

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea

Simulazione di campo di moto fluido attorno  
ad ala bio-ispirata con bordo d'attacco  
sinusoidale mediante codice di calcolo  
OpenFOAM



**Relatori**

prof. Renzo Arina  
prof.ssa Stefania Scarsoglio

**Candidato**

Orazio Pinti

OTTOBRE 2015

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
1.1	Richiami di aerodinamica . . . . .	5
1.2	Scopo della tesi . . . . .	8
1.3	Leggi di conservazione nei fluidi . . . . .	10
1.3.1	Accelerazione di una particella fluida . . . . .	10
1.3.2	Tensore degli sforzi di taglio . . . . .	13
1.3.3	Legge di conservazione della massa . . . . .	15
1.3.4	Legge di conservazione della quantità di moto . . . . .	16
1.3.5	Legge di conservazione dell'energia . . . . .	17
1.3.6	Equazioni di Navier-Stokes . . . . .	19
1.4	Flussi turbolenti . . . . .	20
1.4.1	<i>R.A.N.S.</i> . . . . .	21
1.4.2	Modelli di turbolenza . . . . .	22
1.5	Computational Fluid Dynamics . . . . .	23
1.5.1	Processo di analisi CFD . . . . .	24
1.5.2	OpenFOAM . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Simulazioni</b>	<b>28</b>
2.1	Formulazione del problema . . . . .	28
2.2	Generazione della mesh . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Risultati</b>	<b>36</b>
3.1	Simulazioni a bassa incidenza . . . . .	36
3.2	Simulazioni ad alta incidenza . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Distribuzioni di vorticità e interpretazione del fenomeno</b>	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>45</b>

## List of Figures

1	Profilo di ala NACA 4418 . . . . .	5
2	L'immagine mostra l'andamento dei coefficienti di portanza $C_L$ a sinistra e resistenza $C_D$ a destra, in funzione degli angoli d'attacco 7	
3	Ala retta con profilo simmetrico NACA 0021 . . . . .	8
4	Figura a scopo illustrativo della tipologia di ala studiata, dove i parametri della sinusoide non sono quelli usati per la simulazione	8
5	Esempio di tipica cartella di un caso di un problema eseguibile da OpenFOAM . . . . .	27
6	Vista della mesh 2D attorno ad un generico profilo dell'ala retta	29
7	Vista delle dimensioni totali del dominio di calcolo dell'ala retta	30
8	Mesh dello strato limite in corrispondenza del bordo d'attacco dell'ala retta . . . . .	30
9	Mesh dello strato limite in corrispondenza del bordo di fuga dell'ala retta . . . . .	31
10	Vista della zona più fitta vicino al profilo dell'ala retta . . . . .	31
11	Vista delle dimensioni totali del dominio di calcolo dell'ala wavy	32
12	Vista della zona più fitta vicino al profilo dell'ala wavy . . . . .	33
13	Dimensioni del dominio con la forma simmetrica dell'ala wavy in vista . . . . .	33
14	Dimensioni della porzione di ala wavy usata per la simulazione .	34
15	Mesh dello strato limite in corrispondenza del bordo d'attacco dell'ala wavy . . . . .	34
16	Mesh dello strato limite in corrispondenza del bordo di fuga dell'ala wavy . . . . .	35
17	Campo di velocità attorno all'ala retta, sopra e all'ala wavy, sotto, ad incidenza media di $3^\circ$ . . . . .	36
18	Campo di pressioni attorno all'ala retta, sopra, e all'ala wavy, sotto, ad incidenza media di $3^\circ$ . . . . .	37
19	Campo di velocità attorno all'ala retta, sopra, e all'ala wavy, sotto, ad incidenza media di $9^\circ$ . . . . .	38
20	Campo di pressioni attorno all'ala retta, sopra, e all'ala wavy, sotto, ad incidenza media di $9^\circ$ . . . . .	39

21	Campo di velocità attorno al profilo sul picco della sinusoide ad incidenza geometrica maggiore, sopra, e sul ventre ad incidenza geometrica minore, sotto, dell'ala wavy . . . . .	40
22	Andamento della pressione sulla parete dell'ala wavy . . . . .	41
23	Distribuzione della componente della vorticità lungo la direzione della corda sul dorso del profilo dell'ala wavy . . . . .	42
24	Andamento dell'incidenza e della circuitazione passando da un massimo ad un minimo della sinusoide del bordo d'attacco . . . .	43
25	Esempio di filetto vorticoso entrante e convenzionalmente negativo per come è orientato l'asse $x$ che appare passando da un massimo ad un minimo della sinusoide del bordo d'attacco . . . .	44

## List of Tables

1	Risultati delle simulazioni a incidenza media di $3^\circ$ . . . . .	37
2	Risultati delle simulazioni a incidenza media di $9^\circ$ . . . . .	39

## Ringraziamenti

Il duro lavoro e l'impegno necessario a portare a conclusione un lavoro di tesi sono enormemente ripagati dalla soddisfazione nel vedere un obiettivo, che sembrava tanto lontano, raggiunto.

Ma il merito di questo raggiungimento non è solo mio; devo tutto quello che ho ai miei genitori, che con il costante peso del loro duro lavoro mi permettono di vivere lontano da tutte le preoccupazioni con le quali loro combattono ogni giorno. Non riuscirò mai a ringraziarli abbastanza per questo.

Un ringraziamento speciale va anche alla mia ragazza Valeriana, sempre vicina e pronta ad aiutarmi e spronarmi, al mio caro amico Andrea, con il quale ho condiviso gran parte di questo percorso, e al mio nuovo amico Luigi, senza il quale sarebbe stato tutto molto più difficile...

# 1 Introduzione

## 1.1 Richiami di aerodinamica

Ci si può chiedere quale debba essere la forma di un corpo, per esempio a pari superficie della sezione e quindi a parità di peso, perchè sia minima la sua resistenza all'avanzamento in un fluido. Perchè questo accada la separazione deve avvenire il più tardi possibile, nelle vicinanze della fine del corpo, così che la scia turbolenta sia la più stretta possibile.

La separazione è facilitata da una rapida crescita della pressione lungo il corpo nella direzione del flusso: il corpo deve quindi avere una forma tale che, dove la pressione cresce, la variazione avvenga nel modo più lento e continuo possibile. Questo si può ottenere dando al corpo una forma allungata nella direzione del flusso, che si assottigli in modo continuo così che i flussi lungo i due lati del corpo confluiscono regolarmente senza passare attorno ad angoli o cambiare considerevolmente direzione rispetto alla corrente principale.

All'estremità anteriore il corpo deve essere arrotondato; se ci fosse un'angolo nella sezione la velocità del fluido al vertice tenderebbe a valori infiniti, la pressione salirebbe rapidamente a valle e la separazione si produrrebbe inevitabilmente [Landau1953].

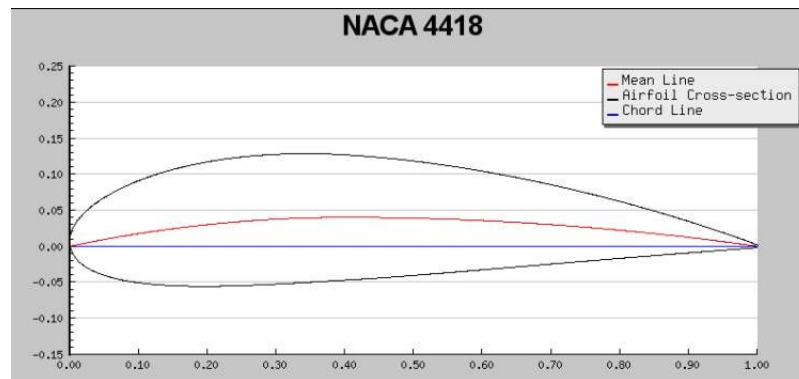


Figure 1: Profilo di ala NACA 4418

Tutte queste caratteristiche sono ben soddisfatte dalla forma mostrata in figura, che rappresenta un profilo NACA 4418, ovvero un generico profilo di un corpo chiamato *ala*.

Nel flusso attorno a corpi del genere la separazione avviene solo nelle vicinanze

del bordo di fuga appuntito e di conseguenza la resistenza è relativamente piccola.

Nella resistenza di corpi come questo, detti *aerodinamici*, l'effetto dell'attrito diretto del fluido dello strato limite sulla superficie del corpo gioca un ruolo molto importante, mentre resta trascurabile in corpi non aerodinamici

Una delle caratteristiche di questi corpi è che la forza scambiata con il fluido ha un'elevata capacità di sostentazione, oltre che di limitata opposizione al moto relativo, ovvero la componente perpendicolare al flusso della forza aerodinamica totale scambiata è decisamente più grande di quella parallela.

La componente perpendicolare al flusso della forza viene chiamata *portanza* o *Lift*, mentre quella parallela *resistenza* o *Drag*. La portanza è la componente capace di sorreggere un corpo in moto mentre la resistenza si oppone al moto stesso.

Il corpo può essere posto a vari angoli rispetto alla corrente, ma per mantenere le caratteristiche discusse finora questi angoli devono essere piccoli. Al crescere di questi angoli, chiamati angoli d'attacco o d'incidenza, cresce anche l'intensità della forza che il fluido scambia con il corpo. Per una certa incidenza la portanza può essere massima e la resistenza contenuta: viene naturale introdurre una grandezza chiamata *efficienza aerodinamica*, definita appunto come:

$$E = \frac{L}{D}$$

Possiamo pensare all'efficienza come una misura dell'aerodinamicità del corpo a condizioni definite, ovvero a quanta portanza riesce a creare in relazione alla conseguente resistenza.

Da analisi sia sperimentali che dimensionali vediamo che le forze aerodinamiche dipendono dalle condizioni di lavoro in questo modo:

$$F_a = costante \times \rho V^2 S$$

Dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $V$  è la velocità della corrente indisturbata e  $S$  è una superficie significativa del corpo lambito dal flusso.

Anche le componenti avranno la stessa dipendenza dai suddetti parametri, e inglobando le relazioni trigonometriche che intercorrono tra  $F_a$ ,  $L$  e  $D$  nella costante possiamo scrivere  $L = costante \times \rho V^2 S$  e  $D = costante \times \rho V^2 S$ .

Chiamando le costanti della portanza e della resistenza  $\frac{1}{2}C_L$  e  $\frac{1}{2}C_D$  arriviamo a scrivere

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 C_L S$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 C_D S$$

$C_L$  e  $C_D$  sono chiamati coefficienti di portanza e di resistenza, e sono funzione tra l'altro dell'angolo d'attacco  $\alpha$ . Per piccoli angoli,  $C_L$  è una funzione praticamente lineare di  $\alpha$  mentre  $C_D$  è una funzione circa quadratica di  $C_L$  e quindi di  $\alpha$ .

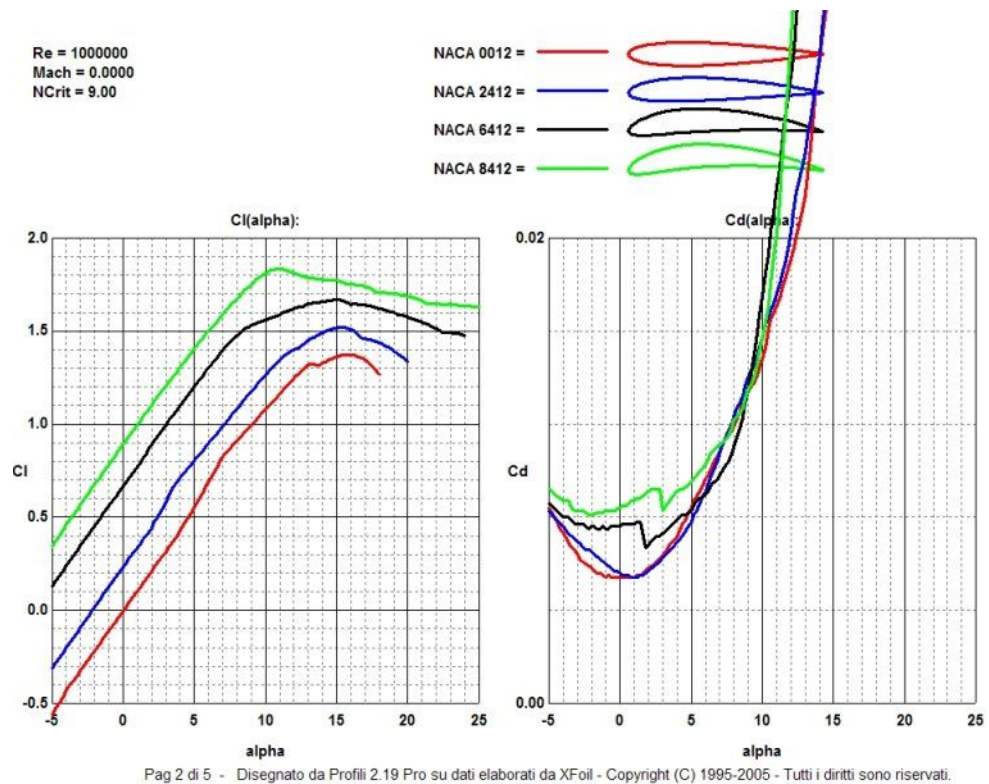


Figure 2: L'immagine mostra l'andamento dei coefficienti di portanza  $C_L$  a sinistra e resistenza  $C_D$  a destra, in funzione degli angoli d'attacco

Notiamo che per angoli compresi tra i  $10^\circ$  e i  $15^\circ$  il  $C_L$  non è più lineare e va incontro ad un brusco calo; questo indica che l'angolo di attacco ha superato il limite per cui il fluido riesce a rimanere attaccato al corpo, distaccandosi e creando una scia molto più ampia, facendo diminuire la portanza.



