



POLITECNICO DI TORINO
Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di laurea

Convezione di Rayleigh-Bénard: aspetti teorici e sperimentali

Relatore

prof. Stefania Scarsoglio

Candidato

Gianluca Carossino
matricola: 219554

Settembre 2017

Sommario

L'elaborato riassumerà i principali aspetti della convezione Rayleigh-Bénard in quanto problema paradigma per molti aspetti della fisica (scambio termico, stabilità fluidodinamica, formazione di strutture regolari), evidenziando risultati ottenuti sia teoricamente che sperimentalmente. Si svilupperà matematicamente l'analisi lineare della stabilità per il problema di Rayleigh-Bénard secondo quanto realizzato da Rayleigh (1916), sottolineandone pregi, limiti e sviluppi successivi.

Indice

Sommario	II
1 Introduzione	1
1.1 Obiettivi	1
1.2 Rassegna storica	1
2 Analisi teorica	5
2.1 Definizione delle equazioni	5
2.1.1 Un problema di stabilità	5
2.1.2 Concetti basilci	6
2.1.3 Equazioni del modello - Approssimazione di Boussinesq Oberbeck	7
2.1.4 Condizioni al contorno	9
2.1.5 Adimensionalizzazione e parametri di controllo	10
2.1.6 Soluzione primaria	12
2.2 Studio della stabilità	13
2.2.1 Analisi lineare della stabilità	13
2.2.2 Analisi non-lineare	20
2.2.3 Soluzione secondaria e cenni di instabilità	22
2.3 Scambio termico	26
2.3.1 Regimi convettivi	26
3 Metodi sperimentali e numerici	29
3.1 Tipici apparati sperimentali	29
3.1.1 Scelta del fluido di lavoro	32
3.1.2 Tecniche di visualizzazione	35
3.2 Risultati sperimentali	37
3.3 Cenni di analisi numerica	42
4 Conclusioni	44
Bibliografia	45

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Obiettivi

Lo scopo di questo lavoro è quello di introdurre il lettore alla convezione Rayleigh–Bénard, in quanto problema fluidodinamico classico di indubbio interesse sotto molti punti di vista e per numerose discipline: la matematica applicata, la meteorologia, l'ingegneria, la geofisica e l'astrofisica. Esso rappresenta un “problema modello” per una moltitudine di fenomeni fisici di interesse tecnologico e non, e costituisce oramai un paradigma per l'investigazione scientifica nei fenomeni di convezione naturale, per ciò che riguarda l'analisi della stabilità dei sistemi continui e per lo studio della formazione di schemi modulari in natura. L'approfondimento di questo argomento è stato per me di grande interesse e sono stato profondamente colpito dalla grandissima varietà di problemi di carattere teorico e pratico che si possono celare dietro un fenomeno, solo in apparenza, intuitivo e semplice. Nei prossimi paragrafi si darà dapprima una presentazione storica del problema di Rayleigh–Bénard, andando quindi a introdurre in maniera discorsiva alcune delle varie manifestazioni della convezione in natura; quindi nei seguenti capitoli si svilupperà una analisi più specifica del problema inteso in senso accademico, presentando almeno sommariamente, con la pretesa di fornire una ‘visione d'insieme’ dell'argomento, i primi strumenti teorici di analisi e le principali tecniche sperimentali e numeriche utilizzate nello studio della RBC (Convezione Rayleigh–Bénard).

1.2 Rassegna storica

Storicamente il problema della RBC fu studiato per primo da Bénard, che nei primi del 1900 eseguì i primi esperimenti quantitativi sulla convezione termica di uno strato di fluido scaldato del basso. I risultati che egli ottenne nei suoi lavori, poi riportati nella sua dissertazione di dottorato, furono poi in seguito da lui e dai suoi collaboratori analizzati e interpretati teoricamente, ma si deve a Lord Rayleigh

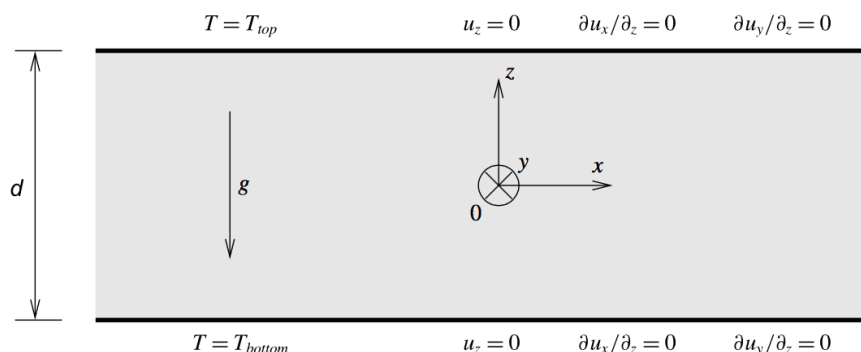


Figura 1.1. Si parla di convezione di Rayleigh Benard quando si studia il comportamento di uno strato infinito di fluido omogeneo scaldato dal basso o raffreddato dall'alto: per effetti di dilatazione termica e galleggiamento si genera un movimento di natura convettiva nel fluido.

(1916) la prima analisi matematica quantitativa corretta che spiega i risultati osservati nell'esperimento di Bénard. Il fisico francese lavorò con sottili (dell'ordine del millimetro) strati di fluido (bianco di balena) giacenti su una piastra metallica mantenuta ad una temperatura uniforme e aventi la superficie superiore libera; in queste condizioni Bénard si accorse che, dipendendo dal gradiente di temperatura che imponeva nel fluido (controllabile attraverso la regolazione della temperatura della piastra metallica sottostante), poteva ottenere differenti condizioni di moto nel sottile strato fluido: aumentandolo si ottenevano dapprima configurazioni stazionarie di quiete e quindi, superato un valore soglia, configurazioni a celle convettive di varia forma (Bénard ottenne celle esagonali che tassellavano il suo apparato sperimentale, vedi figura 1.2) e quindi attraverso altre transizioni, configurazioni di moto turbolento. Nei suoi studi Bénard attribuì un importante ruolo nella formazione delle celle convettive alla tensione superficiale del liquido (ed in particolare alla sua forte dipendenza dalla temperatura), ma non elaborò teoricamente questo aspetto, limitandosi a misurare la grandezza delle celle in relazione alla profondità dello strato di fluido (vedi figura 1.3). Come anticipato, l'analisi fu sviluppata in seguito da Lord Rayleigh, a partire dalle equazioni di Navier-Stokes, ignorando invece il ruolo della tensione superficiale e fu la prima a spiegare di come il meccanismo di instabilità dipendesse dal bilanciamento degli effetti viscosi e di galleggiamento nel fluido (che si manifestano poiché il fluido, scaldato da sotto, si dilata e si rende più leggero del suo intorno). L'indagine portò alla definizione del numero di Rayleigh ($Ra = \frac{\alpha \Delta T g d^3}{\nu \kappa}$) ed al calcolo teorico di un suo valore soglia oltre il quale si innesca il movimento del fluido: tale sviluppo è basicamente riportato nel successivo capitolo ed ha il merito di fornire un modello teorico del fenomeno senza però adattarsi bene ai risultati sperimentali di Bénard (in particolar modo per quanto riguarda le dimensioni delle celle convettive misurate da questo). Dagli anni venti ad oggi si è

