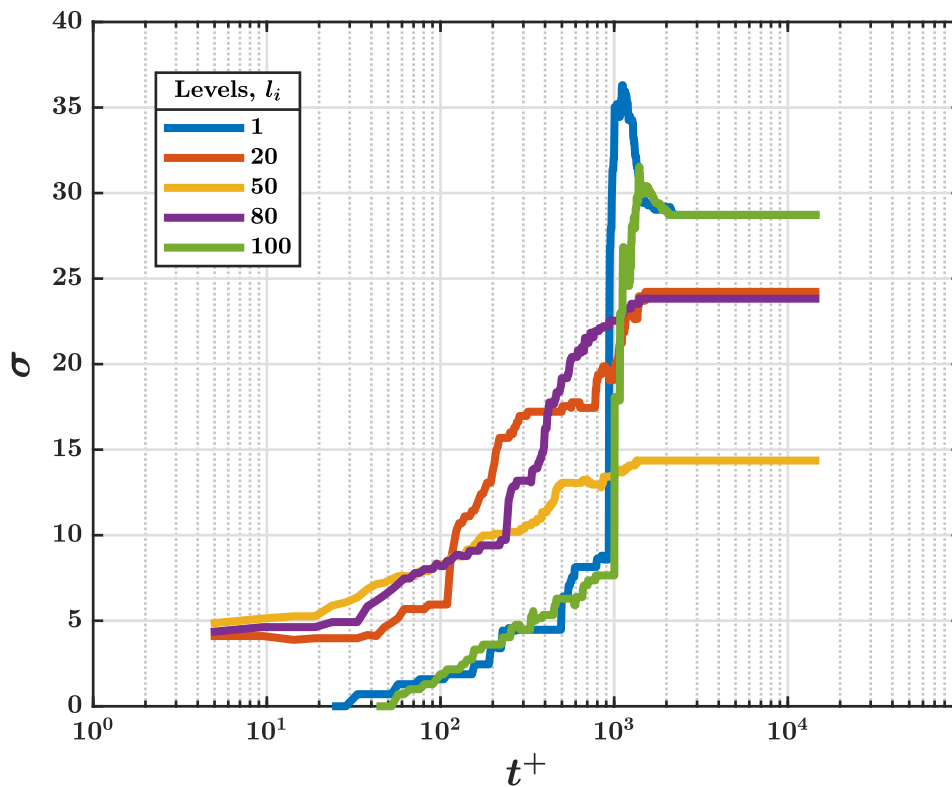


Figura 5.14. Deviazione standard dei  $\Delta l$  per ciascun nodo caratteristico, per tutti i tempi

La varianza  $\sigma$  più piccola è raggiunta dal livello centrale e la maggiore dai livelli a parete. Infatti, man mano che ci si avvicina al centro, l'aumento della deviazione standard è sempre più modesto, di cui il caso estremo è il livello centrale. Questo si può pure spiegare ricordando che le particelle centrali hanno la maggiore velocità possibile, seppur poco più alta delle loro vicine, e dunque esse si trovano più a valle delle altre e di conseguenza meno legate.

Si nota che i livelli più vicini a parete subiscono prima un piccolo "isolamento" (la  $\sigma$  è più bassa che per gli altri livelli centrali), e poi di nuovo la brusca crescita come accade per la media, però qui vi è una differenza:  $l_1$  all'inizio raggiunge un valore decisamente più alto rispetto al valore asintotico  $\sigma \approx 29$ , e ciò corrisponde alla "coda" della PDF al tempo  $t^+ \approx 1045$ , ovvero il momento in cui  $l_1$  si collega con il suo speculare  $l_{100}$  e i suoi vicini ancor prima che con  $l_{50}$  e prima che il centesimo livello si colleghi con i livelli vicini al primo (da cui l'asimmetria fra i due livelli a parete).

Dallo studio di media e deviazione capiamo dunque che la turbolenza assume un'importanza relativa comparabile a quella dell'avvezione a partire da  $t^+ \approx 1000$  circa, e che essa agisce soprattutto per i livelli vicini a parete che migrano nelle zone più povere di particelle; l'efficienza del mixing cresce nel tempo.

## 5.4 Risultati normalizzati

Un diverso punto di vista possiamo ottenerlo se normalizziamo i delta livelli, in questo modo:

$$\Delta l' = \frac{\Delta l}{\Delta l_{max}}$$

dove  $\Delta l_{max}$  è il massimo intervallo di collegamento che ogni livello può avere, per esempio 99 per  $l_1$ , 75 per  $l_{25}$  ecc..