## 1.2 Scopo della tesi

L'obiettivo di questa tesi sarà lo studio di *ali bio-ispirate* alle pinne dorsali di alcuni cetacei come le megattere, ovvero la generazione di una mesh, che riproduca il più fedelmente possibile la pinna, e la simulazione mediante il codice di calcolo OpenFoam della suddetta, confrontando poi i risultati con la simulazione di un'ala analoga per dimensioni, ma rettangolare in pianta (figura 3).

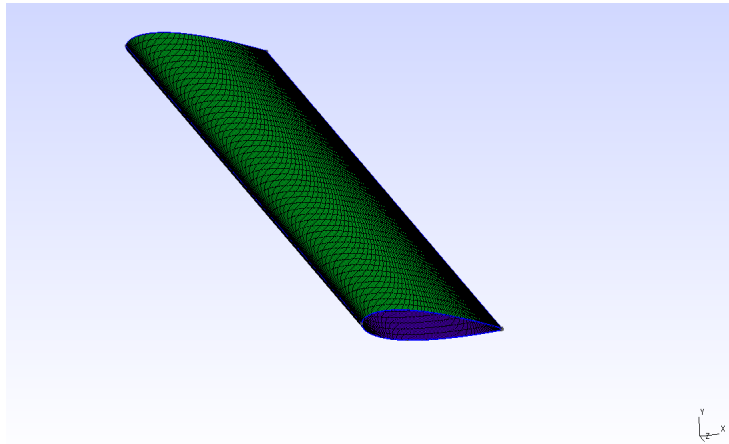


Figure 3: Ala retta con profilo simmetrico NACA 0021

La particolarità dell'ala studiata è quella di avere un bordo d'attacco sinusoidale lungo il piano perpendicolare alle corde, facendo lavorare i vari profili ad incidenze in generale diverse (figura 4). D'ora in poi chiameremo tale ala, *ala wavy*.

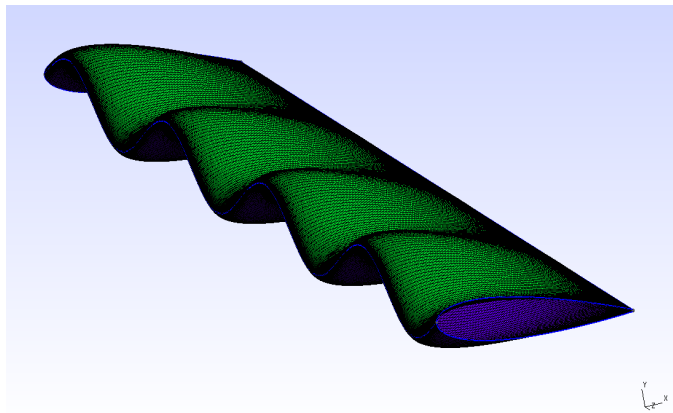


Figure 4: Figura a scopo illustrativo della tipologia di ala studiata, dove i parametri della sinusoide non sono quelli usati per la simulazione

Verranno effettuate simulazioni delle due ali in un flusso a due incidenze medie, una bassa e una alta prossima allo stallo. Notiamo che l'incidenza geometrica locale dei profili vicini al picco della sinusodie è sensibilmente più alta rispetto a quella media, quindi il pericolo di stallo si ha per angoli medi relativamente piccoli.

In particolare siamo interessati al calcolo dei coefficienti delle forze aerodinamiche per confrontarli.

Dall'articolo pubblicato su *Physics of Fluids* di N. Rostamzadeh *et al.*, leggiamo che questo tipo di bordo di attacco potrebbe portare ad un miglioramento nella regione vicina e post stallo, aumentando anche del 40% l'angolo a cui il flusso si separa dal dorso, con un miglioramento di efficienza in questi regioni di lavoro. Una spiegazione andrebbe cercata nel fatto che tra i picchi e le gole delle oscillazioni si formerebbero zone di vortici controrotanti che variano la circuitazione lungo l'apertura dell'ala, ed è proprio questa regione fortemente vorticoso che causerebbe i benefici menzionati [Rostamzadeh2013].

Infatti utilizzando l'approssimazione di flusso potenziale per l'esterno dello strato limite vediamo, dalla condizione di Kutta, che la circuitazione varia come l'angolo di attacco effettivo

$$\Gamma = -\pi V_\infty \left( c + \frac{4}{3\sqrt{3}}t \right) \alpha_{eff} < 0$$

dove  $c$  è la corda e  $t$  lo spessore massimo del profilo. Quindi, inizialmente, tra un picco e un ventre, dove l'incidenza diminuisce, dovrà aumentare algebricamente la circuitazione, e rifacendoci alla teoria della linea portante di Prandtl, questo vuol dire che si formerà un vortice che ruota in senso antiorario vedendo il bordo d'attacco. Analogamente tra il ventre e il picco successivo l'incidenza torna ad aumentare, così come la circuitazione a diminuire con un vortice controrotante rispetto al precedente. Questi vortici hanno come effetto istantaneo una diminuzione di angolo d'attacco effettivo per i profili nella vicinanza dei picchi, e un aumento per quelli nei ventri, a causa della velocità indotta: la differenza massima tra gli angoli effettivi lungo l'ala diminuirà, così come l'ampiezza della sinusoidale della circuitazione.

I vortici andranno quindi a diminuire l'incidenza effettiva  $\alpha_{eff}$  dei profili dei picchi, dove l'incidenza è maggiore, e viceversa nelle gole; quindi come risposta avremo un'attenuazione delle variazioni di circuitazione lungo l'ala. Ma se le fluttuazioni di  $\Gamma$  diminuiscono, anche l'intensità dei vortici diminuirà, gli stessi vortici che hanno causato la variazione degli angoli d'attacco effettivi e la regolarizzazione della circuitazione.

Si arriverà ad un equilibrio tra i due fenomeni in opposizione, l'intensità dei vortici che escono dall'ala tra i picchi e i ventri e la differenza massima tra gli angoli effettivi lungo l'apertura: all'aumentare di uno diminuirebbe l'altro che come conseguenza dalla condizione di Kutta porterebbe una diminuzione del primo.

Giunti ad un equilibrio stabile, avremo una certa intensità finale di vortici minore di quella dell'istante iniziale, ma concorde, e un certo andamento finale degli angoli effettivi attenuato rispetto a quello geometrico; la presenza dei vortici porta ad un aumento della velocità del flusso e quindi una differenza di pressione tra dorso e ventre maggiore con un  $C_L$  maggiore a pari incidenza media.

Sperimentalmente si è visto però che questi effetti diventano significativi ad incidenza abbastanza elevata, grazie alla capacità dei vortici di mantenere il flusso aderente al dorso anche per angoli molto alti, mentre con piccoli angoli d'attacco dovremmo avere anzi un peggioramento, che sarà quello che ci aspettiamo di vedere dalla simulazione.

Proseguiremo con le simulazioni al computer per trovare riscontri con i risultati presenti in letteratura, cercando conferme di quanto appena detto.

### 1.3 Leggi di conservazione nei fluidi

Il moto dei fluidi è governato da equazioni differenziali alle derivate parziali che rappresentano la conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia: le cosiddette equazioni di Navier-Stokes.

Per la loro derivazione consideriamo un volume di controllo  $\delta x \delta y \delta z$  in moto in un flusso fluido, piccolo per le grandezze caratteristiche in gioco ma grande abbastanza da contenere tante molecole quante ne sono necessarie per definire quantità medie, e introduciamo alcuni concetti utili.

#### 1.3.1 Accelerazione di una particella fluida

Definendo il campo vettoriale delle velocità in un fluido come il vettore colonna avente per componenti le velocità del volume di controllo lungo le tre direzioni di un sistema di riferimento cartesiano

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

questo è in generale funzione della posizione e del tempo, cioè la velocità varia sia con il tempo in uno stesso punto del sistema di riferimento che con la posizione ad uno stesso istante considerato.

Quindi  $\vec{V} = \vec{V}(t, x, y, z) = (u(t, x, y, z), v(t, x, y, z), w(t, x, y, z))^T$ . Ogni componente del vettore velocità è una quantità scalare funzione dello spazio e del tempo, avente l'informazione sulla direzione contenuta nel versore corrispondente:  $\vec{V} = u_i \mathbf{e}_i$ .<sup>1</sup>

Il differenziale della funzione velocità lungo la direzione  $i$ ,  $u_i = u_i(t, x, y, z)$  è:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} dt + \frac{\partial u_i}{\partial x} dx + \frac{\partial u_i}{\partial y} dy + \frac{\partial u_i}{\partial z} dz$$

quindi la sua derivata nel tempo, ovvero l'accelerazione del volume lungo la direzione  $i$ , è:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x} u + \frac{\partial u_i}{\partial y} v + \frac{\partial u_i}{\partial z} w$$

Usando la definizione di operatore nabla

$$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

e di gradiente di una funzione scalare  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\text{grad } f = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

possiamo riscrivere la derivata totale nel tempo di  $u_i$  come:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial u_i}{\partial y}, \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla u_i \cdot \vec{V}$$

e questa vale per le tre componenti del vettore velocità.

---

<sup>1</sup>Si è utilizzata la notazione di Einstein secondo la quale indici ripetuti implicano sommatoria.

Considerando poi che i versori  $\mathbf{e}_i$  sono costanti in modulo e fissi nello spazio, quindi  $d\vec{V} = d(u_i \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i du_i$ , abbiamo che il vettore accelerazione totale del volume è:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot \vec{V} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla v \cdot \vec{V} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla w \cdot \vec{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla u \cdot \vec{V} \\ \nabla v \cdot \vec{V} \\ \nabla w \cdot \vec{V} \end{pmatrix}$$

Ricordando la definizione di gradiente di un vettore, o matrice jacobiana dello stesso

$$\nabla \vec{V} = \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \\ \nabla w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u & \partial_z u \\ \partial_x v & \partial_y v & \partial_z v \\ \partial_x w & \partial_y w & \partial_z w \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} \nabla u \cdot \vec{V} \\ \nabla v \cdot \vec{V} \\ \nabla w \cdot \vec{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \partial_x u & v \partial_y u & w \partial_z u \\ u \partial_x v & v \partial_y v & w \partial_z v \\ u \partial_x w & v \partial_y w & w \partial_z w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u & \partial_z u \\ \partial_x v & \partial_y v & \partial_z v \\ \partial_x w & \partial_y w & \partial_z w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \nabla \vec{V} \cdot \vec{V}$$

Allora abbiamo che l'accelerazione vale:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla u \\ \nabla v \\ \nabla w \end{pmatrix} \cdot \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \vec{V} \cdot \vec{V}$$

La derivata totale di una quantità scalare  $Q$ ,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla Q \cdot \vec{V}$$

è detta anche derivata materiale o lagrangiana, somma di un contributo detto euleriano e uno detto convettivo, e si può indicare anche come  $\frac{DQ}{Dt}$ . Il primo termine indica una variazione di  $Q$  imputabile solo alla variazione temporale della quantità nello stesso punto, quindi fissiamo la posizione e valutiamo la variazione nel tempo; il secondo termine prende in considerazione la variazione di  $Q$  causata dal moto di trasporto, quindi anche in regime stazionario abbiamo una variazione diversa da zero, fissando un istante e muovendoci nello spazio.

### 1.3.2 Tensore degli sforzi di taglio

Un fluido in moto è sollecitato internamente da forze che si scambiano su ogni superficie, causate dalla viscosità che si oppone al moto relativo tra diverse particelle fluide. Prendendo in considerazione una superficie, questa subirà una forza causata dal fluido su ogni sua faccia. Facendo tendere a zero la superficie, il rapporto tra la forza e la superficie stessa può assumere un valore, detto sforzo  $\vec{\sigma}$ :

$$\vec{\sigma} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{S}$$

Lo sforzo è un vettore e si può dimostrare che per conoscere completamente lo stato di tensione di un punto basta conoscere lo sforzo calcolato su tre piani ortogonali passante per il punto stesso: questo significa che la conoscenza di questi tre vettori è sufficiente per determinare lo sforzo su qualunque altro piano passante per il punto.