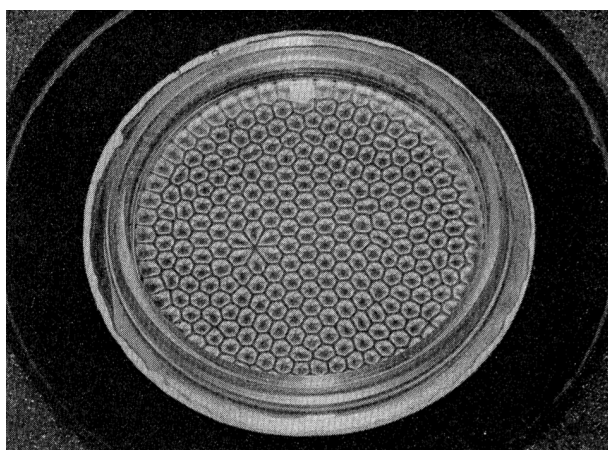


Figura 1.2. La foto riporta una osservazione di un pattern a celle esagonali osservato grazie a polvere di alluminio in un olio di silicone; sulla sinistra è possibile notare una imperfezione della struttura

approfondita molto l'interpretazione del meccanismo convettivo ed anche grazie ad esperimenti condotti in microgravità su Apollo XIV e Apollo XVII si è dimostrata senza ambiguità la forte influenza della tensione superficiale nella generazione delle celle convettive osservate a suo tempo da Bénard; inoltre per fluidi Newtoniani e per i quali vale l'approssimazione di Boussinesq anche le predizioni teoriche di Rayleigh sono state verificate.

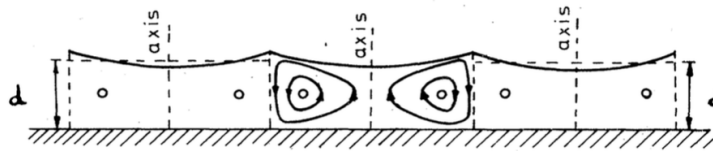


Figura 1.3. Interpretazione originale delle celle osservate da Bénard: si nota come la variazione di livello del pelo libero sia legata al moto convettivo

Capitolo 2

Analisi teorica

2.1 Definizione delle equazioni

2.1.1 Un problema di stabilità

È piuttosto evidente per chi è del mestiere, che il problema che ci accingiamo a trattare è innanzitutto un problema di stabilità idrodinamica: si ha una configurazione per la quale la soluzione alle equazioni differenziali che risolvono il modello (costituito da equazioni differenziali alle derivate parziali) dipende da uno o più parametri liberi e si dà il caso che, in corrispondenza di alcuni valori di questi, le soluzioni delle equazioni siano qualitativamente differenti (ad esempio per il parametro Ra : a valori molto elevati si hanno soluzioni turbolente mentre a Ra inferiori o negativi si ha una soluzione statica). Il concetto di stabilità di una soluzione (come si può facilmente immaginare le equazioni che modellizzano il problema ne hanno molteplici), sarebbe più intuitivo in un caso meccanico anziché fluidodinamico, ma è tuttavia formalizzabile con la teoria di Lyapunov che fornisce una condizione sufficiente di stabilità.

Stabilità Un punto di equilibrio \mathbf{x}_0 si dice stabile se per ogni intorno U di \mathbf{x}_0 esiste un intorno $V \subset U$ tale che le orbite che partono da V rimangono dentro U per qualsiasi $t > 0$.

Stabilità asintotica Un punto è asintoticamente stabile se è sia stabile che attrattivo, ovvero esiste δ tale che $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = 0$

Primo criterio di Lyapunov Sia \mathbf{x}_0 un punto di equilibrio per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ e sia $\mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \dot{\delta\mathbf{x}}$ il sistema linearizzato intorno a \mathbf{x}_0 (con $\mathbf{x} = \delta\mathbf{x} + \mathbf{x}_0$, $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$); il criterio asserisce che il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ è asintoticamente stabile se il sistema linearizzato $\mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \dot{\delta\mathbf{x}}$ è asintoticamente stabile.

Secondo criterio di Lyapunov Dato un intorno $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^n$ del punto \mathbf{x}_0 per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, se esiste una funzione $V(\mathbf{x}, t) : D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $V > 0$ e $\frac{dV}{dx} < 0$ allora \mathbf{x}_0 è asintoticamente stabile per $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

Vale infine la pena di sottolineare il fatto che una soluzione $\tilde{\mathbf{x}}$ sia stabile per un dato intervallo di parametri non implica direttamente che essa sia ciò che si andrà ad osservare sperimentalmente in tali condizioni: saranno condizione necessaria anche le adeguate condizioni al contorno ed iniziali per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ in maniera tale che dato un punto di partenza \mathbf{x}_0 la soluzione cercata $\tilde{\mathbf{x}}$ cada nel bacino di attrazione di $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ per tale intervallo di parametri (la stabilità non implica l'attrattività del punto di equilibrio, entrambe condizioni necessarie perché si osservi la soluzione).

2.1.2 Concetti basici

Per rompere il ghiaccio con la RBC possiamo sviluppare alcune considerazioni sulla stabilità di una bolla di fluido di raggio R immersa in un intorno più freddo. Per motivi termodinamici la densità di questa bolla (che consideriamo uniforme in tutte le sue proprietà) sarà più bassa rispetto alla densità del fluido circostante, perciò per il principio di Archimede risentirà di una forza di galleggiamento $F_{gall} = \Delta\rho gV$ che la spingerà verso l'alto ed inizierà a muoversi. Il movimento sarà ostacolato dall'attrito viscoso, in prima approssimazione dell'ordine di $F_{visc} = \mu RV$. Contemporaneamente al movimento, la bolla, più calda del fluido che la circonda, andrà diffondendo calore, con un tempo caratteristico $\tau = \frac{\kappa}{R^2}$: si può in prima analisi ipotizzare che la bolla sia per diffusione, all'istante t , ad una temperatura pari a quella del fluido che la circondava all'istante $t - \tau$: è perciò possibile valutare la differenza ΔT di temperatura tra bolla e intorno come $\Delta T = |\nabla T| \tau v$. Ciò genera una forza di galleggiamento $F_{gall} \approx \rho \alpha \Delta T R^3 g$ (dove $\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$). Lo stato di equilibrio di quiete sarà in equilibrio instabile quando la forza F_{gall} supererà la forza viscosa $F_{gall} > F_{visc}$ da cui $\frac{\alpha \Delta T g R^3}{\nu \kappa} > O(1)$. La quantità a sinistra è nota come numero di Rayleigh e si è qui mostrato come esista una soglia per Ra oltre la quale si ha instabilità della configurazione di quiete.

Finora abbiamo trascurato la compressibilità del fluido; consideriamo adesso a titolo di esempio (come caso di interesse per la circolazione atmosferica e i moti oceanici) gli effetti di compressibilità. Studiamo in via semplificativa una bolla di fluido separata dal fluido circostante da una membrana ideale, adiabatica e impermeabile alla materia (si trascurano in pratica i fenomeni di trasporto molecolare collegati a ν e κ); tale membrana è inoltre in grado di espandersi e contrarsi liberamente secondo i gradienti di pressione. Sia $\rho(z)$ la densità del fluido nella bolla, ad una quota z . Data la natura adiabatica e isoentropica del movimento si ha, per un piccolo spostamento δz , $\rho(z + \delta z) = \rho(z) + \chi_S \rho \delta p$ (con $\chi_S = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}|_S$, compressibilità adiabatica). Detta $\bar{\rho}$ la densità del fluido circostante la bolla, la forza di galleggiamento per unità di massa che agisce su questa, a seguito di un piccolo spostamento