Nelle Figure 5.15, 5.16, ..., 5.19 sono riportati gli andamenti delle PDF normalizzate:

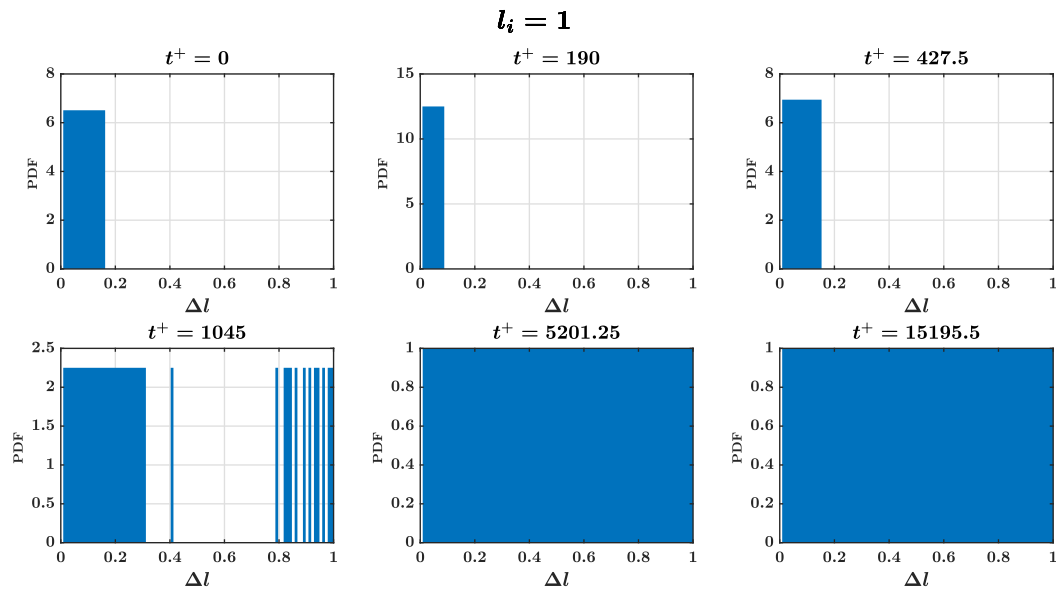


Figura 5.15. PDF normalizzata del livello 1, per i 6 tempi caratteristici

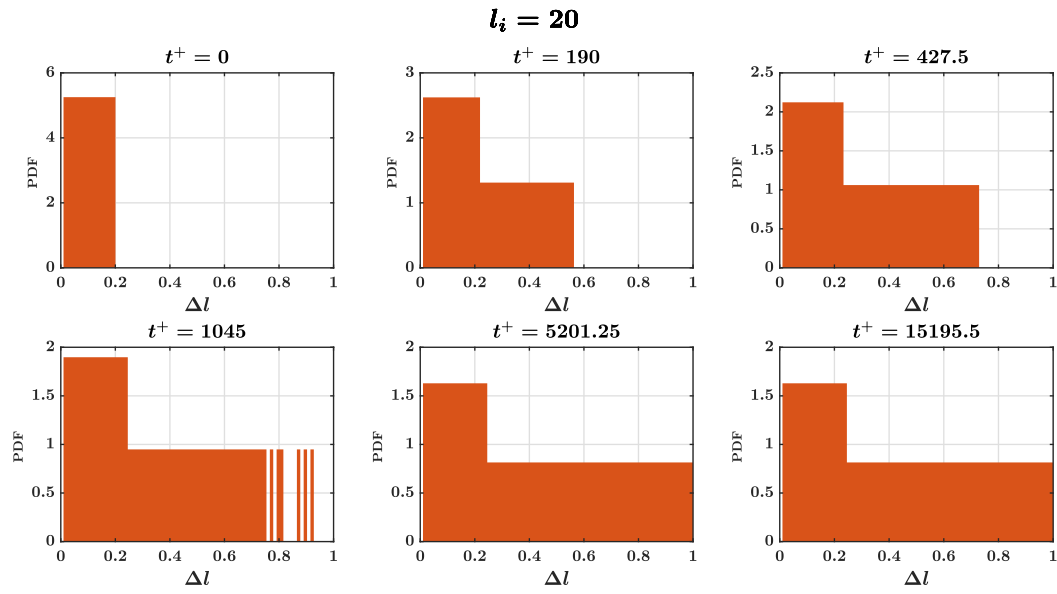


Figura 5.16. PDF normalizzata del livello 20, per i 6 tempi caratteristici

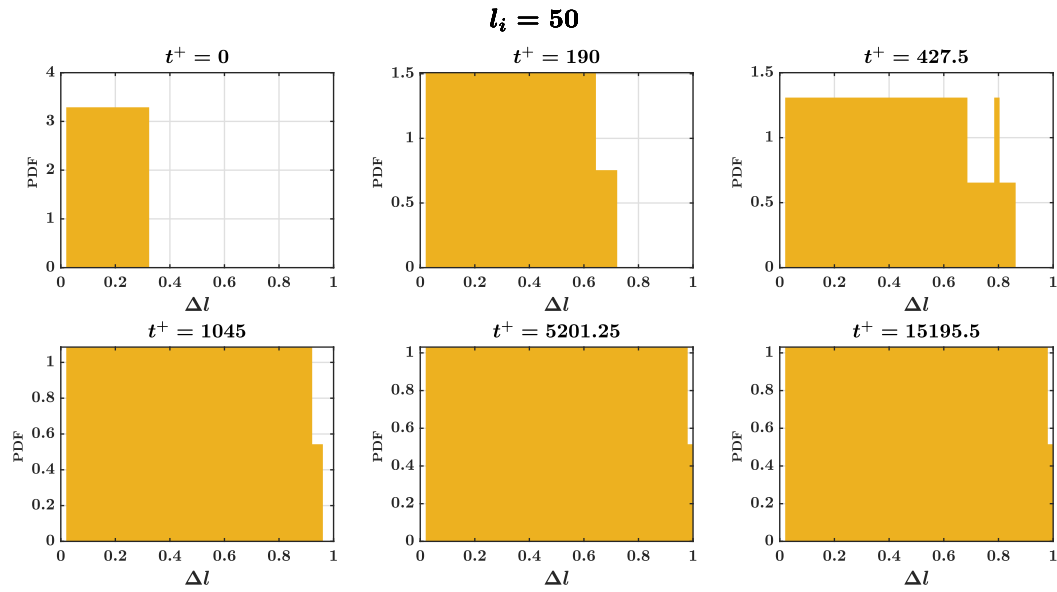


Figura 5.17. PDF normalizzata del livello 50, per i 6 tempi caratteristici

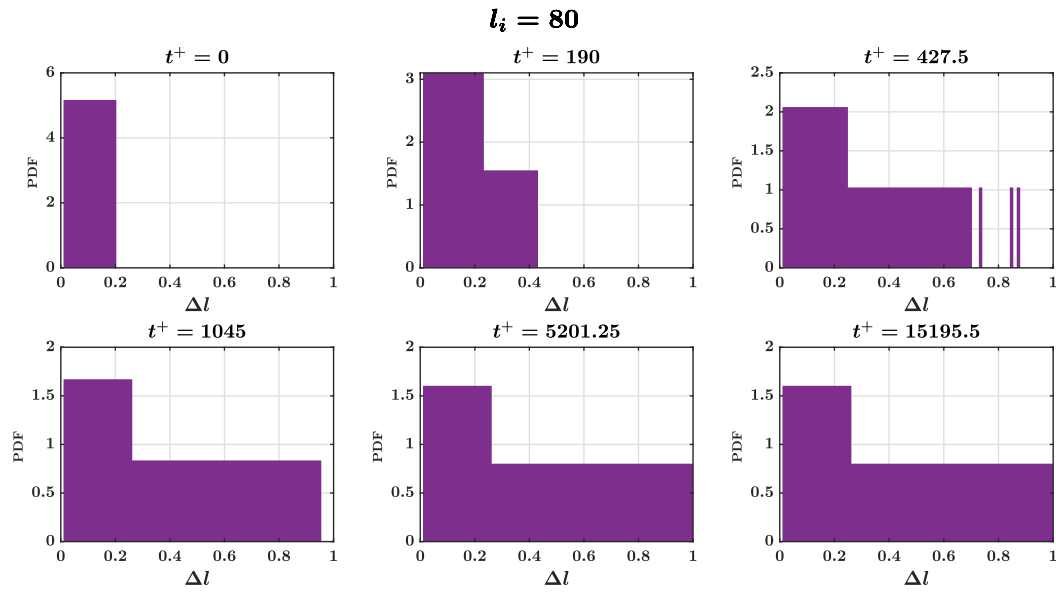


Figura 5.18. PDF normalizzata del livello 80, per i 6 tempi caratteristici