Come insieme di tre piani ortogonali, e quindi indipendenti, possiamo prendere i tre piani perpendicolari alle tre direzioni di un sistema di coordinate cartesiane centrato nel punto, ottenendo tre sforzi  $\vec{\sigma}_1$ ,  $\vec{\sigma}_2$  e  $\vec{\sigma}_3$ .

Questi tre vettori posseggono ognuno tre componenti lungo le tre direzioni, che definiamo  $\sigma_{ij}$ , dove  $i$  è la direzione lungo cui il piano considerato è ortogonale e  $j$  la direzione lungo la quale la componente è parallela.

Le nove componenti possono essere raccolte in forma matriciale come:

$$\underline{\Pi} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Si può dimostrare con il teorema di Cauchy che questa matrice è simmetrica, ovvero  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , dall'equilibrio alla rotazione di un cubetto elementare, quindi in realtà abbiamo solo sei incognite da determinare.

Risulta che per un fluido in quiete gli sforzi sono solo perpendicolari e di carattere compressivo, quindi

$$\Pi_{ij} = \sigma_{ij} \delta_{ij}$$

Dal teorema di Pascal inoltre si ha che tutti gli sforzi ortogonali sono uguali, e definendoli come pressione idrostatica  $p$  si ha che:

$$\underline{\Pi}_{ij} = \sigma_{ij}\delta_{ij} = -p\delta_{ij}$$

In un fluido in moto risulta invece che le componenti tangenziali degli sforzi non sono nulli, quindi definiamo la matrice degli sforzi viscosi come

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

anch'essa simmetrica ed imputabile solo al moto del fluido. Definendo anche qui una pressione per il fluido in moto come  $p = -\frac{1}{3}\sum_i \sigma_{ii}$ , riscriviamo

$$\underline{\Pi} = -p\underline{I} + \underline{\tau}$$

ovvero:

$$\underline{\Pi} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

da cui abbiamo che  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ .

Osserviamo che la traccia di  $\underline{\tau}$  è nulla, essendo  $\tau_{ii} = \sigma_{ii} - \frac{1}{3}\sum_i \sigma_{ii}$ .

Con le ipotesi che il tensore simmetrico degli sforzi dipenda solo dalla distribuzione istantanea di velocità e che sia una funzione lineare del gradiente di velocità, e sapendo che si annulla nel caso di fluido in quiete, possiamo esprimere il tensore per un fluido isotropo come:

$$\underline{\tau} = \mu(\nabla\vec{V} + \nabla\vec{V}^T) + \lambda(\nabla \cdot \vec{V})\underline{I}$$

I fluidi per i quali vale questa relazione sono detti *newtoniani*.

In componenti cartesiane si scrive:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

ed in particolare

$$\tau_{ii} = 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sum_k \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

Dovendo essere la traccia di  $\underline{\tau}$  nulla abbiamo che

$$\sum_i \tau_{ii} = \sum_i (2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sum_k \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k}) = 3\lambda \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \sum_i 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = (2\mu + 3\lambda) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

ovvero che  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ , detta ipotesi di Stokes. Questa equivale a dire che la pressione del fluido in moto equivale a quella idrostatica o termodinamica [Arina2014].

Possiamo riscrivere allora:

$$\underline{\tau} = \mu(\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \vec{V})\underline{I}$$

### 1.3.3 Legge di conservazione della massa

All'interno del nostro volume di controllo fisso  $\Omega$  con superficie controrriante  $\Sigma$  entra ed esce fluido, e quindi massa. Potrebbe entrarne più di quante ne esce, e quindi avere un accumulo di massa all'interno con un aumento di densità, oppure viceversa uscirne più di quante ne entra; ma in ogni caso la massa totale in gioco è costante, quindi la variazione di massa all'interno del volume è uguale a quella che entra istante per istante meno quella che esce istante per istante.

Prendiamo in considerazione una parte infinitesima  $d\Sigma$  della superficie  $\Sigma$ : la massa entrante o uscente da questa porzione di superficie è  $d(dm) = \rho ds_n d\Sigma$ , dove  $ds_n$  è lo spazio perso in direzione normale alla superficie. Se è uscente dal volume di controllo diremo che il suo verso è positivo, viceversa il segno è negativo se  $ds_n$  è percorso verso l'interno.

Quindi la massa che entra od esce per unità di tempo dalla suddetta superficie infinitesima è:

$$\frac{d}{dt}(dm) = \rho \frac{ds_n}{dt} d\Sigma = \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

con  $\vec{n}$  versore normale alla superficie di controllo di verso uscente.

Il prodotto scalare ci fa intendere che alla sola componente normale alla superficie è imputabile entrata o fuoriuscita di massa, mentre la componente tangente alla superficie non entra in gioco nel bilancio.

Questo fattore  $\rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma$  è istantaneamente funzione del punto della superficie considerata: ovvero fissato un istante in ogni porzione di superficie potremmo avere massa entrante od uscente. Per sapere al netto quanta ne è effettivamente entrata od uscita dobbiamo integrare questo fattore su tutta la superficie del volume: questo integrale, interpretabile come la massa totale uscita meno quella totale entrata, sarà uguale alla variazione totale della massa nell'unità di tempo.



Questo in formole vuol dire:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} dm = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \int_{\Sigma} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

Il meno sta a significare che se l'integrale di superficie è positivo, ovvero c'è una fuoriuscita netta di fluido, la derivata della massa all'interno del volume deve essere negativa, perchè per quello che abbiamo appena ipotizzato sta diminuendo.

Usando il teorema di Gauss o della divergenza otteniamo

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right) d\Omega = 0$$

Ed essendo nullo l'integrale per ogni volume sarà nulla la funzione integranda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Usando la definizione di derivata lagrangiana possiamo scrivere anche

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{V} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Da questo discerne che per un fluido incompressibile a densità costante la divergenza della velocità è nulla:

$$\rho = cost \implies \frac{D\rho}{Dt} = 0 \implies \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Se nel volume di controllo sono presenti sorgenti di massa  $f$  per unità di volume e tempo il bilancio si modifica scrivendo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = f$$

### 1.3.4 Legge di conservazione della quantità di moto

Anche per il nostro volume  $\Omega = \delta x \delta y \delta z$  vale la seconda legge della dinamica  $m \vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$ . In un flusso in moto però le uniche forze agenti su ogni particella sono le forze di pressione e gli sforzi di taglio, che trasmettono tutte le forze esterne al flusso che causano e modificano il moto, a cui dobbiamo aggiungere

la forza di gravità. È come se isolassimo la particella e la vedessimo muoversi lungo la sua traiettoria: le cause di quel moto sono solo le forze che lei sente dalle particelle adiacenti.

Prendiamo la direzione  $x$  ricordando che sia le pressioni che gli sforzi sono forze per unità di superficie; in più aggiungiamo la componente della forza di gravità lungo la direzione considerata, visto che il sistema di riferimento potrebbe avere un'orientazione qualsiasi:

$$ma_x = \delta x \delta y \delta z \rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta x \delta y \delta z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z + \rho g_x \delta x \delta y \delta z$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot \vec{V} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}) + \rho g_x$$

E questo vale per tutte le direzioni  $i$ -esime:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla u_i \cdot \vec{V} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nabla \cdot (\tau_{xi}, \tau_{yi}, \tau_{zi}) + \rho g_i$$

Mettendo tutto assieme in forma vettoriale moltiplicando la relazione di sopra per  $\mathbf{e}_i$  e sommando, otteniamo:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\tau} + \rho \vec{g} = \nabla \cdot \underline{\Pi} + \rho \vec{g}$$

### 1.3.5 Legge di conservazione dell'energia

L'energia per unità di massa una particella fluida la scriviamo come somma dell'energia interna e dell'energia cinetica:

$$E = \varepsilon + \frac{V^2}{2}$$

Possiamo scrivere che la variazione di energia nel tempo della particella fluida è uguale al flusso netto di energia che viene trasportata dal fluido e che attraversa le pareti del volume di controllo più eventuali flussi di calore, da aggiungere al lavoro totale svolto dalle forze esterne quali forze di pressione, di taglio e gravità. Il lavoro infinitesimo delle forze di pressione per uno spostamento  $(dx, dy, dz)$  è:

$$d\mathcal{L}_p = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z dx - \frac{\partial p}{\partial y} \delta x \delta y \delta z dy - \frac{\partial p}{\partial z} \delta x \delta y \delta z dz$$

che derivato nel tempo dà:

$$\frac{d\mathcal{L}_p}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z u - \frac{\partial p}{\partial y} \delta x \delta y \delta z v - \frac{\partial p}{\partial z} \delta x \delta y \delta z w = -\nabla p \cdot \vec{V} \delta x \delta y \delta z$$

Analogamente il lavoro delle due forze di taglio  $\tau_{xx}$  agenti sulle due facce perpendicolari all'asse  $x$ , derivato nel tempo è:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\mathcal{L}_t}{dt} \right)_{\tau_{xx}} &= \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \right) - \tau_{xx} \delta y \delta z u = \\ &= \left( \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} u) \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

dove abbiamo al solito trascurato termini di ordine d'infinitesimo maggiore. Allo stesso modo possiamo scrivere il lavoro nel tempo di tutte e 6 le forze di taglio agenti sulle due facce perpendicolari all'asse  $x$  come:

$$\left( \frac{d\mathcal{L}_t}{dt} \right)_x = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx} u) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} v) + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xz} w) \right] \delta x \delta y \delta z$$

Allora il lavoro totale di tutte le 18 forze agenti sulle 6 facce del nostro cubetto elementare si scriverà come:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_t}{dt} &= \sum_i \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{x_i x} u) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{x_i y} v) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{x_i z} w) \right] \delta x \delta y \delta z = \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{x_i x} u + \tau_{x_i y} v + \tau_{x_i z} w) \delta x \delta y \delta z = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (\tau_{x_i x}, \tau_{x_i y}, \tau_{x_i z}) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right] \delta x \delta y \delta z = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right] \delta x \delta y \delta z = \\ &= \nabla \cdot (\underline{\tau} \cdot \vec{V}) \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere il lavoro nel tempo per unità di volume di tutte le forze in forma compatta come:

$$-\nabla p \cdot \vec{V} + \nabla \cdot (\underline{\tau} \cdot \vec{V}) = \nabla \cdot (-p \underline{I} \cdot \vec{V} + \underline{\tau} \cdot \vec{V}) = \nabla \cdot [(-p \underline{I} + \underline{\tau}) \cdot \vec{V}] = \nabla \cdot (\underline{\Pi} \cdot \vec{V})$$

Possiamo scrivere la formulazione integrale della conservazione di energia totale come:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho E d\Omega = - \int_{\Sigma} \rho E \vec{V} \cdot \vec{n} dx dy + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{\underline{H}} \cdot \vec{V}) d\Omega - \int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n} dx dy + \int_{\Omega} \rho \vec{f} \cdot \vec{V} d\Omega + \int_{\Omega} Q_v d\Omega$$

dove con  $\vec{f}$  abbiamo generalizzato tutte le forze di campo, quali campi gravitazionali o elettromagnetici ad esempio, e con  $Q_v$  abbiamo inteso possibili sorgenti di energia per unità di volume interne al volume di controllo. Il terzo integrale a secondo membro indica i flussi di calore che permeano le superfici del cubo e che trasportano quindi energia.

La corrispondente formulazione differenziale la otteniamo applicando il teorema di Gauss agli integrali dei flussi attraverso la superficie

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \vec{V}) = \nabla \cdot (\underline{\underline{H}} \cdot \vec{V}) - \nabla \cdot \vec{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} + Q_v$$

Se deriviamo i termini a primo membro otteniamo un termine nullo dall'equazione di continuità:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \vec{V}) &= \rho \frac{\partial E}{\partial t} + E \frac{\partial \rho}{\partial t} + E \nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \rho \nabla E \cdot \vec{V} = \\ &= E \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right) + \rho \left( \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla E \cdot \vec{V} \right) = \rho \frac{DE}{Dt} \end{aligned}$$

Quindi, scomponendo il tensore degli sforzi nella parte isotropa e non isotropa, abbiamo in definitiva:

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla \cdot (p \vec{V}) + \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{V}) - \nabla \cdot \vec{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} + Q_v$$

### 1.3.6 Equazioni di Navier-Stokes

L'insieme di queste tre equazioni, di cui una vettoriale, formano un sistema di equazioni alle derivate parziali che descrivono il comportamento macroscopico di un fluido in moto con l'approssimazione di un continuo. Il sistema è:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \vec{g} = \nabla \cdot \underline{\underline{H}} + \rho \vec{g}$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla \cdot (p\vec{V}) + \nabla \cdot (\underline{\tau} \cdot \vec{V}) - \nabla \cdot \vec{q} + \rho \vec{f} \cdot \vec{V} + Q_v$$

Sarà questo sistema che dovremo manipolare numericamente per risolvere problemi di fluidodinamica computazionale.