δz , sarà: $\frac{g}{\rho}(\bar{\rho}(z + \delta z) - \rho(z + \delta z)) = \frac{g}{\rho}(\frac{\delta \bar{\rho}}{\delta z} - \frac{\delta \bar{\rho}}{\delta z}|_{adiab})\delta z = \frac{d^2}{dt^2}\delta z$ (dove nell'ultimo termine si ha uguagliato la forza di galleggiamento alla accelerazione per il secondo principio della dinamica). Questa equazione differenziale è nota e possiamo riscrivere $N^2\delta z = \frac{d^2}{dt^2}\delta z$ con $N^2 = \frac{g}{\rho}(\frac{\delta \bar{\rho}}{\delta z} - \frac{\delta \bar{\rho}}{\delta z}|_{adiab})$. N prende il nome di frequenza di Brunt–Väisälä: corrisponde alla pulsazione naturale di oscillazione di una colonna di fluido a cui si da una piccola perturbazione in posizione iniziale z (il periodo $T = \frac{2\pi}{N}$ varia tipicamente da alcuni minuti per masse d'aria e circolazione atmosferica fino ad alcune ore nei moti oceanici). La pulsazione di Brunt–Väisälä può essere utilizzata come indice per la stabilità: un valore positivo di N^2 indica stabilità mentre un valore negativo darà luogo a soluzioni instabili (divergenti nel tempo in questo caso). Questa conclusione, apparentemente paradossale, per cui uno strato fluido è instabile se instabile meccanicamente (ovvero $N^2 < 0$) si corregge considerando i fenomeni di trasporto: riscrivendo $Ra = \frac{-N^2 d^4}{\nu \kappa}$ (dopo alcuni passaggi riscontrabili in [1]) si ottiene $-N^2 > \frac{\kappa \nu}{d^4}$, che amplia il campo di stabilità per N^2 introducendo i fenomeni di trasporto di calore e quantità di moto.

2.1.3 Equazioni del modello - Approssimazione di Boussinesq Oberbeck

Per analizzare rigorosamente il problema è necessario usare le equazioni di Navier-Stokes che sotto l'ipotesi che il fluido sia modellizzabile come un mezzo continuo e deformabile esprimono i bilanci di massa, quantità di moto ed energia per un volume di controllo. Tali equazioni, ricavabili con alcuni teoremi di analisi, si presentano in forma differenziale come segue:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(c_v T) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(c_v T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \Phi \quad (2.3)$$

con:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \gamma_{ij} - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \gamma_{kk} \quad (2.5)$$

$$\Phi = 2\mu \gamma_{ij}^2 - \frac{2}{3} \mu (\gamma_{ii})^2 \quad (2.6)$$

dove gli x_i rappresentano le coordinate cartesiane (per $i = \{1,2,3\}$), t è il tempo, ρ rappresenta la densità del fluido, u_i il campo di velocità, T il campo di temperatura, f_i il vettore locale di forze volumetriche, p è la pressione, τ_{ij} è il tensore degli sforzi, γ_{ij} è il tensore delle velocità di deformazione (legato al precedente dalla equazione costitutiva del fluido, richiamata in 2.5 nel caso di fluido newtoniano) e Φ rappresenta il funzionale di Rayleigh, misura dell'energia meccanica dissipata viscosamente; il simbolo δ_{ij} indica il delta di Kronecker ed i vari μ , c_v , k sono proprietà caratteristiche del fluido, viscosità, calore specifico a volume costante e conducibilità termica rispettivamente.

Il sistema di equazioni (2.1)-(2.3) è in generale di complicata soluzione e nella grande maggioranza dei casi si possono ottenere soluzioni solamente per via numerica. E' possibile semplificare le equazioni per confronto tra termini conservando solamente i termini più significativi. Per risolvere il problema vi è solitamente bisogno di una ulteriore equazione, che è data dalla funzione di stato del fluido in oggetto; dipendendo dalla sostanza e dal modello di descrizione adottato questa funzione può assumere forme molto diverse tra loro rendendo il sistema molto variabile di problema in problema. Va inoltre aggiunto che per la soluzione è necessario conoscere i valori dei parametri che compaiono nelle equazioni (ρ , ν , κ , μ , c_v , α) che a loro volta sono funzioni delle variabili di stato: ciò complica a dismisura il problema ed è necessaria una semplificazione.

L'approssimazione storicamente più utilizzata è quella attribuita a Boussinesq e Oberbeck per la quale:

- si suppongono costanti tutti coefficienti di trasporto (μ , κ , c_p , ...)
- si suppone la velocità di convezione molto inferiore alla velocità del suono del fluido (in questa ipotesi la comprimibilità è infinita e il numero di Mach nullo) ed ogni accelerazione si ipotizza molto inferiore a g
- le variazioni di densità dovute alla comprimibilità sono trascurate: si suppone costante la densità $\rho = \rho_0$, fatta eccezione nel termine di galleggiamento. L'equazione di stato diventa $\rho = \rho_0(1 - \alpha\Delta T)$
- si suppone trascurabile l'energia dissipata per attrito viscoso all'interno del fluido $\Phi=0$

In queste ipotesi il sistema di equazioni che regola il problema diventa:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \left(1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0}\right) f_i + \nu \nabla^2 u_i \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \kappa \nabla^2 T \quad (2.9)$$

con $\delta\rho = -\rho_0\alpha(T - T_0)$.

Si potrebbe qui discutere della validità di questa semplificazione ma ciò appesantirebbe notevolmente la trattazione; un criterio semplice è immediato per valutare l'attendibilità dell'approssimazione di Boussinesq è il seguente:

$d \ll \min\{D_\rho, D_T, D_p\}$ con $D_f = \left| \frac{1}{f_0} \frac{\partial f}{\partial z} \right|^{-1}$: sostanzialmente si richiede che la variazione D_f della generica proprietà fisica f lungo lo spessore dello strato fluido sia trascurabile rispetto alla stessa.

In letteratura si trovano diversi altri criteri immediati per valutare la attendibilità dell'approssimazione di Boussinesq in modo più o meno immediato e preciso.

2.1.4 Condizioni al contorno

Il sistema di equazioni già definito descrive l'evoluzione spaziale e temporale dello strato fluido e necessita ovviamente di condizioni al contorno per essere risolto. Questo passaggio è forse il più delicato nella definizione matematica del problema e merita particolare attenzione. In primo luogo bisogna notare che una appropriata definizione delle condizioni iniziali e al contorno dovrebbe comprendere valori stocastici per le proprietà fluide; per semplicità non considereremo questo spinoso aspetto. In secondo luogo, considereremo solamente le soluzioni stazionarie per il problema, in modo da poter ignorare la dipendenza temporale e quindi le condizioni iniziali. Inoltre considerando il problema idealizzato (strato fluido infinitamente esteso), potremo non preoccuparci delle condizioni sui bordi laterali (inevitabili in un apparato sperimentale e determinanti spesso la natura del flusso convettivo osservato).

Il problema originale di Rayleigh-Bénard può avere le più diverse condizioni al contorno, sia termiche che cinematiche. Dal punto di vista termico i bordi inferiore e superiore ($z = \pm d/2$) possono essere mantenuti a temperatura costante fino a essere irradiati con un flusso di calore costante; dal punto di vista cinematico possono essere liberi ('stress free', ovvero al pelo libero non si hanno tensioni) o vincolati da piastre rigide; esistono inoltre una infinità di configurazioni intermedie a quelle descritte. Senza perdere in generalità potremmo studiare le condizioni al contorno immaginando che lo strato di fluido sia confinato da altri due strati di fluido (o solido) di parametri ν_s, κ_s differenti (ovviamente per un solido $\nu_s \rightarrow \infty$).