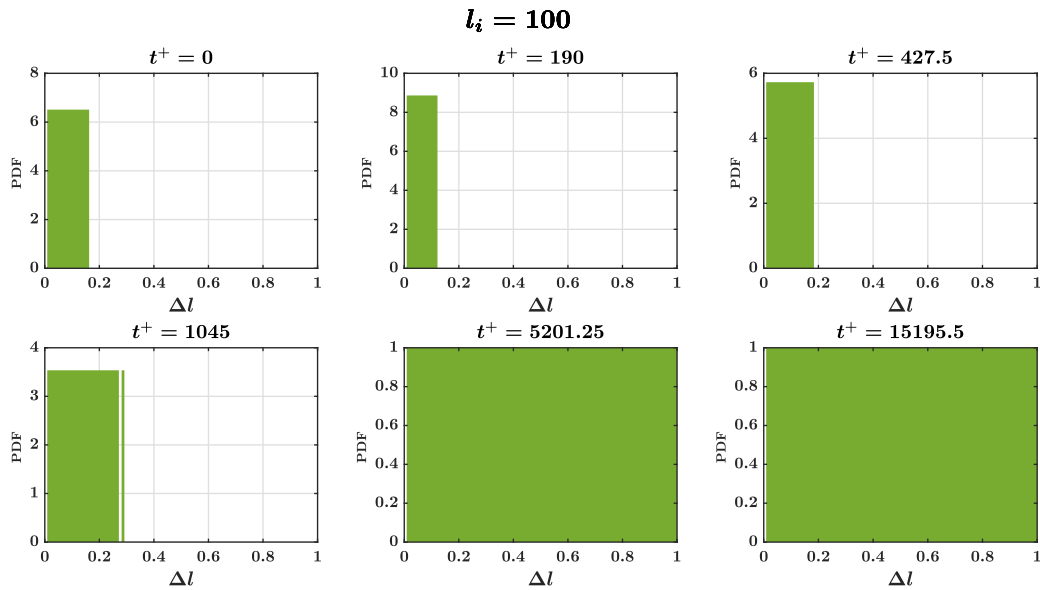


Figura 5.19. PDF normalizzata del livello 100, per i 6 tempi caratteristici

Si nota la coda del primo livello, che non appare nel centesimo; la distribuzione è asimmetrica nei livelli 20 e 80 volendo dire che si trovano in una posizione non



perfettamente adatta a mescolarsi con tutte le altre particelle, preferendo quelle più vicine; la situazione si stabilizza a partire da  $t^+ \approx 1000$  per tutti i livelli tranne quelli a parete, che ancora stanno subendo gli effetti del mixing turbolento. Infatti tale tempo corrisponde al punto in cui il numero totale di connessioni pesate  $E(t^+)$ , definito come:

$$E \equiv \sum_i \sum_j \frac{W_{i,j}}{2}$$

ha una veloce decrescita dovuta al forte incremento del mixing turbolento (vedi articolo<sup>[10]</sup>), per poi stabilizzarsi per  $t^+ \approx 5200$ ; questa decrescita è dovuta alla nascita di deboli collegamenti tra i livelli più lontani fra loro, per esempio quelli a parete.

In Figura 5.20 è riportata la media dei delta livelli normalizzati:

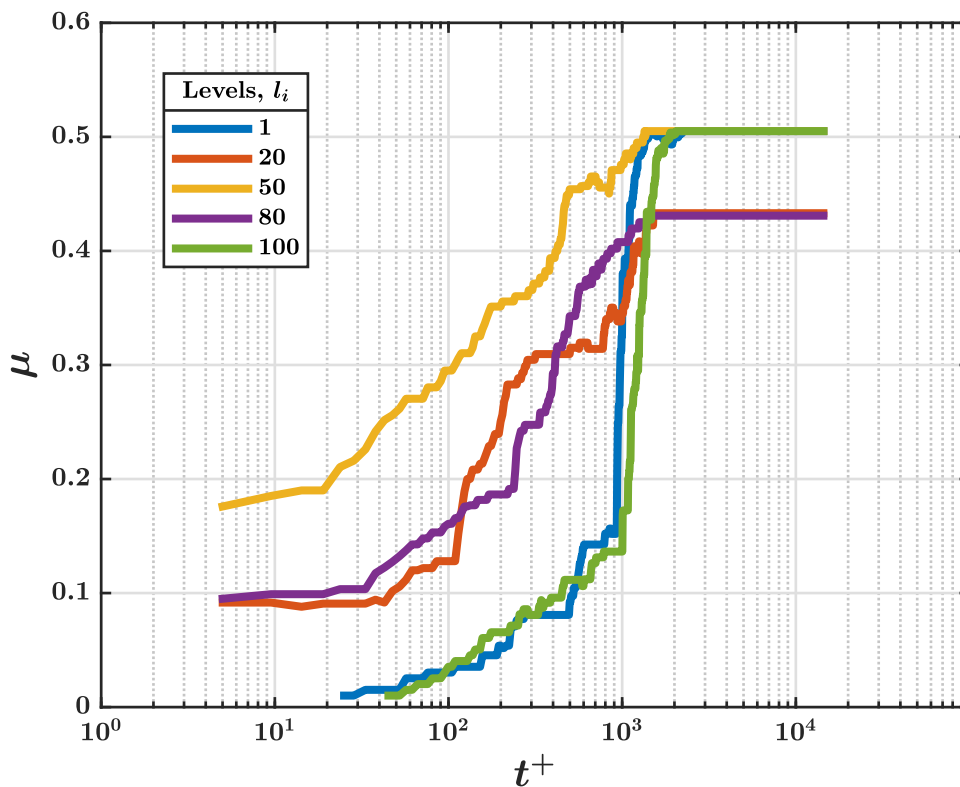


Figura 5.20. Valori medi normalizzati rispetto a  $\Delta l_{max}$

Ci aspettavamo un valore di  $\mu = 0.5$  per tutti i livelli, e ciò si ha per i livelli 1, 50 e 100, mentre gli altri raggiungono un valore poco più basso.

Il grafico rimanda ovviamente a quello non normalizzato, tuttavia è più uniforme tra i vari livelli.