## 1.4 Flussi turbolenti

Il comportamento di un flusso fluido oltre un certo numero di Reynolds, che definito il fluido e le condizioni di lavoro significa oltre una certa velocità, diventa caotico, ovvero le piccole e inevitabili perturbazioni del suo moto non sono più smorzate dalle forze viscosse ed il moto si dice diventato *turbolento*.

Le principali caratteristiche del moto turbolento sono la presenza di fluttuazioni, sia spaziali che temporali, di alti livelli di dissipazione, diffusività e vorticità con presenza di *eddy*. Le fluttuazioni, irregolari e caotiche, rendono il moto turbolento fortemente non stazionario, tridimensionale e interagente non linearmente.

Rimane uno dei pochi, se non l'unico, problema ancora aperto della fisica classica. In generale la trattazione di un flusso turbolento è molto complicata, e ci sono tre strade per affrontarla numericamente:

- *D.N.S. (Direct numerical simulation)*: è l'approccio concettualmente più semplice, si discretizzano lo spazio e il tempo con griglie della dimensione voluta e si eseguono i calcoli su esse. È l'approccio che restituisce i risultati più accurati ma ha un costo computazionale elevatissimo; per le applicazioni industriali risulta quindi troppo dispendioso.
- *L.E.S. (Large eddy simulation)*: consiste nel calcolare numericamente il comportamento delle scale turbolente più grandi e modellare opportunamente le scale più piccole (*scale di Kolmogorov*). Per operare questa suddivisione si introducono filtri numerici creati ad-hoc.
- *R.A.N.S. (Reynolds averaged Navier-Stokes equations)*: si basano sull'assunzione che si possa vedere il moto turbolento come formato da un moto medio e da una sua fluttuazione nel tempo. Le grandezze delle equazioni di partenza vengono mediate in un certo intervallo di tempo; così facendo i tempi di calcolo vengono notevolmente ridotti in quanto le scale del moto medio risultano essere notevolmente maggiori di quelle del moto turbolento. Richiedono l'utilizzo di ulteriori equazioni per la chiusura del problema ma è il metodo meno costoso dal punto di vista computazionale, ed ora andremo ad analizzarlo più nel dettaglio [Wikipedia].

### 1.4.1 R.A.N.S.

Possiamo pensare di studiare statisticamente l'andamento delle grandezze proprie di un moto turbolento.

Considerando un moto turbolento statisticamente stazionario: andiamo a scomporlo in un moto medio più le eventuali fluttuazioni procedendo con la *decomposizione di Reynolds*. Consideriamo ad esempio le componenti cartesiane della velocità:

$$u_i(t, \vec{x}) = U_i(\vec{x}) + u'_i(t, \vec{x})$$

dove  $U_i(\vec{x})$  è il campo medio indipendente dal tempo e  $u'_i(t, \vec{x})$  sono le fluttuazioni temporali del campo di moto.

Dalla definizione di valor medio notiamo che il valor medio del campo medio è identicamente uguale e sè stesso mentre quello delle fluttuazioni è nullo.

Procediamo analogamente per la pressione e la temperatura:

$$p(t, \vec{x}) = P(\vec{x}) + p'(t, \vec{x})$$

$$T(t, \vec{x}) = \Theta(\vec{x}) + T'(t, \vec{x})$$

Scrivendo l'equazione di continuità e della conservazione della quantità di moto per un fluido incomprimibile, trascurando l'eventuale presenza di campi di forza, come:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad ;$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad ;$$

e ricordando che  $u_i = U_i + u'_i$  e che  $\overline{u_i} = \overline{U_i} + \overline{u'_i} = U_i$ , possiamo andare a mediare nel tempo le *Navier-Stokes* ottenendo:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad ;$$

$$\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \tau_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \quad ;$$

con  $\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$  sforzo viscoso.

Queste equazioni mediate prendono il nome di *Equazioni mediate alla Reynolds* o *R.A.N.S.*

La particolarità di queste equazioni è la presenza del termine  $-\overline{\rho u'_i u'_j}$ , un tensore del secondo ordine che tiene conto degli sforzi turbolenti dovuti alle fluttuazioni dal moto medio; viene indicato solitamente con  $\underline{R}$ , definito dalla relazione  $R_{ij}(t, \vec{x}) = \overline{\rho u'_i u'_j}$ , ed è chiamato *tensore degli sforzi di Reynolds* [Arina2014].

Ora le equazioni appena derivate ci pongono davanti un problema: si sono aggiunte le incognite del tensore di Reynolds dovute alle fluttuazioni e non è possibile chiudere il problema.

### 1.4.2 Modelli di turbolenza

Nel risolvere queste equazioni possiamo seguire due strategie, atte alla modellizzazione di questo tensore, che danno origine a due classi di modelli distinte:

- modelli a viscosità turbolenta (*Eddy Viscosity*);
- modelli per il tensore intero (*Reynolds Stress Models R.S.M.*);

I primi hanno come ipotesi di base, per aggiungere un'equazione al problema, la cosiddetta *ipotesi di Bousinesq*, scrivibile come:

$$\frac{R_{ij}}{\rho} = \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

mettendo in proporzionalità lineare il tensore con le derivate spaziali delle componenti di velocità media, in analogia con quanto fatto per il tensore degli sforzi viscosi. La costante di proporzionalità  $\nu_t$  è detta *eddy viscosity* o viscosità turbolenta.

Aggiungiamo solo che quest'ipotesi presenta dei limiti di applicabilità, e rimandiamo per maggiori dettagli ai molti testi disponibili sull'argomento [Durbin2011, Pope2000].

Per risolvere il problema della chiusura ci riconduciamo quindi a risolvere sistemi lineari, algebrici o differenziali, con l'obiettivo di determinare il valore della viscosità turbolenta. La classificazione dei modelli a viscosità turbolenta è basata sul numero di equazioni aggiunte al sistema delle equazioni mediate per chiudere il problema.

Citiamo solo uno dei più noti modelli di ordine 1, quello di *Spalart-Allmaras*, semplice rispetto ad altri di ordine 2 ma ottimizzato per flussi attorno a superfici alari.

Questo modello si basa sull'introduzione di una sola equazione alle derivate parziali, che omettiamo, per descrivere l'andamento spaziale della viscosità turbolenta.

## 1.5 Computational Fluid Dynamics

La fluidodinamica computazionale, d'ora in poi CFD, manipola le equazioni di bilancio e le risolve numericamente per ottenere una soluzione; operativamente sostituisce alcune di queste equazioni differenziali con una serie di equazioni algebriche risolvibili al calcolatore.

La CFD fornisce previsioni qualitative, e a volte anche quantitative, su un certo campo di moto fluido tramite la modellistica matematica, metodi numerici ed appositi software, consentendo di eseguire "esperimenti numerici" in un laboratorio virtuale.

L'analisi numerica dà un'idea su modelli di flusso che sono difficili, costosi o impossibili da studiare con tecniche sperimentali tradizionali.

È vero anche che la CFD non sostituisce mai completamente le misurazioni, ma il numero di esperimenti e il costo totale dello studio da effettuare può essere significativamente ridotto.

Analizziamo gli aspetti che ci fanno preferire una simulazione al computer piuttosto che un esperimento:

Metodo Sperimentale, **descrizione** quantitativa sul flusso mediante misurazioni:

- Valido per una certa quantità misurata ad un certo istante
- Valido per un limitato numero di punti
- Necessità di adottare un modello in scala da laboratorio
- Possibilità di studiare un limitato numero di problemi in un limitato range di condizioni operative
- Fonti di errore: errori di misurazione e flusso disturbato dalle sonde.

Simulazione numerica, **previsione** quantitativa sul flusso mediante software CFD:

- Valido per tutte le caratteristiche e le quantità desiderate
- Possibilità di avere un alta risoluzione dell'analisi in spazio e tempo



- Possibilità di studiare il flusso nel suo dominio a dimensioni simulate reali
- Possibilità di studiare virtualmente ogni tipo di problema in ogni realistica condizione operativa.

Per quanto riguarda l'analisi al calcolatore, gli errori sono imputabili all'impostazione matematico-fisica e informatica iniziale del problema: scelta del modello, discretizzazione, iterazione, implementazione ecc.

Altri fattori che vanno a favore delle simulazioni sono il minore costo, la maggiore facilità e velocità di realizzazione, il parallelismo delle esecuzioni contro la sequenzialità degli esperimenti, un'analisi volta a scopi multipli rispetto all'approccio single-purpose dell'esperimento.

C'è da dire però che i risultati di una simulazione CFD non sono mai totalmente affidabili perchè i dati in input potrebbero contenere troppe imprecisioni, il modello matematico del problema in esame potrebbe essere inadeguato e la precisione dei risultati è comunque limitata dalla potenza di calcolo disponibile. L'affidabilità è maggiore per flussi laminari, a fase singola e per sistemi chimicamente inerti.

La fluidodinamica computazionale è un'area di studio fortemente interdisciplinare, dove si incontrano fisica, matematica applicata e informatica.

### 1.5.1 Processo di analisi CFD

Gli step da seguire nel processo di simulazione possono essere così suddivisi:

**Formulazione del problema** Andiamo a definire: cosa conosciamo sul flusso in esame, di quali fenomeni fisici dobbiamo tener conto, la geometria del dominio e le condizioni operative, in particolare se ci sono ostacoli interni o superfici libere, interfacce. Dobbiamo stabilire il tipo di flusso con cui vogliamo lavorare: se laminare o turbolento, se stazionario o instazionario.

Infine dobbiamo definire quali devono essere gli obiettivi dell'analisi, se quantità integrali quali forze e momenti aerodinamici; se istantanee su dati del campo quali velocità, concentrazioni ecc, oppure se lo scopo è l'ottimizzazione di forme per migliorare le performance.

**Modello matematico** Dobbiamo scegliere un modello adatto per il flusso e formulare le leggi di conservazione; è inoltre necessario semplificare al massimo le equazioni che governano il suddetto modello trascurando i termini che hanno poca o nessuna influenza sui risultati, verificando la presenza di simmetrie e

direzioni predominanti del flusso, modellizzando gli effetti delle fluttuazioni su piccola scala: questo per ridurre lo sforzo computazionale.

Infine è necessario aggiungere le condizioni iniziali e al bordo.

**Processo di discretizzazione** Il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali è trasformato in un sistema di equazioni algebriche. La discretizzazione è effettuata sullo spazio e sul tempo, approssimando rispettivamente le derivate spaziali e temporali, e tramite la creazione di una mesh, definendo la forma e il numero delle celle. Le dimensioni delle celle possono essere diverse a seconda della zona del dominio considerata, “infittendo” la griglia nelle zone d’interesse.

**Strategie per la risoluzione iterativa** Le equazioni algebriche non lineari accoppiate devono essere risolte iterativamente con:

- iterazioni esterne: i coefficienti del problema discreto vengono aggiornati utilizzando i valori della soluzione dell’iterazione precedente in modo da eliminare le non linearità con un metodo simile a quello di Newton e risolvere le equazioni in forma chiusa
- iterazioni interne: la sequenza risultante di sottoproblemi lineari è tipicamente risolta con un metodo iterativo perché solutori diretti, come ad esempio l’eliminazione di Gauss, sono proibitivi
- criteri di convergenza: è necessario controllare i residui, le variazioni delle relative soluzioni e altri indicatori per assicurarsi che le iterazioni convergano

**Postprocessing** Il postprocessing dei risultati della simulazione è eseguita al fine di estrarre le informazioni desiderate dal campo di moto fluido calcolato: ad esempio il calcolo di grandezze derivate (funzione di corrente, vorticità); calcolo di portanza, resistenza, massa totale; visualizzazione, debug, verifica e validazione del modello CFD.

**Verifica del modello** La verifica equivale alla ricerca di errori nell’implementazione del modello; in altre parole rispondiamo alla domanda: stiamo risolvendo le equazioni nel modo giusto?

**Validazione del modello** La validazione consiste nell’appurare che il modello scelto sia il più adeguato per il nostro scopo; ovvero rispondiamo alla domanda: stiamo risolvendo le equazioni giuste?

L'obiettivo della verifica e della validazione è quello di garantire che il codice CFD produca risultati ragionevoli per una certa tipologia di problemi di flussi [Kuzmin].

### 1.5.2 OpenFOAM

OpenFOAM (Open Field Operation and Manipulation) è principalmente un toolbox C++ *open source* per estendere soluzioni software per la simulazione. È un solver basato sulla teoria della meccanica dei continui che include la fluidodinamica computazionale, ovvero risolve problemi basati su equazioni differenziali alle derivate parziali usando l'approccio dei volumi finiti. Viene fornito con una libreria di *solvers* applicabile ad una vasta gamma di problemi.