In generale dovremmo imporre la impermeabilità della superficie di interfaccia tra i fluidi, le condizioni termiche (continuità di temperatura e flusso di calore) e dinamiche (bilancio delle forze scambiate nell'interfaccia, esprimibili attraverso i relativi tensori). Tale analisi si svolgerebbe calcolando prima i campi di velocità e temperatura negli strati di fluido fittizi e quindi esplicitando in base a questi le condizioni al contorno per il fluido in osservazione: ciò porterebbe alla definizione

di due ‘numeri di Biot’ B_κ e B_ν che descriverebbero dal punto di vista termico e cinematico la natura della superficie di bordo in un unico parametro secondo le equazioni:

$$T = B_\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.10)$$

$$v = B_\nu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.11)$$

con T, v opportunamente adimensionalizzati.

I casi $B_\kappa = \{0, \infty\}$ corrispondono ai casi limite sopra descritti: $B_\kappa = 0$ significa che alla superficie vi è una temperatura controllata; $B_\kappa \rightarrow \infty$ significa che la superficie è isolata perfettamente. Analogamente $B_\nu = 0$ è analogo al caso di piastre rigide che contengono il fluido mentre $B_\nu \rightarrow \infty$ sarebbe il caso ‘stress free’, avente sforzi nulli.

Una analisi del genere sarebbe superflua per l’analisi di stabilità che segue. Per i casi di nostro interesse ci limiteremo a definire la temperatura delle superfici controllata ($B_\kappa = 0$) e a distinguere i casi limite di parete solida e pelo libero (rispettivamente $B_\nu = 0$ e $B_\nu \rightarrow \infty$). Si ha:

$$\begin{cases} T|_{z=+\frac{d}{2}} = T_{top} \\ T|_{z=-\frac{d}{2}} = T_{bottom} \end{cases} \quad (2.12)$$

per la temperatura. Per quanto riguarda la velocità, detto $\mathbf{u} = (u, v, w)$, nella condizione di piastra rigida sarà necessariamente per continuità $u = 0, v = 0, w = 0$ per qualsiasi punto $(x, y, z = \pm \frac{d}{2})$. Da ciò segue per l’equazione di continuità: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0$. Per una superficie libera da sforzi $\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$ e $\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$; ipotizzando $w = 0$ per ogni punto $(x, y, z = \pm \frac{d}{2})$ è immediato ottenere $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$; derivando ora rispetto a z l’equazione di continuità, utilizzando il teorema delle derivate in croce: $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$.

Riassumendo le condizioni per w (che sarà la variabile di interesse nello studio della stabilità) sono (rispettivamente per piastre rigide e pelo libero):

$$\begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

2.1.5 Adimensionalizzazione e parametri di controllo

Le equazioni viste finora si possono adimensionalizzare secondo una pratica comune nello studio dei problemi differenziali per cui si riducono al minimo il numero di

parametri liberi al fine di poter studiare il problema in configurazioni ‘simili’: la definizione di gruppi adimensionali fornisce inoltre una visione dell’importanza relativa di ogni termine delle equazioni se ogni grandezza è stata scalata con costanti del suo ordine di grandezza. Il modo più comune di scalare le equazioni per il problema in oggetto utilizza d come unità di lunghezza, il tempo diffusivo del calore $\frac{d^2}{\kappa}$ come unità di tempo, ΔT come unità di temperatura.

Si ottiene in forma differenziale:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla\varpi + Ra\theta \cdot \mathbf{k} + \nabla^2\mathbf{u} \quad (2.16)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \nabla^2\theta \quad (2.17)$$

Dove $\varpi = \frac{P}{\rho\kappa}$ con $P = p + \rho g d$ pressione motrice.

I parametri adimensionali che possono in generale apparire sono:

numero di Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ è un parametro proprio del fluido in analisi, rapporto tra diffusività cinematica e termica; è una proprietà intensiva del sistema e non può modificarsi senza cambiare il fluido o le sue proprietà.

numero di Rayleigh $Ra = \frac{\alpha d^3 \Delta T g}{\nu \kappa}$ è il parametro principe della convezione Rayleigh-Bénard ed esprime in qualche modo l’importanza relativa delle forze di galleggiamento rispetto all’energia dissipata da attrito viscoso e conduzione termica nel fluido.

numero di Grashof $Gr = \frac{\alpha d^3 \Delta T g}{\nu^2}$ esprime il rapporto tra l’ordine di grandezza del termine di galleggiamento e quello delle forze viscoso; in quanto tale è un diretto indicatore del termine dominante nel bilancio di quantità di moto. Si può esprimere come $Gr = Ra \cdot Pr$.

‘**aspect ratio**’ $\Gamma = \frac{L}{d}$ questo parametro è molto utilizzato nella pratica sperimentale piuttosto che nell’analisi teorica (dove si idealizza lo strato fluido a infinitamente esteso almeno nei casi più semplici); esprime il rapporto tra la dimensione tipica orizzontale L e quella verticale d (idealmente $\Gamma \rightarrow \infty$). Può essere un indicatore dell’errore commesso nel trascurare gli effetti di bordo.

numeri di Biot B_ν, B_κ già introdotti a grandi linee nel paragrafo precedente, in una analisi più dettagliata possono essere in quanto parametri utilizzati per stabilire la natura delle condizioni al contorno.

numero di dissipazione $D = \frac{\alpha c_p d}{c_p}$ esso rappresenta il numero di Eckert $Ec = \frac{v^2}{c_p T}$ in convezione naturale (dove la velocità è dell’ordine di $v \approx \sqrt{g\alpha\Delta T d}$, ottenibile supponendo comparabili gli ordini di grandezza del termine viscoso

e convettivo nel bilancio di quantità di moto). Questo numero valuta l'importanza del termine Φ e non apparirà nella trattazione essendo un effetto trascurato dall'approssimazione di Boussinesq.

numero di Reynolds $Re = \frac{\rho v d}{\mu}$ a differenza di molti problemi di meccanica dei fluidi, qui il numero di Reynolds non rappresenta un vero e proprio parametro di controllo quanto una conseguenza della convezione naturale e quindi un valore indotto da altri parametri (Ra, Pr).

numero di Bond $Bo = \frac{\rho g L^2}{\sigma}$ è un parametro che non compare nella trattazione teorica in quanto legato alla tensione superficiale σ : esso è rapporto tra la tendenza gravitazionale a mantenere piatto un pelo libero rispetto a quella della formazione di un menisco su lunghezze di scala L .

numero termico di Marangoni $Ma = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial T} \Delta T d}{\rho \nu \kappa}$ è il rapporto tra le tensioni superficiali dovute ad inomogeneità di temperatura e i fenomeni dissipativi associati a queste; nuovamente questo parametro non compare ma può utilizzato come indicatore per studiare la stabilità delle celle osservate da Bénard.

numero di increspamento $Cr = \frac{\rho \nu \kappa}{\sigma d}$ è un parametro che caratterizza l'increspabilità della superficie. Il caso di superficie libera da sforzi corrisponde a $Cr \rightarrow 0$.

numero di Nusselt $Nu = \frac{q_{tot}}{q_{cond}}$ è solitamente utilizzato nei problemi di scambio termico per valutare il flusso di calore convettivo rispetto a quello conduttivo. Si ha ovviamente $Nu = 1$ per la soluzione primaria, $Nu > 1$ per Ra crescenti.