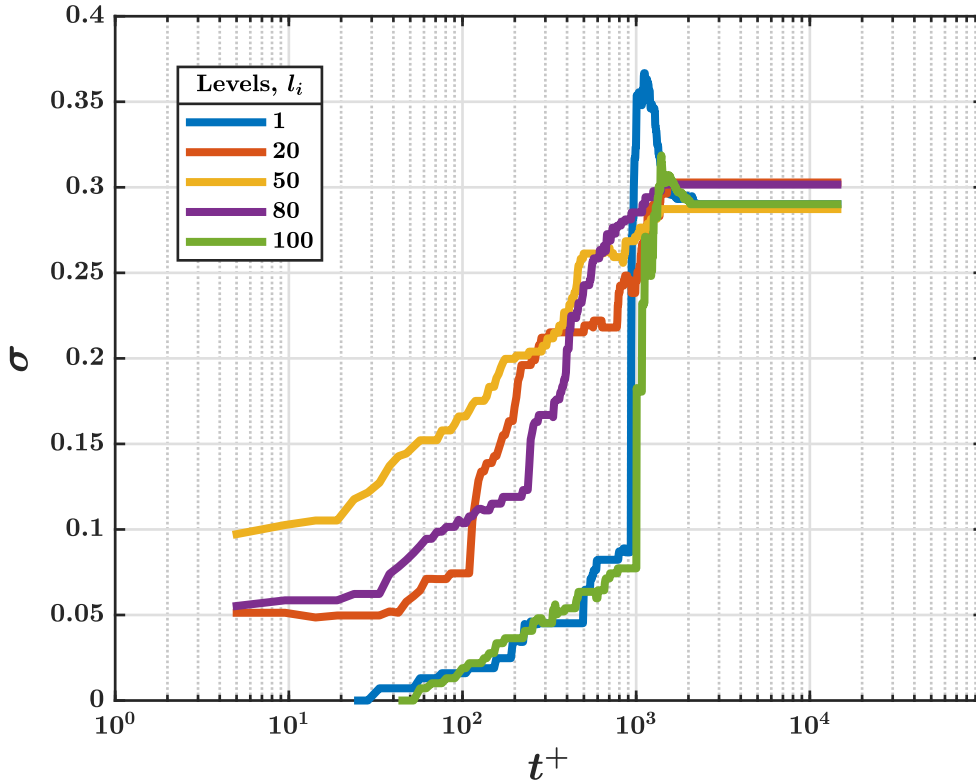


Figura 5.21. Deviazione standard normalizzata rispetto a  $\Delta l_{max}$

Se normalizziamo la deviazione standard (Figura 5.21), le differenze tra i vari livelli svaniscono: tendono tutti al valore asintotico  $\sigma \approx 0.3$ ; da ciò si nota che il valore asintotico di  $\sigma$  per i livelli 1, 50 e 100 (ovvero quelli che hanno una PDF uniforme per  $t^+$  lunghi) vale esattamente il valore ottenuto da una distribuzione uniforme tra 0 e 1. Questo è indice del fatto che in realtà la turbolenza e il suo mixing agiscono a lungo andare allo stesso modo in tutto il flusso, cioè per tutta l'altezza del canale, e le differenze nei dati precedenti sono dovute semplicemente alle diverse posizioni iniziali  $y^+$ ; cioè non dipende da questo livello o da quell'altro che consideriamo. Soltanto nei tempi  $t^+ < 1000$  le differenze in quanto a crescita di  $\sigma$  (e dunque efficienza del mixing) sono evidenti, poi si annullano perchè il flusso ha raggiunto il *Taylor dispersion regime*, in cui la distribuzione delle particelle nella direzione lungo il flusso è Gaussiana<sup>[10]</sup>.

## 6. Conclusioni

Con lo strumento delle reti complesse siamo in grado di studiare la dinamica del flusso con un approccio di tipo Lagrangiano, focalizzandoci su un set di particelle in movimento. La rete pesata variabile nel tempo è in grado di mostrarci, tramite l'evoluzione temporale della matrice dei pesi, la sequenza non banale di connessioni fra (gruppi di) particelle, connessioni attivate dal moto turbolento. Così siamo in grado di distinguere i regimi caratteristici della dinamica delle particelle, identificare l'accadimento di eventi peculiari (per esempio la connessione tra due nodi inizialmente distanti) e l'intensità del mixing turbolento normale a parete (quantificata dal numero totale di collegamenti). In particolare: grazie allo studio delle metriche di centralità siamo in grado di valutare l'efficienza del mixing turbolento nel tempo, per cui le particelle per tempi lunghi si disperdono e occupano un volume più grande e di conseguenza meno denso (la Strength e l'Eigenvector decrescono, mentre la Closeness cresce); con le PDF e i valori di media e deviazione standard invece riusciamo a valutare per quali tempi la turbolenza comincia ad avere un effetto comparabile a quello dell'avvezione (da  $t^+ \approx 1000$ ) e la dipendenza dell'effetto della turbolenza dalla posizione  $y^+$  rispetto alla parete; normalizzando i risultati, tali differenze dovute alla posizione  $y^+$  svaniscono per tempi lunghi, suggerendo che la turbolenza agisce uniformemente in tutto il flusso quando si raggiunge il regime indicato come *Taylor dispersion regime*.

In base a tutto ciò, lo studio del mixing turbolento può essere facilmente sviluppato e portato a livelli ulteriori grazie all'uso di questo approccio Lagrangiano con le reti complesse, per poi ottenere riscontri anche nello studio delle applicazioni ingegneristiche in cui la turbolenza gioca un ruolo importante.

# Bibliografia

- [1] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M. (2013). The Feynman Lectures on Physics, Desktop Edition Volume I (Vol. 1). Basic books.
- [2] *Wikipedia*, [https://it.wikipedia.org/wiki/Regime\\_turbolento](https://it.wikipedia.org/wiki/Regime_turbolento) (17/06/2019)
- [3] Pope, S. B. (2000) Turbulent Flows. Cambridge: Cambridge UP. Print.
- [4] Toschi, F., Bodenschatz, E. (2009), Lagrangian Properties of Particles in Turbulence, *The Annual Review of Fluid Mechanics*
- [5] Taylor GI. 1921. Diffusion by continuous movements. Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2 20:196–211
- [6] P.K.Yeung, Lagrangian Investigation of Turbulence, Annu. Rev. Fluid Mech. 2002. 34:115–42
- [7] Moser, Kim, Mansour, *Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau = 590$* , Physics of Fluids (1999)
- [8] *Wikipedia*, [https://it.wikipedia.org/wiki/Problema\\_dei\\_ponti\\_di\\_Königsberg](https://it.wikipedia.org/wiki/Problema_dei_ponti_di_Königsberg) (17/06/2019)
- [9] Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., Hwang, D. U. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. Physics reports, 424(4), 175-308.
- [10] Iacobello, G., Scarsoglio S., Kuerten, J.G.M., Ridolfi, L., Lagrangian network analysis of turbulent mixing
- [11] M. E. J. Newman, "The mathematics of networks". Retrieved 2006-11-09.
- [12] <https://www.slideshare.net/vtraag/introduction-to-complex-networks> (06/07/2019)