OpenFOAM è stato concepito come piattaforma per la meccanica dei continui ma è adeguato anche per simulazioni in vari ambiti della fisica; è costituito da una biblioteca che offre le funzionalità di base del codice, quali ad esempio operazioni di algebra tensoriale e analisi di campi, discretizzazione di equazioni differenziali parziali, soluzione di sistemi lineari e di equazioni differenziali ordinarie, parallelizzazione automatica di operazioni di alto livello e in modelli fisici come modelli termodinamici, di turbolenza, modelli per reazioni chimiche, modelli di trasferimento di calore ecc.

Una cartella di un caso di simulazione, necessaria a far partire il codice di calcolo, deve contenere al suo interno le cartelle *0*, *constant* e *system*. Nella cartella *0* ci sono *file* sulle condizioni iniziali di certe grandezze tra quali la pressione ( $p$ ) e la velocità ( $U$ ); la cartella *constant* contiene a sua volta una sottocartella chiamata *polyMesh* e alcuni dizionari del tipo *[...]Properties*. Nella cartella *polyMesh* sono contenuti i file di descrizione della mesh di volume, generati dalle utilities di *pre-processing*. Questi file contengono l'elenco di tutti i punti, le celle, le facce e i contorni del dominio di calcolo; in particolare il *file* chiamato *boundaries* contiene le informazioni sul bordo del dominio, ovvero di che tipologia si tratta un bordo (ad esempio se permeabile o no). I dizionari, nel caso generale, sono *transportProperties*, *turbulenceProperties* e *RASProperties*, e contengono informazioni sul modello utilizzato per svolgere la simulazione.

La cartella *system* contiene i dizionari che definiscono il problema da risolvere e i metodi numerici. I 3 dizionari fondamentali sono il *controlDict*, *fvSchemes* e *fvSolution* che dicono che *solvers* e che *applications* stiamo usando per simulare, oltre al numero di iterazioni massimo, con l'intervallo di tempo tra una e l'altra, e al valore dei residui per cui i risultati possono per noi essere ritenuti accettabili: il calcolatore si fermerà appena incontrerà uno di questi due limiti.

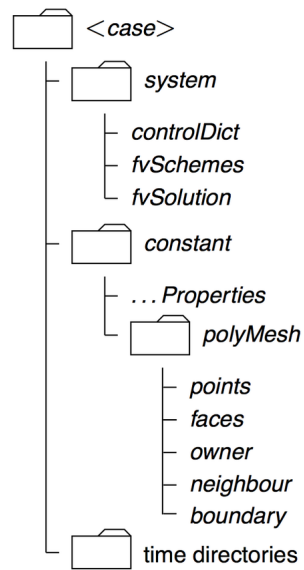


Figure 5: Esempio di tipica cartella di un caso di un problema eseguibile da OpenFOAM

Volendo generare la mesh mediante il software *Gmsh* è necessario un file di testo che contenga i punti del dominio rispetto ai quali si creerà poi la mesh oppure direttamente un file *.msh* importato da *Gmsh* stesso in cui sono riportati tutti i dati della mesh. Per poi trasferire in formato leggibile da *OpenFoam* la mesh dobbiamo usare il comando da terminale *gmshToFoam*.

## 2 Simulazioni

### 2.1 Formulazione del problema

Prenderemo in esame un dominio a forma di parallelogramma, di dimensioni nella lunghezza dell'apertura di  $\frac{0.495}{17} m$  tale da comprendere un solo periodo di sinusoidi, sfasata perchè sia simmetrica, con condizioni di simmetria sulle facce dove il dominio tocca i profili finali, in modo da andare a studiare un'ala di allungamento infinito. Il flusso sarà al 5% turbolento, con velocità media in ingresso di  $V_\infty = 25 ms^{-1}$ . La corda dell'ala è pari a  $c = 0.07 m$ , mentre la sinusoidi presente sul bordo di attacco ha un'ampiezza di  $A = 0.00244 m$  con una conseguente variazione massima di incidenza geometrica rispetto a quella media di  $\Delta\alpha \simeq \frac{0.00244}{0.07} rad \simeq 2^\circ$ .

Effettueremo due simulazioni per ognuna delle due ali, una ad un'incidenza media di  $3^\circ$ , l'altra a  $9^\circ$ .

Useremo il modello di ordine 1 già citato *Spalart-Allmaras*; sulle facce che danno sul ventre e sul dorso imposteremo una condizione di *wall* sul file *boundaries*, ovvero di pareti, con la condizione di *slip* per la velocità, quindi vogliamo che il flusso scorra liberamente su queste due pareti come in assenza di viscosità, senza aderenza, quindi di fatto come se queste pareti non ci fossero.

Per l'ala rettangolare il dominio sarà un po' diverso dato che possiamo studiare benissimo il caso bidimensionale; quindi il parallelogramma avrà una dimensione lungo l'apertura molto minore rispetto alle altre due. Questo per diminuire sensibilmente il numero di celle della mesh e aumentare quindi la velocità di calcolo.

Ci proponiamo di calcolare i coefficienti di portanza e resistenza, e quindi l'efficienza, delle due ali e confrontarle; i coefficienti, essendo indipendenti dalla superficie, possono essere confrontati legittimamente, al contrario dell'effettiva forza aerodinamica scambiata, funzione questa della superficie in pianta.

### 2.2 Generazione della mesh

La discretizzazione è il processo più lungo e delicato, dove bisogna impostare ed implementare griglie che devono tener conto di molti criteri per far convergere, e anche in tempi limitati, la simulazione.

Per la generazione della mesh si è usata la piattaforma *Gmsh*, dalla quale abbiamo importato i punti del profilo considerato, il NACA 0021, e generato il bordo d'attacco sinusoidale.

La maggiore difficoltà è creare la zona nelle immediate vicinanze dell'ala, che deve avere un'alta densità di celle a causa della presenza dello strato limite e quindi degli alti gradienti, proprio dove le forme sono complesse e molto curve per il particolare bordo d'attacco.

Si è scelto, come è solito fare, di creare una mesh strutturata per lo strato limite e non strutturata all'esterno di questo.

Abbiamo inoltre suddiviso ulteriormente il dominio in una zona più piccola, dove la mesh è più fitta, per ottenere risultati più precisi e per motivi di convergenza dei residui. Nella zona esterna invece, la suddivisione va ad essere sempre più rada fino ad arrivare a dimensioni delle celle comparabili a quella della corda. Infatti in questa zona siamo abbastanza lontani dal corpo e il flusso ne risulterà in buona approssimazione indisturbato, senza brusche variazioni in qualsiasi direzione, portando a convergenza i risultati molto più facilmente.

Nella descrizione delle mesh delle due tipologie di ala prenderemo in considerazione una sola incidenza, essendo questa poco influente sulle caratteristiche qualitative di cui andremo a parlare.

**Ala retta** Per l'ala retta tutto questo è risultato più semplice grazie alla maggiore regolarità della forma.

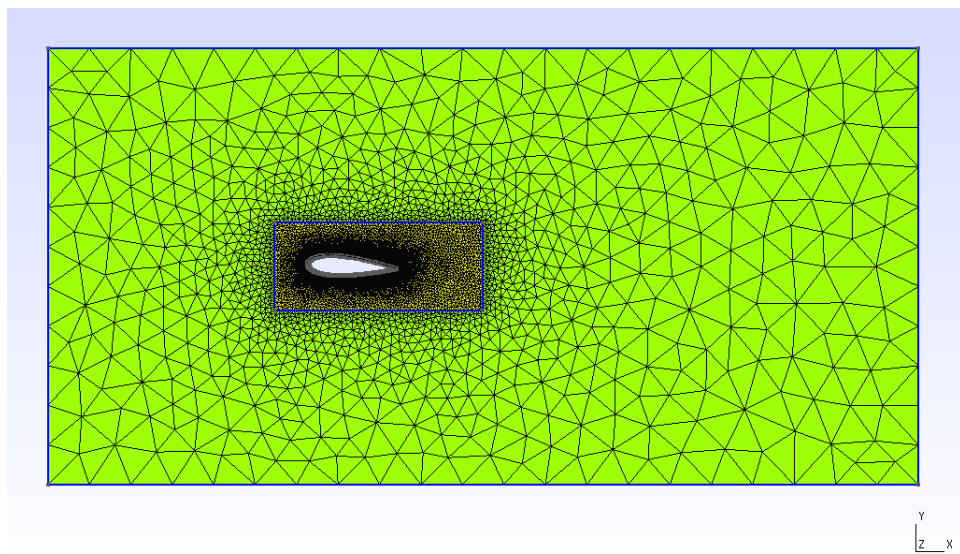


Figure 6: Vista della mesh 2D attorno ad un generico profilo dell'ala retta

Lo spessore della mesh, come già detto, sarà particolarmente sottile per diminuire il costo computazionale (figura 7).

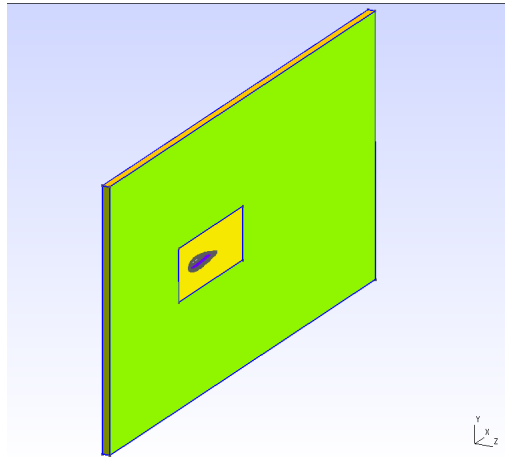


Figure 7: Vista delle dimensioni totali del dominio di calcolo dell'ala retta

La zona dello strato limite è sede di forti gradienti di velocità lungo la normale al profilo e di pressione lungo la corda; per cogliere le forti variazioni in spazi molto piccoli, e portare quindi a convergenza i risultati numerici, dobbiamo infittire la mesh nelle vicinanze del profilo e farlo *strutturato*, con 8 strati. Questo significa che le celle non saranno più triangolari in sezione, ma rettangolari. La difficoltà è che il codice di calcolo obbliga ad avere la stessa suddivisione di punti nel profilo reale e lungo il bordo della zona infittita; questo porta ad una forte distorsione delle celle in certe zone, che abbiamo in certa misura ridotto dividendo in quattro settori la zona infittita, due nelle prossimità del bordo di fuga. Questo ha permesso un certo “*raddrizzamento*” delle celle.

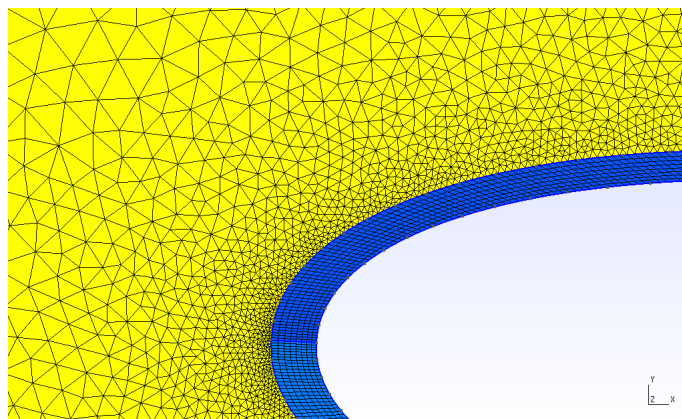


Figure 8: Mesh dello strato limite in corrispondenza del brodo d'attacco dell'ala retta

Nei pressi del bordo di fuga le celle danno non pochi problemi causati dall'angolo appuntito, che costringe le forme delle celle ad appiattirsi troppo. In effetti questa regione è limitatissima per dimensioni rispetto al resto dell'ala, quindi abbiamo modificato leggermente i punti del profilo per dare una forma più arrotondata e morbida al bordo di fuga (figura 9).

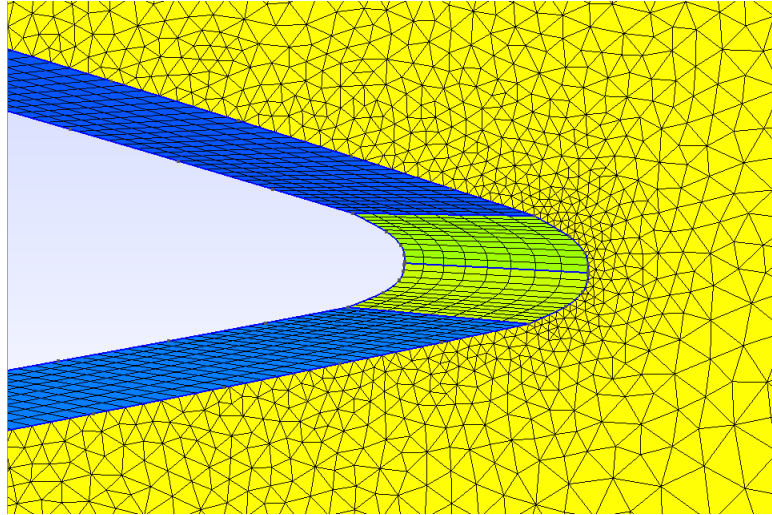


Figure 9: Mesh dello strato limite in corrispondenza del bordo di fuga dell'ala retta

Questa zona resta in ogni caso molto limitata rispetto alle dimensioni del profilo (figura 10).