2.1.6 Soluzione primaria

La soluzione primaria al problema è facilmente ottenibile per via diretta considerando che è stazionaria e si caratterizza per uno stato di quiete del fluido. Imponendo $u_i = 0$ nelle (2.8) (2.9) si ottiene (considerando $\mathbf{f} = (0, 0, -g)$ e $\delta\rho = -\rho_0\alpha(T - T_0)$):

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \left(1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0}\right) g = 0 \\ \nabla^2 T = 0 \Rightarrow T = \frac{T_{top} + T_{bottom}}{2} + \frac{T_{top} - T_{bottom}}{d} z \end{cases} \quad (2.18)$$

da cui, chiamando $\beta = \frac{T_{bottom} - T_{top}}{d}$ il gradiente avverso di temperatura, e T_o, ρ_o, p_o le grandezze a $z = 0$:

$$\mathbf{u}^S = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

$$T^S = T_0 - \beta z \quad (2.20)$$

$$\rho^S = \rho_0 (1 + \alpha\beta z) \quad (2.21)$$

$$p^S = p_0 - \rho_0 g z - \frac{1}{2} \rho_0 \alpha \beta g z^2 \quad (2.22)$$

L'apice S è utilizzato qui per caratterizzare la soluzione primaria che risulta essere stazionaria.

2.2 Studio della stabilità

2.2.1 Analisi lineare della stabilità

Per formulare l'analisi lineare della stabilità partiamo dalle equazioni di Boussinesq per il problema e dalla sua soluzione primaria di quiete, ipotizzando una piccola perturbazione che indicheremo con il simbolo \sim (tilde). Così facendo stiamo linearizzando il problema intorno alla soluzione primaria. Si ha:

$$\begin{cases} T = T^S + \tilde{T} \\ p = p^S + \tilde{p} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^S + \tilde{\mathbf{u}} \end{cases} \quad (2.23)$$

Sostituendo (2.23) nelle (2.8) (2.9) e ignorando i termini di ordine superiore al primo (supponendo i \tilde{x} infinitesimi, per semplicità di notazione si omettono i \sim):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\delta p}{\rho_0} \right) + g\alpha T \lambda_i + \nu \nabla^2 u_i \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \beta w + \kappa \nabla^2 T \quad (2.25)$$

detto $\lambda = (0,0,1)$.

L'equazione (2.24) si può semplificare eliminando il contributo della pressione; per fare ciò è sufficiente applicare due volte l'operatore rotore e moltiplicare scalarmente l'equazione per λ ; in notazione diadica $\nabla \times \mathbf{x} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k$ dove ϵ_{ijk} è il simbolo di Levi-Civita. Sviluppando i conti:

$$\Rightarrow \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial t} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\delta p}{\rho_0} \right) + \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} g\alpha T \lambda_k + \nu \nabla^2 \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k \quad (2.26)$$

definiamo $\omega_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ la vorticità: (il contributo delle pressioni scompare per il teorema delle derivate in croce e la definizione di ϵ_{ijk})

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega_i}{\partial t} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial T}{\partial x_j} g\alpha \lambda_k + \nu \nabla^2 \omega_i \quad (2.27)$$

Applicando nuovamente l'operatore rotore $\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}$ alla componente in i sopra scritta si ottiene:

$$\Rightarrow \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_l} g \alpha \lambda_k + \nu \nabla^2 \epsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \quad (2.28)$$

Considerando ora l'identità $\delta - \epsilon$ per cui $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker, si può scrivere (facendo uso di $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$):

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) - \nabla^2 u_i = -\nabla^4 u_i \quad (2.29)$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial T}{\partial x_l \partial x_j} \lambda_m = \lambda_j \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i} - \lambda_i \nabla^2 T \quad (2.30)$$

Sostituendo questi risultati in (2.28) e moltiplicando per λ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_i = g \alpha \left(\lambda_i \nabla^2 T - \lambda_j \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \nu \nabla^2 u_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = g \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \nu \nabla^4 w \quad (2.31)$$

In definitiva si hanno le equazioni per w , T (perturbazioni) le equazioni con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = g \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \nu \nabla^4 w \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \beta w + \kappa \nabla^2 T \\ T|_{z=\pm \frac{d}{2}} = 0 \\ w|_{z=\pm \frac{d}{2}} = 0 \\ \frac{\partial^p w}{\partial z^p} \Big|_{z=\pm \frac{d}{2}} = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

(con $p = \{1,2\}$, secondo le condizioni al contorno).

Metodo dei modi normali

Il metodo dei modi normali prevede, data la simmetria del problema lungo gli assi x e y che sia possibile sviluppare in serie di Fourier le piccole perturbazioni \sim , che assumono la forma:

$$\begin{cases} w = W(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + \xi t] \\ T = \Theta(z) \exp[i(k_x x + k_y y) + \xi t] \end{cases} \quad (2.33)$$

Qui $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ rappresenta un vettore d'onda, ξ è costante che sarà determinante nella stabilità del problema ed i è l'unità immaginaria. Si è supposto sostanzialmente che le perturbazioni debbano essere periodiche lungo le direzioni infinitamente estese

x, y e perciò sviluppabili in serie di Fourier. In queste ipotesi gli operatori che appaiono nel sistema (2.32) diventano:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \xi, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -k^2, \quad \nabla^2 = \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \quad (2.34)$$

Si ottiene sostituendo:

$$\begin{cases} \xi \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) W = g\alpha k^2 \Theta + \nu \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^2 W \\ \xi \Theta = \beta W + \kappa \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \Theta \\ \Theta|_{z=\pm \frac{d}{2}} = 0 \\ W|_{z=\pm \frac{d}{2}} = 0 \\ \frac{\partial^p W}{\partial z^p} \Big|_{z=\pm \frac{d}{2}} = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

Adimensionalizzando il sistema secondo le unità di tempo $[T] = \frac{d^2}{\nu}$ e di lunghezza $[L] = d$; ottengo:

$$\begin{cases} (D^2 - a^2)(D^2 - a^2 - \sigma)W = \left(\frac{g\alpha}{\nu}d^2\right) a^2 \Theta \\ (D^2 - a^2 - Pr\sigma)\Theta = -\left(\frac{\beta}{\kappa}d^2\right) W \\ \Theta = 0, \quad W = 0 \quad \text{in } z = \pm \frac{1}{2} \\ D^p W = 0 \quad \text{in } z = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.36)$$

avendo per semplicità $\frac{d}{dz} = D$, Pr numero di Prandtl, $a = kd$, $\sigma = \frac{\xi d^2}{\nu}$. Si dimostra con alcuni passaggi analitici che per il problema da noi considerato, dato da (2.36), il valore di σ , il cui segno ovviamente definisce la stabilità del sistema in analisi, assume sempre valori reali (ovvero la sua parte complessa è sempre nulla). Questo risultato è noto come *principio di scambio delle stabilità* ed ha quale conseguenza principale che la transizione da stato stabile (per cui $\xi, \sigma < 0$, dove le piccole perturbazioni vengono smorzate dal sistema) a stato instabile ($\xi, \sigma > 0$, le piccole perturbazioni sono amplificate), deve passare attraverso uno stato stazionario per cui $\xi, \sigma = 0$.

Per studiare l'instabilità è quindi necessario che il sistema (2.36) ammetta soluzione non nulla per Θ, W con $\sigma = 0$. Sostituendo:

$$\begin{cases} (D^2 - a^2)^2 W = \left(\frac{g\alpha}{\nu}d^2\right) a^2 \Theta \\ (D^2 - a^2)\Theta = -\left(\frac{\beta}{\kappa}d^2\right) W \\ \Theta = 0, \quad W = 0 \quad \text{in } z = \pm \frac{1}{2} \\ D^p W = 0 \quad \text{in } z = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.37)$$

E' possibile dal sistema (2.37) eliminare alternativamente Θ o W ottenendo un'equazione differenziale del sesto ordine corredata di sei condizioni al contorno; conservando W ad esempio:

$$\begin{cases} (D^2 - a^2)^3 W = -a^2 RaW \\ W = 0, \quad (D^2 - a^2)^2 W = 0, \quad D^p W = 0 \quad \text{in } z = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.38)$$

Come si vede in questa formulazione scompare il numero di Prandtl e rimane il solo parametro di controllo Ra a governare una soglia per la stabilità primaria. Il problema (2.38) costituisce un problema differenziale e la ricerca di una sua soluzione non nulla consiste in un problema agli autovalori per Ra .

Risolviamo adesso il problema differenziale nei due casi di pareti di contorno libere (che trova difficile riscontro nella realtà ma risulta essere analiticamente più semplice), e nel caso che il fluido sia circondato da pareti rigide. Il terzo caso di parete rigida e pelo libero (indifferentemente in $z = +\frac{1}{2}$ oppure $z = -\frac{1}{2}$ indifferente data la simmetria delle equazioni che regolano il problema) è di analoga risoluzione.

Caso 'slip-free' Questo caso è particolarmente semplice; il problema (2.38) diventa:

$$\begin{cases} (D^2 - a^2)^3 W = -a^2 RaW \\ W = 0, \quad D^2 W = 0, \quad D^4 W = 0 \quad \text{in } z = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.39)$$

Sostituendo la condizione al contorno nell'equazione principale e si vede facilmente che deve essere $D^{(2m)}W = 0$ per $m = 1, 2, 3, \dots$: ciò implica che W abbia forma $W = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi z)$ con A_i costanti e n intero. Risolvendo (2.39) utilizzando per W la forma suddetta si ottiene facilmente $Ra = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(n^2\pi^2 + a^2)^3}{a^2}$.

Il minimo valore di Ra si ottiene perciò cercando il minimo $\frac{d}{da^2} Ra = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{n^2\pi^2}{2}$.

Ra ha un minimo assoluto per il primo modo di eccitazione ($n = 1$) per cui:

$$Ra = \frac{\left(3\frac{\pi^2}{2}\right)^3}{\frac{\pi^2}{2}} \approx 657.51 \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \lambda = \frac{2\pi}{a}d = 2^{\frac{2}{3}}d \quad (2.40)$$

dove λ qui è la lunghezza d'onda della perturbazione, strettamente legata alle dimensioni delle celle convettive che si formeranno nello strato fluido.

Caso 'no-slip' Modificando le condizioni al contorno rispetto al caso precedente:

$$\begin{cases} (D^2 - a^2)^3 W = -a^2 RaW \\ W = 0, \quad DW = 0, \quad (D^2 - a^2)^2 W = 0 \quad \text{in } z = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.41)$$

si nota facilmente che il problema gode di proprietà di simmetria: l'operatore $(D^2 - a^2)$ è pari in z e le condizioni al contorno sono simmetriche; da ciò si può dedurre che la soluzione per W sarà composta da sovrapposizione di funzioni dispari e funzioni pari. In generale la soluzione ad un problema differenziale come (2.41) è data da sovrapposizione di termini del tipo $W = e^{\pm qz}$: ciò si traduce nel ricercare soluzioni dell'equazione algebrica $(q^2 - a^2)^3 = -a^2 Ra$ ed a individuare quindi con un problema agli autovalori quelle coppie di valori di (Ra, a) per cui il problema soddisfa le condizioni al contorno e ammette soluzioni non nulle.

Scrivendo per comodità e sostituendo:

$$(q^2 - a^2)^3 = a^2 Ra = \tau^3 a^6 \Rightarrow \begin{cases} q^2 = -a^2(\tau - 1) \\ q^2 = a^2 \left[1 + \frac{1}{2}\tau(1 + i\sqrt{3})\right] \\ q^2 = a^2 \left[1 + \frac{1}{2}\tau(1 - i\sqrt{3})\right] \end{cases} \quad (2.42)$$

Le sei radici dell'equazione risultano quindi:

$$\pm iq_0, \pm q, \pm q^* \quad \text{con:} \quad \begin{cases} q_0 = a(\tau - 1)^{\frac{1}{2}} \\ \Re(q) = a \left[\frac{1}{2}\sqrt{1 + \tau + \tau^2} + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\tau)\right]^{\frac{1}{2}} \\ \Im(q) = a \left[\frac{1}{2}\sqrt{1 + \tau + \tau^2} - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}\tau)\right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.43)$$

e la soluzione sarà della forma:

$$W = \sum_n W_n^{pari} + \sum_m W_m^{dispari} \quad (2.44)$$

con:

$$\begin{cases} W_n^{pari} = A_0^{pari} \cos q_0 z + A^{pari} \cosh qz + A_*^{pari} \cosh q^* z \\ W_m^{dispari} = A_0^{dispari} \sin q_0 z + A^{dispari} \sinh qz + A_*^{dispari} \sinh q^* z \end{cases} \quad (2.45)$$

Considerando il primo modo pari $n = 1$ ed ignorando i termini dispari nella soluzione si ottiene il seguente problema agli autovalori per i coefficienti $A_0^{pari}, A^{pari}, A_*^{pari}$, avendo imposto le condizioni al contorno:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -q_0 \tan \frac{1}{2}q_0 & q \tanh \frac{1}{2}q & q^* \tanh \frac{1}{2}q^* \\ 0 & \sqrt{3} - i & \sqrt{3} + i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_0^{pari} \\ A^{pari} \\ A_*^{pari} \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.46)$$

Il determinante di tale matrice deve essere nullo affinché esista soluzione non nulla per $A_0^{pari}, A^{pari}, A_*^{pari}$ e ciò costituisce una equazione complessa in due variabili reali a, τ che definiscono i q_0, q ; risolvendo numericamente si ottiene:

$$Ra \approx 1707.762 \quad a \approx 3.117 \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \lambda = \frac{2\pi}{a}d \approx 2.015d \quad (2.47)$$

E' possibile verificare in maniera del tutto analoga che per le soluzioni $W^{dispari}$ ed i modi di ordine superiore $n > 1$ il numero di Ra a cui si possono avere soluzioni non nulle (e quindi instabilità della soluzione primaria) è maggiore.

Riassumendo, utilizzando il metodo dei modi normali ed il relativo problema agli autovalori abbiamo ottenuto i valori di Ra_c ai quali si ha stabilità marginale nei vari casi di condizioni al contorno:

Condizioni al contorno	Ra_c	a	$\frac{2\pi}{a} = \frac{\lambda}{d}$
'slip free' ($B_\nu \rightarrow \infty$)	657.11	2.2214	2.828
'no-slip' ($B_\nu \rightarrow 0$)	1707.762	3.117	2.016
Miste	1100.65	2.682	2.342

Tabella 2.1. Parametri caratterizzanti la stabilità marginale

Con una analisi diversa si sarebbero potuti tenere in considerazione effetti trascurati, ad esempio la tensione superficiale, ottenendo stabilità marginale a $Ra \approx 0$ per $B_\kappa \rightarrow \infty$ e $Ma \approx 80$: ciò spiega le celle osservate originariamente da Bénard. Altri valori di Ra_c per combinazioni dei parametri adimensionali elencati sono riportati in [1, sez. VI par. 3].