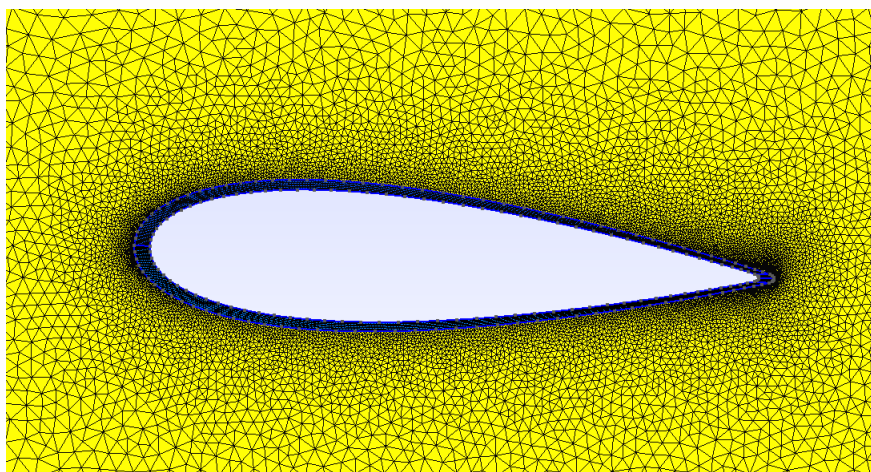


Figure 10: Vista della zona più fitta vicino al profilo dell'ala retta



**Ala wavy** La mesh di quest'ala è decisamente più complessa da realizzare, per ovvie cause dettate dal bordo d'attacco.

Per motivi presumibilmente imputabili ad effetti instazionari la simulazione non arriva facilmente a convergenza. Ipotizziamo siano i vortici creati ad incidenze troppo alte a non essere stazionari. Per questo motivo abbiamo dovuto infittire molto la mesh nelle vicinanze del profilo, fino a raggiungere circa 2 milioni di celle totali, ed abbassare le incidenze medie della simulazione. La mesh finale si presenta come in figura 11.

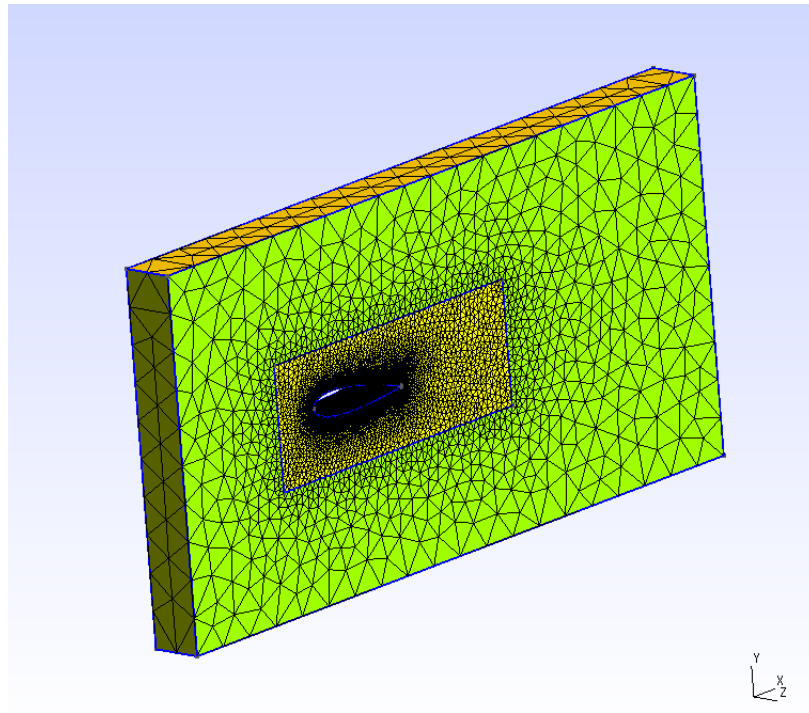


Figure 11: Vista delle dimensioni totali del dominio di calcolo dell'ala wavy

Abbiamo scelto al solito di creare una zona più fitta che racchiuda l'ala per guadagnare in precisione dei risultati (figura 12).

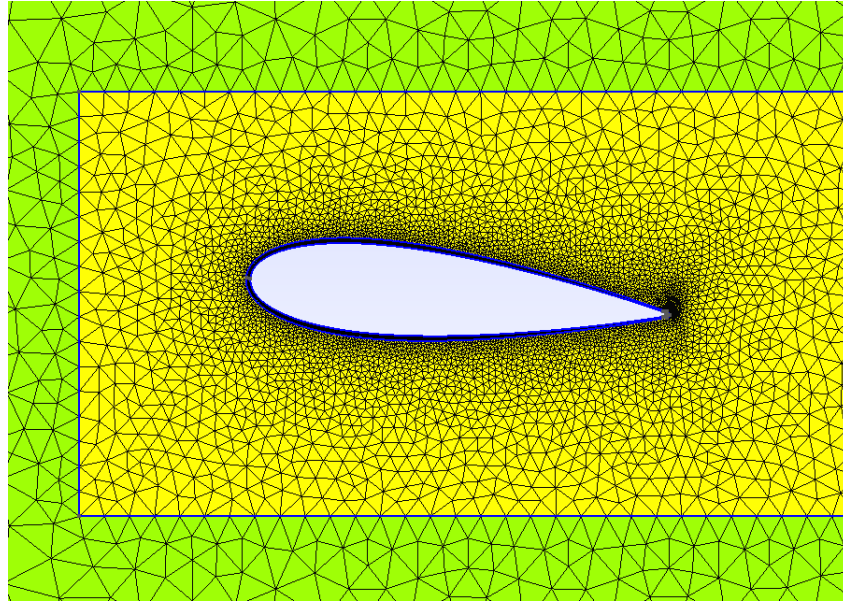


Figure 12: Vista della zona più fitta vicino al profilo dell'ala wavy

Le dimensioni del dominio rispetto a quelle dell'ala sono state scelte abbastanza grandi per le difficoltà che questo bordo d'attacco genera durante la simulazione, tutto questo a scapito del tempo necessario a farla convergere (figura 13).

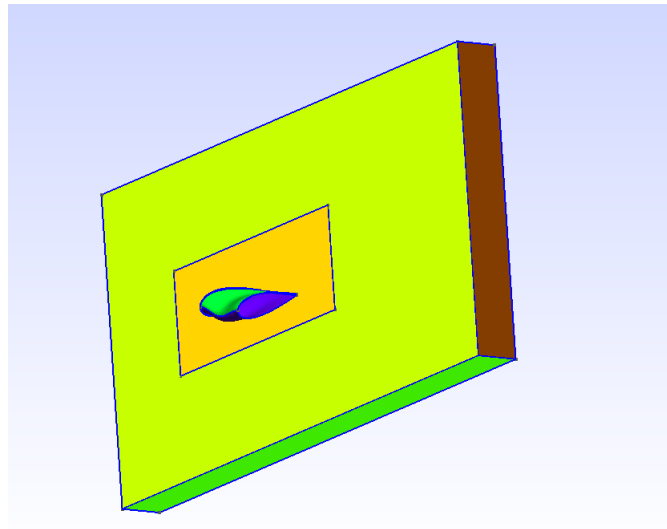


Figure 13: Dimensioni del dominio con la forma simmetrica dell'ala wavy in vista

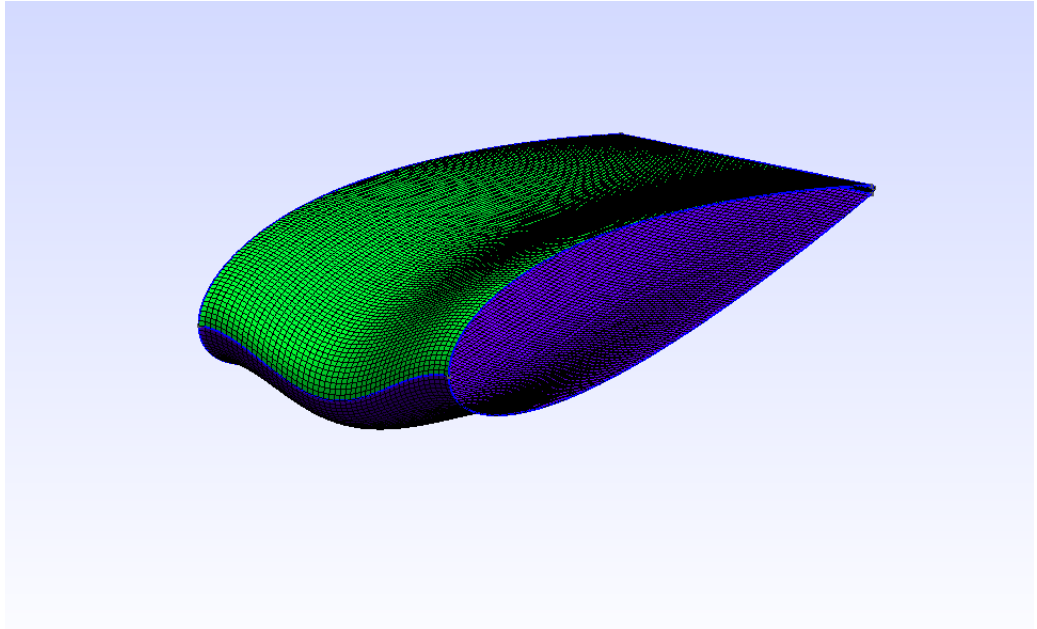


Figure 14: Dimensioni della porzione di ala wavy usata per la simulazione

Il *boundary layer* è stato fatto, come per l'ala retta, strutturato e diviso in quattro settori, questo sempre per avere migliori forme delle celle, il più simile possibile a parallelepipedi e non a parallelogrammi. Anche se dal punto di massimo incurvamento fino al bordo di fuga questa distorsione è comunque presente, il risultato è comunque accettabile come mostrato in figura 15.

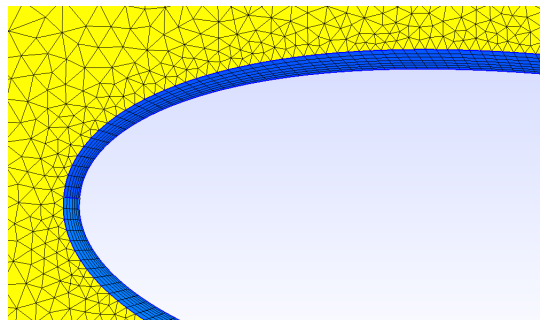


Figure 15: Mesh dello strato limite in corrispondenza del bordo d'attacco dell'ala wavy

I due settori presenti al bordo di fuga e l'arrotondamento dello stesso, come per l'ala retta, sono necessari per eliminare i problemi dell'angolo vivo, ovvero avere celle particolarmente schiacciate che si incastrano male. I due settori sono

stati anche infittiti lungo la linea del profilo, dove sono presenti molti più punti, passando ad una densità di suddivisioni circa 8 volte maggiore: questo a causa della curvatura che costringe a dimensionare le celle con una lunghezza tale che le suddivisioni del bordo curvato siano ben approssimabili a segmenti retti (figura 16).

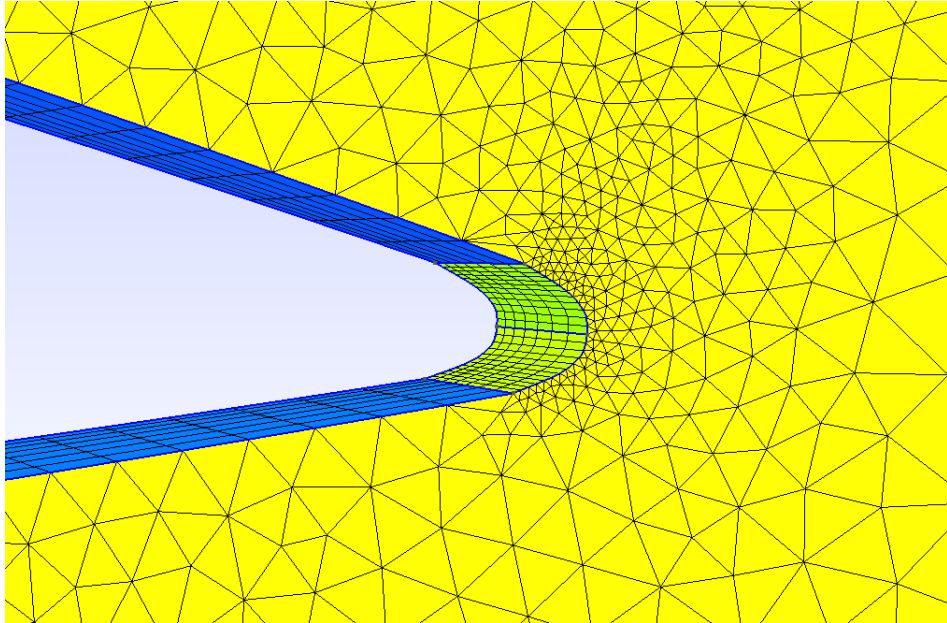


Figure 16: Mesh dello strato limite in corrispondenza del bordo di fuga dell'ala wavy

### 3 Risultati

Valuteremo prima le due ali a  $3^\circ$  di incidenza (incidenza media per l'ala wavy), e poi a  $9^\circ$ , confrontando i coefficienti di portanza e resistenza e quindi l'efficienza.