Un principio variazionale

Sempre partendo dal problema ridotto a (2.38) è possibile formulare un principio variazionale per il quale è possibile ricavare Ra_c ; siano

$$\begin{cases} F = (D^2 - a^2)^2 W \\ G = (D^2 - a^2) W \end{cases} \Rightarrow (D^2 - a^2) F = -a^2 Ra W \quad (2.48)$$

Se Ra_j è una soluzione per una qualche funzione W_j , moltiplicando (2.48) per F_i ed integrando in z si ottiene:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F_i (D^2 - a^2) F_j dz = -a^2 Ra_j \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} W_j (D^2 - a^2) G_i dz \quad (2.49)$$

Sfruttando il fatto che le condizioni al contorno sono nulle anche per F, G ed integrando per parti si ottiene:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (DF_i DF_j + a^2 F_i F_j) dz = a^2 Ra_j \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_i G_j dz \quad (2.50)$$

Dalla (2.50) è evidente scambiando gli indici i, j e sottraendo che $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_i G_j dz = 0$ (per $i \neq j$) e quindi le G_i sono funzioni ortogonali. Ponendo $i = j$ si ottiene:

$$a^2 Ra_j \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G_j^2 dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ((DF_j)^2 + a^2 F_j^2) dz \quad (2.51)$$

da cui:

$$Ra = \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ((DF)^2 + a^2 F^2) dz}{a^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} G^2 dz} \quad (2.52)$$

E' possibile dimostrare facilmente che l'espressione (2.52) possiede la proprietà per cui $\delta Ra = 0$ implica che W sia soluzione del problema caratteristico per qualsiasi arbitrario F compatibile con le condizioni al contorno di (2.38). Inoltre è possibile mostrare, sapendo che le G_i sono ortogonali, che il valore nel membro destro di (2.52) rappresenta una stima per eccesso di Ra_c .

Questo metodo si riconduce quindi a minimizzare il funzionale (2.52) per ricerca la soluzione più appropriata e quindi il valore Ra_c . In [2, par. 17] si calcola utilizzando il principio variazionale la soluzione (ipotizzando per F uno sviluppo in serie di armoniche) ottenendo i risultati riassunti in tabella 2.2.

Modi pari		
$a = 3.117$		
Prima approssimazione	$Ra = 1715.080$	
Seconda approssimazione	$Ra = 1707.938$	$A_2/A_1 = 0.028973$
Terza approssimazione	$Ra = 1707.775$	$A_3/A_1 = -0.028963$ $A_3/A_1 = -0.002694$
Valore esatto	$Ra = 1707.76$	
Modi dispari		
$a = 5.365$		
Prima approssimazione	$Ra = 17803.24$	
Seconda approssimazione	$Ra = 17621.74$	$A_2/A_1 = 0.06304$
Terza approssimazione	$Ra = 17611.84$	$A_3/A_1 = 0.062945$ $A_3/A_1 = -0.010088$
Valore esatto	$Ra = 17610.39$	

Tabella 2.2. Ra_c derivati con il principio variazionale ipotizzando uno sviluppo in armoniche; come si può notare la convergenza è rapida. Nella colonna di destra è riportata l'importanza relativa dei termini

2.2.2 Analisi non-lineare

Lo studio teorico della stabilità del problema di Rayleigh-Bénard risulta matematicamente molto più complicato dell'analisi lineare, data l'impossibilità di operare semplificazioni su termini di ordine superiore al primo. Di seguito si introdurranno due metodi analitici per lo studio non lineare della stabilità: il primo, conosciuto come metodo dell'energia, ha il pregio di provvedere al calcolo di Ra_c^E ¹ mentre il secondo, storicamente primo metodo non lineare utilizzato nello studio della convezione, è adatto a calcolare in un intorno più o meno grande dello stato marginale di stabilità il campo di velocità e di temperatura nel fluido. Vale la pena notare che in generale la soglia di instabilità del problema non lineare (in questo caso Ra_c^E) non coincide esattamente con il valore fornito dall'analisi lineare Ra_c^L e vale la disuguaglianza $Ra_c^E \leq Ra_c \leq Ra_c^L$; è possibile dimostrare che nel problema in questione (convezione Rayleigh-Bénard in approssimazione di Boussinesq) sussiste l'uguaglianza dei tre valori, ed il metodo dell'energia è perciò del tutto equivalente al principio variazionale ed all'analisi in piccole perturbazioni già vista nella sezione precedente.

Metodo dell'energia

Il metodo dell'energia è in meccanica dei fluidi un caso particolare del metodo di Lyapunov, dove il funzionale \mathbf{V} è rappresentato da una funzione quadratica delle grandezze fisiche, perciò direttamente proporzionale all'energia del sistema. Come accennato nel paragrafo precedente, esso è in grado di fornire un limite inferiore al valore soglia Ra_c oltre il quale si ha instabilità. Seguendo l'analisi di [5] si può definire il funzionale energia come:

$$E_\gamma[\mathbf{u}, T](t) = \frac{1}{2} \int_V \frac{1}{PrRa} |\mathbf{u}|^2 + \gamma T^2 d\Omega \quad (2.53)$$

dove l'integrale è operato istantaneamente sul volume e le grandezze fisiche che appaiono \mathbf{u} , T rappresentano già perturbazioni rispetto alla soluzione primaria. Il parametro γ rappresenta un numero positivo da ottimizzarsi per ottenere il valore massimo di $Ra_c^{E\gamma}$ (che corrisponderà al miglior limite inferiore su Ra_c). Sommando i valori $\frac{1}{PrRa} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ (2.54) e $\gamma T \cdot T$ (2.54) ed integrando per parti si ottiene:²

¹Gli apici 'E' ed 'L' indicano rispettivamente il valori per Ra_c calcolati con l'analisi lineare ed il metodo dell'energia

2

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + Pr \nabla^2 \mathbf{u} + Pr Ra T \lambda \\ \partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T - \beta w \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\frac{d}{dt}E_\gamma = - \int_V \frac{1}{Ra} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \gamma |\nabla T|^2 - (1 - \gamma\beta)wT d\Omega \quad (2.55)$$

Se E_γ soddisfa le condizioni richieste affinché sia funzionale di Lyapunov del problema (ovvero derivata temporale definita negativa e funzionale definito positivo) allora si ricava $Ra_c^E = \max_{\gamma>0} \sup \{Ra | E_\gamma \geq 0, \frac{d}{dt}E_\gamma \leq 0\}$.

Il significato fisico di tale analisi è piuttosto chiaro: E_γ rappresenta una misura dell'energia del sistema e la stabilità è assicurata solamente da una dissipazione adeguata del calore fornito al fluido (ovvero se per $t \rightarrow \infty$ allora $E_\gamma \rightarrow 0$).

Approccio alle perturbazioni (Landau Hopf)

L'utilizzo delle perturbazioni in regime non-lineare permette di studiare i regimi convettivi supercritici: in maniera del tutto analoga a quanto fatto in precedenza è possibile studiare soluzioni stazionarie per dati Ra e k . L'idea che si cela dietro questa metodologia di analisi è semplice: fino ad ora abbiamo supposto per una qualsiasi perturbazione A una evoluzione del tipo $\dot{A} = \sigma A$ dove σ rappresenta un parametro fisico che nella convezione Rayleigh-Bénard potrebbe essere $\sigma = Ra - Ra_c$: dipendendo dal valore di Ra si ha una crescita o una diminuzione della perturbazione. Tale modello è pienamente giustificato quando la perturbazione A considerata è infinitesima. Al crescere di questa fino a valori finiti è tuttavia necessario tenere in considerazione eventuali termini non lineari ricavando $\dot{A} = \sigma A + \alpha_1 A^3 + \alpha_2 A^5 + \dots$ dove i parametri α_i devono essere identificati e definiranno la tipologia di biforcazione che si verificherà nel problema.