#### 3.1 Simulazioni a bassa incidenza

Con incidenza bassa quello che ci aspettavamo era di avere un peggioramento con il bordo d'attacco ondulato, ed è quello che abbiamo riscontrato nella simulazione.

Le immagini mostrano i profili di velocità per le due ali (figura 17). Notiamo che l'ala wavy è ad incidenza media  $3^\circ$  mentre in generale i suoi profili sono ad incidenza diversa da  $3^\circ$ .

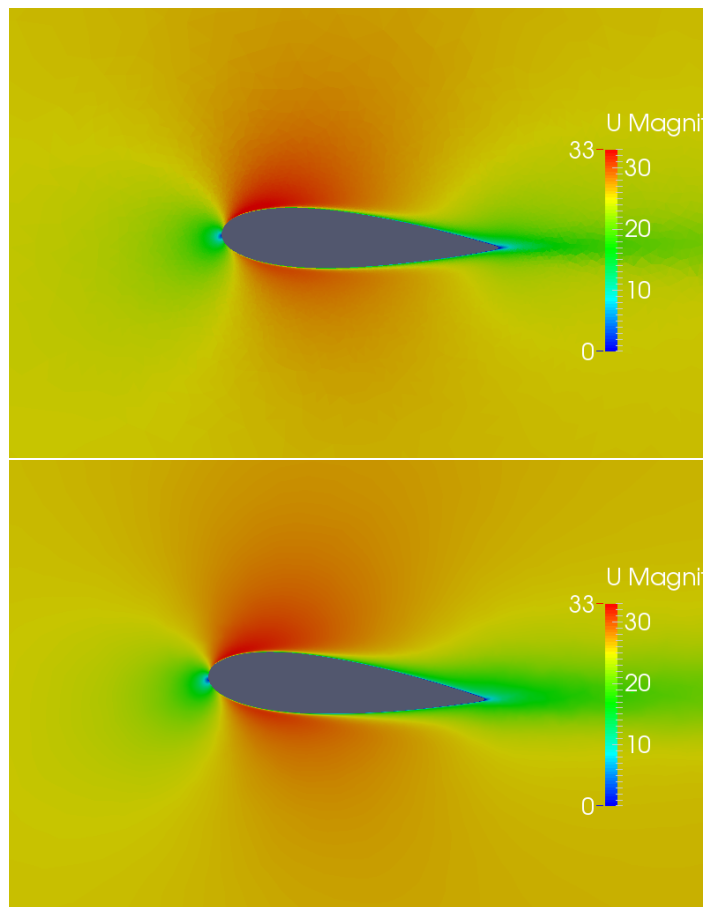


Figure 17: Campo di velocità attorno all'ala retta, sopra e all'ala wavy, sotto, ad incidenza media di  $3^\circ$

Il campo di pressioni invece si presenta così (figura 18):

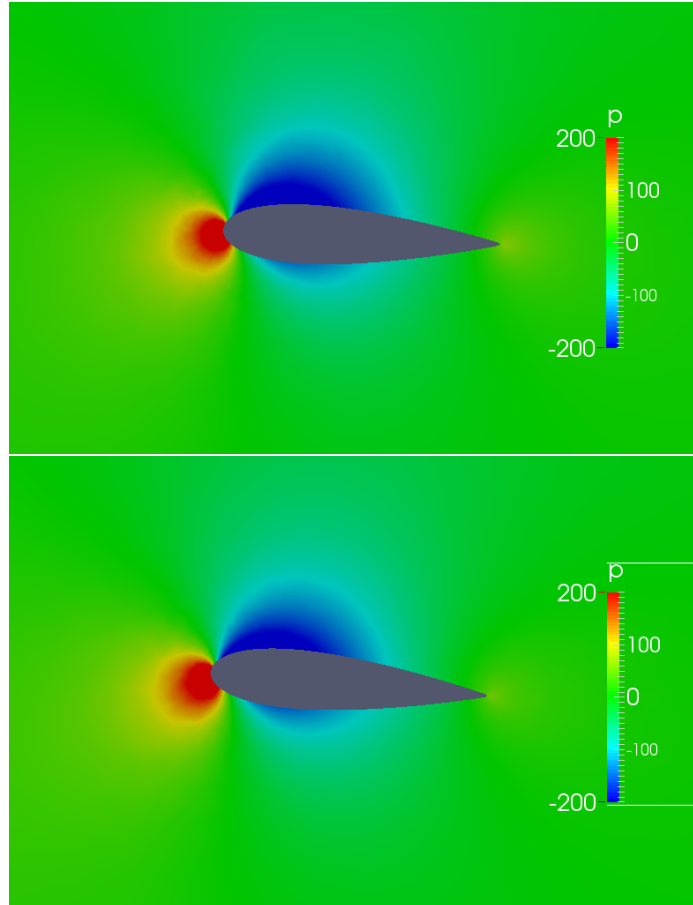


Figure 18: Campo di pressioni attorno all'ala retta, sopra, e all'ala wavy, sotto, ad incidenza media di  $3^\circ$

Non notiamo forti differenze ad incidenze così basse, e il bordo d'attacco ondulato probabilmente aumenta solo la resistenza. Di seguito riportiamo i dati dei coefficienti di portanza e resistenza delle due ali.

$\bar{\alpha} = 3^\circ$	Ala retta	Ala Wavy
$C_L$	0.24477	0.23136
$C_D$	0.10415	0.11196
$E$	2.35	2.07

Table 1: Risultati delle simulazioni a incidenza media di  $3^\circ$

Come ci aspettavamo abbiamo riscontrato un lieve peggioramento a costo di un'ala molto più complessa da realizzare.

I dati del coefficiente di portanza sono in buon accordo con i risultati di N. Rostamzadeh *et al.* [Rostamzadeh2013] mentre per quanto riguarda il coefficiente di resistenza troviamo un valore di un ordine di grandezza più grande, chiaramente poco plausibile. Da quest'ultimo valore troviamo anche un'efficienza molto bassa. Probabilmente questa imprecisione è dovuta al modello usato e a condizioni iniziali e di bordo non ottimali.

### 3.2 Simulazioni ad alta incidenza

A incidenza media di  $9^\circ$  le cose si ribaltano, e come abbiamo un miglioramento con l'ondulazione.

Ecco come si presentano i profili di velocità (figura 19) e di pressione (figura 20) attorno all'ala retta e al profilo di picco dell'ala wavy:

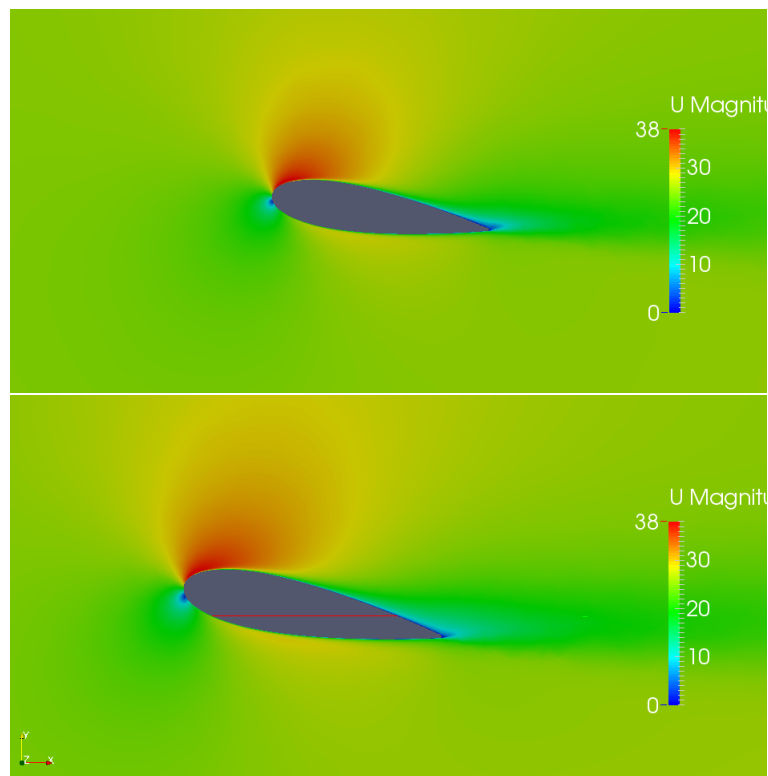


Figure 19: Campo di velocità attorno all'ala retta, sopra, e all'ala wavy, sotto, ad incidenza media di  $9^\circ$

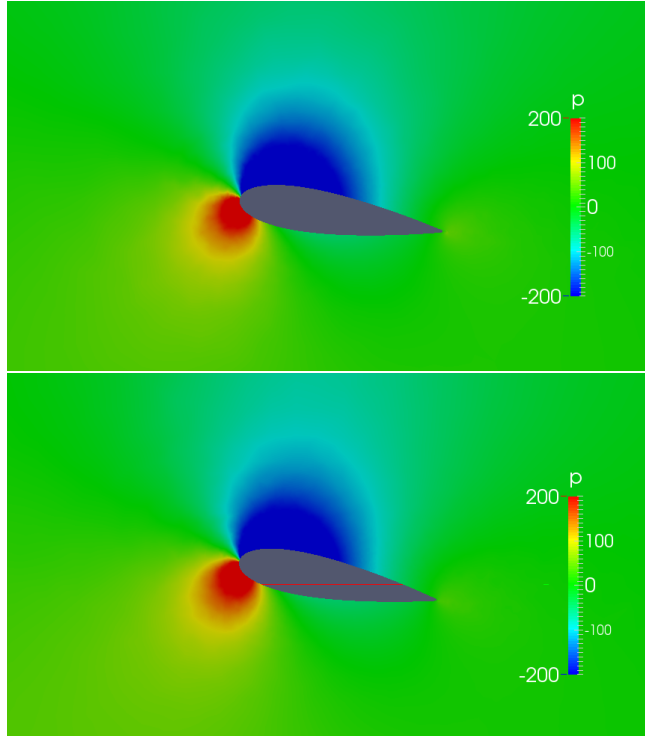


Figure 20: Campo di pressioni attorno all'ala retta, sopra, e all'ala wavy, sotto, ad incidenza media di  $9^\circ$

I risultati sono riportati in tabella seguente, e come nel caso ad incidenza bassa abbiamo i valori del coefficiente di portanza in accordo con i risultati di Rostamzadeh *et al.*, mentre il coefficiente di resistenza si discosta molto dai valori sperimentali.

Ciononostante i  $C_D$  hanno una pendenza di crescita molto simile ai risultati in galleria passando da basse ad alte incidenze, come se la curva fosse traslata in alto, quindi con un  $C_{D0}$  maggiore. Per il  $C_L$  invece notiamo che è maggiore per l'*ala wavy* mentre dai dati sperimentali è il contrario, avendo solo un'abbassamento graduale e non un brusco salto del coefficiente dopo l'angolo di stallo. Si tratta in ogni caso di una prima simulazione, predisposta a molte possibili ottimizzazioni.

$\bar{\alpha} = 9^\circ$	Ala retta	Ala Wavy
$C_L$	0.70508	0.74986
$C_D$	0.14438	0.14776
$E$	4.88	5.07

Table 2: Risultati delle simulazioni a incidenza media di  $9^\circ$



È interessante notare che nel profilo dell'ala wavy ad incidenza geometrica più bassa, nel ventre della sinusoide, abbiamo una velocità maggiore (figura 21), indice di un gradiente di pressione maggiore, giustificando l'asserzione di Rostamzadeh *et al.* secondo cui i profili vicino al ventre stallano prima. La velocità maggiore non può indicare un'incidenza effettiva maggiore rispetto ai profili sui picchi: questo perché il fenomeno di velocità indotta dai vortici è presente, ma non può ribaltare la distribuzione di angoli d'incidenza geometrici iniziali poiché creerebbe un paradosso fenomenologico: per avere una distribuzione di angoli effettivi opposta a quella degli angoli geometrici, ovvero  $\alpha_{eff}$  maggiore sui ventri della sinusoide, servirebbero dei vortici ottenibili solo da una distribuzione di angoli concorde a quella degli angoli geometrici.

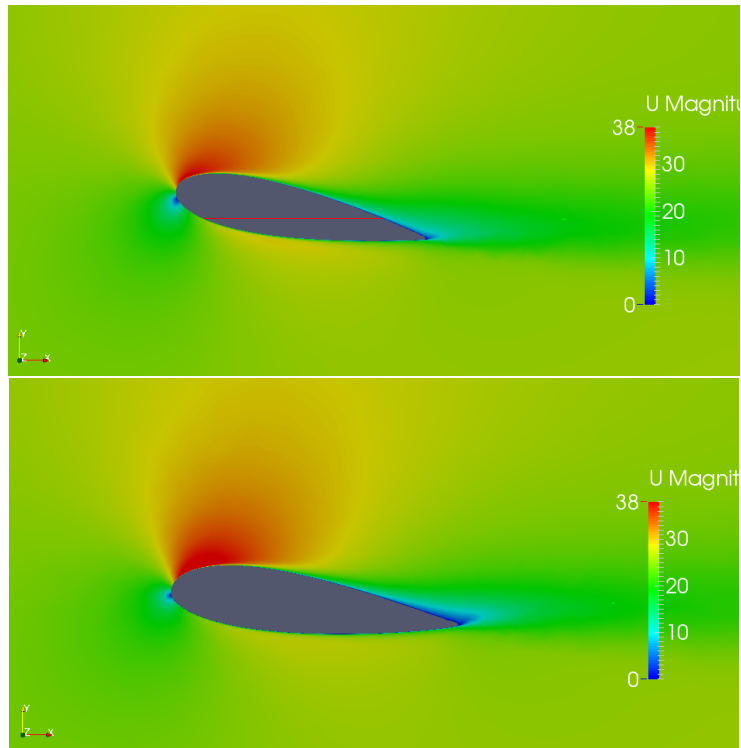


Figure 21: Campo di velocità attorno al profilo sul picco della sinusoide ad incidenza geometrica maggiore, sopra, e sul ventre ad incidenza geometrica minore, sotto, dell'ala wavy

Andando a vedere la distribuzione di pressione sull'ala notiamo, come ipotizzato, che la gola della sinusoide del bordo d'attacco è sede di una pressione maggiore, con uguale pressione al bordo di fuga; quindi di fatto il gradiente di pressione è maggiore.

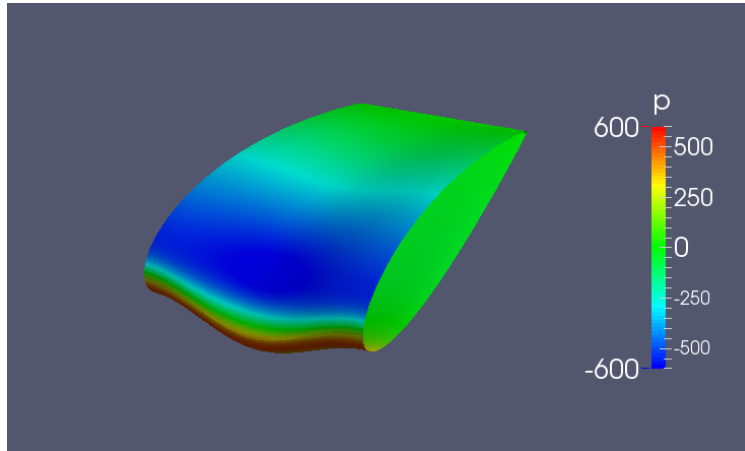


Figure 22: Andamento della pressione sulla parete dell'ala wavy

## 4 Distribuzioni di vorticità e interpretazione del fenomeno

La teoria sulla creazione di vortici, che deriva dal modello semplificato della condizione di Kutta per flusso potenziale, è stata confermata anche dalle simulazioni, in cui sono presenti vortici controrotanti sul dorso dell'ala come mostrato in figura 22.

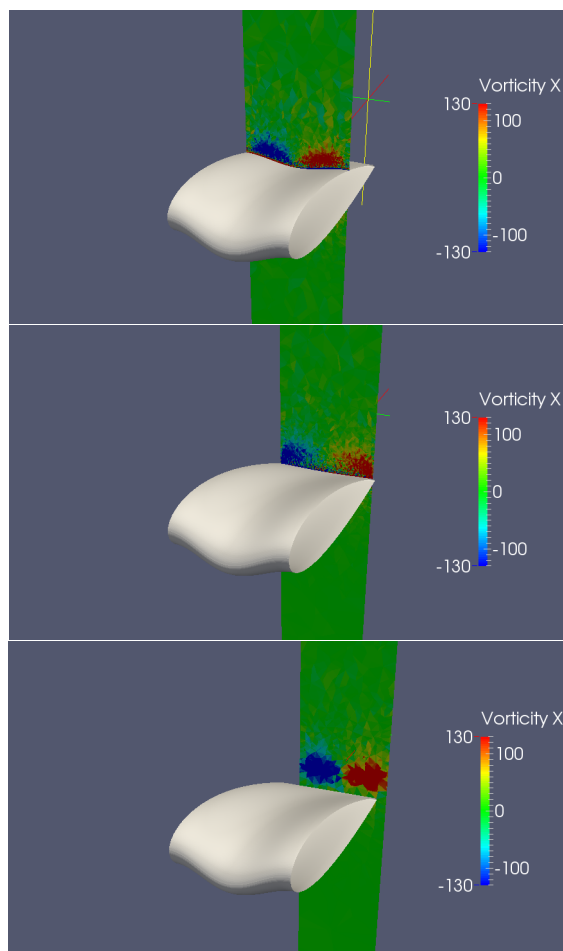


Figure 23: Distribuzione della componente della vorticità lungo la direzione della corda sul dorso del profilo dell'ala wavy

Possiamo imputare a questi vortici la causa del miglioramento del coefficiente di portanza, grazie ad un'accelerazione aggiuntiva del flusso.

La loro natura, come già detto, è figlia della distribuzione sinusoidale degli

angoli effettivi lungo l'ala, e ora che conosciamo con sicurezza il segno della vorticità possiamo dare un'interpretazione più dettagliata.

Iniziamo con il ricordare che  $\Gamma \propto -\alpha_{eff}$  con  $\Gamma < 0$  lungo tutta l'ala per avere portanza, quindi ad un aumento di  $\alpha_{eff}$  abbiamo una diminuzione di circuitazione.

Inizialmente la distribuzione di angoli effettivi coincide con la distribuzione di angoli geometrici, quindi sono maggiori sui picchi della sinusoide e minori sulle gole. Un massimo della sinusoide del bordo d'attacco corrisponde ad un massimo dell'angolo d'attacco effettivo e ad un minimo algebrico di circuitazione  $\Gamma$  (massimo in valore assoluto).

Si instaura un regime di vortici, ma prima di parlare di questo dobbiamo discutere il segno della circuitazione: per come sono definiti gli assi cartesiani nella simulazione, in particolare l'asse  $z$ , la circuitazione deve essere negativa, poiché deve portare ad un aumento di velocità del dorso del profilo.

Passando da un massimo di sinusoide ad un minimo, gli angoli d'attacco diminuiscono e la circuitazione aumenta algebricamente. Poiché è definita negativa, un aumento vuol dire un filetto vorticoso entrante, ovvero ruotante in senso antiorario guardando il bordo d'attacco con l'asse  $y$  che punta in alto. Dato che la direzione dell'asse  $x$  è concorde alle velocità a monte, un filetto antiorario è convenzionalmente negativo, difatti quello che vediamo nella figura 23 è proprio questo.

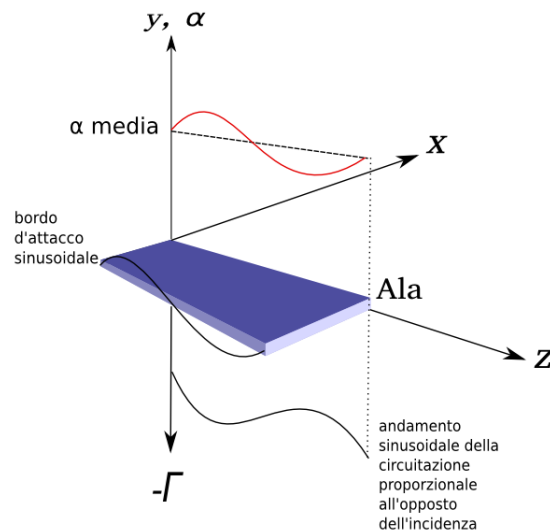


Figure 24: Andamento dell'incidenza e della circuitazione passando da un massimo ad un minimo della sinusoide del bordo d'attacco

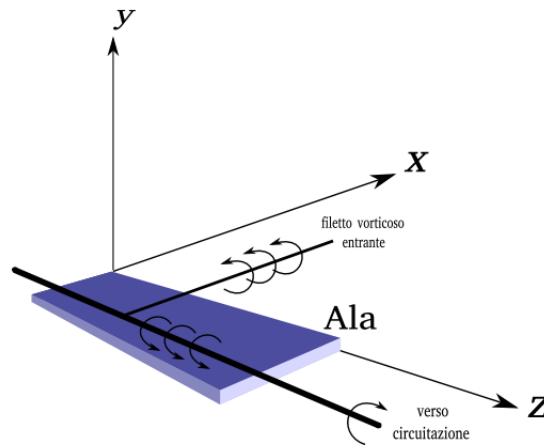


Figure 25: Esempio di filetto vorticoso entrante e convenzionalmente negativo per come è orientato l'asse  $x$  che appare passando da un massimo ad un minimo della sinusoide del bordo d'attacco

Dal minimo al massimo successivo di sinusoide avremo l'opposto, ovvero la circuitazione diminuisce in segno e aumenta in valore assoluto, il che significa un filetto uscente controrotante al primo.

Gli effetti di questi vortici è di creare velocità indotte che attenuano le variazioni degli angoli d'attacco lungo l'apertura alare, quelle variazioni che hanno portato però alla formazione dei vortici stessi. Quindi l'intensità dei vortici diminuirà e contemporaneamente aumenteranno nuovamente le variazioni di angoli d'attacco arrivando a valori d'equilibrio come già detto precedentemente.

Come accennato prima, una cosa che non può succedere è che l'intensità delle velocità indotte sia tale da portare ad angoli d'attacco maggiori nelle gole e minori nei picchi. Questo perchè con un andamento simile di angoli, avremmo i massimi di circuitazione in corrispondenza dei massimi della sinusoide del bordo d'attacco, che porterebbe a vortici rotanti in senso opposto al caso appena visto, aumentando l'incidenza effettiva dei picchi che hanno di partenza un'incidenza geometrica già maggiore, contraddicendo l'ipotesi iniziale. O anche più semplicemente perchè partendo dalla situazione iniziale, i vortici modificano gli angoli attenuando le differenze, ma questo porta ad una diminuzione dell'intensità dei vortici stessi dalla condizione di Kutta, mentre per continuare ad avere angoli effettivi più piccoli in corrispondenza dei picchi l'intensità dovrebbe aumentare.

## 5 Conclusioni

Possiamo dire che le nostre simulazioni hanno qualitativamente confermato i risultati sperimentali riguardo queste particolari tipologie di ali. Delle possibili applicazioni possiamo trovarle dove necessitiamo di alte portanze (o deportanze) anche a velocità relativamente basse e incidenze elevate, poichè questi vortici accelerano il flusso aumentando la differenza di pressione tra ventre e dorso dell'ala. In effetti questa soluzione è già stata implementata in certi alettoni in campo *automotive*

Lo scopo principale è stato quello di impostare una simulazione di fluidodinamica computazionale dai risultati fisicamente plausibili. Si è potuto dedurre e confermare le teorie riguardo il funzionamento di questo bordo d'attacco e uno studio successivo potrebbe portare a valutare l'efficienza, ovvero i coefficienti di portanza e resistenza, al variare dei parametri della sinusoide presente sul bordo di attacco, come l'ampiezza, l'angolo massimo e minimo geometrico, il periodo ecc.

## References

- [Arina2014] Renzo Arina, *Fondamenti di Aerodinamica*, Levrotto&Bella (2014)
- [Landau1953] Lev D. Landau, Evgenij M. Lifshits, *Meccanica dei fluidi*, Editori Riuniti University Press (2013)
- [Kuzmin] Dmitri Kuzmin, *Slide da Institute of Applied Mathematics University of Dortmund*
- [Rostamzadeh2013] N. Rostamzadeh *et al.*, *The effect of undulating leading-edge modifications on NACA 0021 airfoil characteristics*, PHYSICS OF FLUIDS, (2013)
- [Durbin2011] P. A. Durbin, B. A. Petterson Reif, *Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows*, 2nd ed., Wiley (2011)
- [Pope2000] S. P. Pope, *Turbulent Flows*, Cambridge University Press (2000)
- [Wikipedia] [https://it.wikipedia.org/wiki/Fluidodinamica\\_computazionale](https://it.wikipedia.org/wiki/Fluidodinamica_computazionale)