In letteratura è possibile incontrare lavori di diversi autori (come in [12], [16] e negli articoli lì citati) che utilizzano espansioni in serie per l'analisi dei regimi debolmente supercritici: definendo il parametro $\epsilon = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$ (numero di Rayleigh ridotto) ed espandendo in serie per ϵ le grandezze fisiche \mathbf{u} , T , Ra^3 (rappresentanti le perturba-

$$\text{zioni) } \begin{cases} \mathbf{u} = \epsilon^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{u}^{(0)} + \epsilon^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}^{(1)} + \epsilon \mathbf{u}^{(2)} + \dots \right) \\ T = \epsilon^{\frac{1}{2}} \left(T^{(0)} + \epsilon^{\frac{1}{2}} T^{(1)} + \epsilon T^{(2)} + \dots \right) \\ Ra = Ra_c + \epsilon^{\frac{1}{2}} Ra^{(1)} + \epsilon Ra^{(2)} + \dots \end{cases}$$

nel sistema (2.54) è possibile ricavare una serie di sistemi per $\mathbf{u}^{(i)}$, $T^{(i)}$ risolvibili in cascata fino all'ordine di approssimazione desiderato. Si noti che $\mathbf{u}^{(0)}$, $T^{(0)}$ corrisponde alla soluzione stazionaria del problema linearizzato.

rappresenta il sistema differenziale, in forma adimensionale, secondo il quale evolvono le perturbazioni alla soluzione primaria

³L'espansione di Ra intorno al suo valore critico è dovuta al fatto che per $Ra \geq Ra_c$ sono ammesse soluzioni stazionarie in una stretta banda confinata intorno a k_c

2.2.3 Soluzione secondaria e cenni di instabilità

Introdotta il problema della stabilità di uno strato fluido scaldato dal basso ed alcuni metodi per il suo studio, in questa sezione si farà il punto sulla fenomenologia della convezione Rayleigh-Bénard e si descriverà qualitativamente ciò che accade in regime supercritico.

Sempre ipotizzando idealmente di aumentare lentamente il gradiente di temperatura imposto nello strato di fluido in studio, ovvero aumentare il parametro Ra quasi-stazionariamente, si osserverà per $Ra < Ra_c$ (calcolato nei casi più semplici nelle sezioni precedenti) quella che è stata chiamata 'soluzione primaria', ovvero uno stato stazionario caratterizzato da campo di velocità nullo e distribuzione di temperatura lineare. Appena superato il Ra_c sperimentalmente si osservano diversi possibili pattern convettivi secondo i parametri del problema indicati in 2.1.5 (in particolare Pr , Ma , Γ , la forma del contenitore ed altri fattori non tenuti in considerazione in quanto trascurati nelle ipotesi di Boussinesq); non è purtroppo possibile determinare univocamente l'espressione matematica per il campo di velocità a partire dalla sola analisi lineare: fissati Ra e k (numero d'onda delle perturbazioni), saranno soluzioni valide tutte le funzioni $w(\mathbf{x})$ soddisfacenti $\nabla^2 w + k^2 w = 0$ e perciò la soluzione davvero osservata non può essere determinata prescindendo da una analisi della perturbazione iniziale.

Nel caso semplificato studiato, di strato fluido infinitamente esteso, condizioni al contorno ideali e supponendo esatte le semplificazioni introdotte da Boussinesq la soluzione secondaria preferenziale sono i cosiddetti *rolls*, ovvero una struttura convettiva bidimensionale e stazionaria organizzata in celle che mostrano periodicità definita (così come suggerito dall'analisi in modi normali condotta precedentemente).

Una funzione prototipo descrivente i *rolls* (figura 2.1) potrebbe essere $w(\mathbf{x}) =$

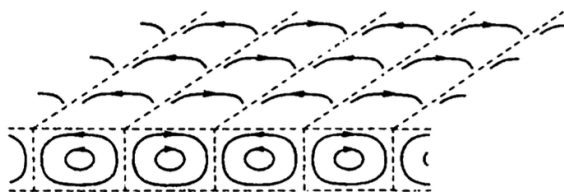


Figura 2.1. Rolls

$\cos(\mathbf{k}\mathbf{x})$ (con \mathbf{k} vettore d'onda), tuttavia una analisi dettagliata del problema come condotto in [16] e [12] mostra che essa costituisce solamente una prima approssimazione. A partire da considerazioni di simmetria (numerose per il problema ideale: si ha simmetria lungo gli assi x, y ed attraverso il piano $z = 0$ se sono simmetriche le condizioni al contorno) è possibile immaginare come si potrebbero formare celle

poligonali regolari a 'tassellare' il piano fluido; tali celle potrebbero essere esagonali, quadrate o triangolari e sono effettivamente state osservate. Le celle esagonali possono essere viste in prima approssimazione come sovrapposizione di tre rolls di uguale intensità sfasati di 120° mentre le celle quadrate come sovrapposizione di due rolls aventi \mathbf{k} perpendicolari.

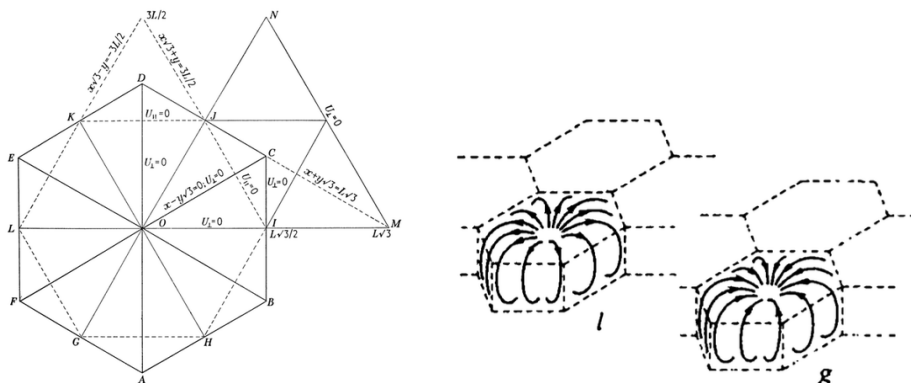


Figura 2.2. A sinistra è mostrato come celle esagonali e celle triangolari coincidano: è possibile mostrare che attraverso i lati di questi non vi è moto trasversale.

Figura 2.3. A destra è mostrata schematicamente la differenza tra celle esagonali di tipo l e celle esagonali di tipo g ; la selezione tra i due tipi è data principalmente dalla minimizzazione degli sforzi viscosi e perciò ad avere un flusso meno viscoso nella parte centrale della cella (laddove è più intenso il campo di velocità).

Sempre supponendo che le strutture secondarie che descriveremo non vadano a sperimentare loro stesse instabilità, l'apparizione di rolls, esagoni o celle quadrate dipende come accennato da vari fattori finora trascurati. A giocare un ruolo fondamentale sono in particolar modo la dipendenza dei parametri fisici del fluido dalla temperatura, in particolar modo tensione superficiale e viscosità.

Sono state osservate addirittura per $Ra \approx 0 < Ra_c$ celle esagonali, laddove il meccanismo di instabilità gravitazionale non poteva operare; tale fenomeno è dovuto fortemente alla variazione di tensione superficiale con la temperatura ed è chiamato convezione Bénard-Marangoni. Piuttosto importante pare essere la dipendenza della viscosità dalla temperatura nella definizione di celle esagonali piuttosto che rolls; si è dimostrato con una analisi di stabilità non-lineare della soluzione secondaria che nelle ipotesi elencate, assumendo la viscosità non costante, la stabilità degli esagoni piuttosto che dei rolls dipende da un parametro Q^4 che è direttamente proporzionale all'ampiezza degli effetti non-Boussinesq. In figura 2.4 sono riportati i campi di stabilità dei rolls e delle celle esagonali tipo- l e tipo- g nello spazio dei parametri Q, ϵ . Come è possibile notare vi sono regioni nello spazio Q, ϵ in cui sia

⁴E' stato dimostrato da Busse (1967) e Tschammer (1997) nei lavori citati in [12] ed [3] che

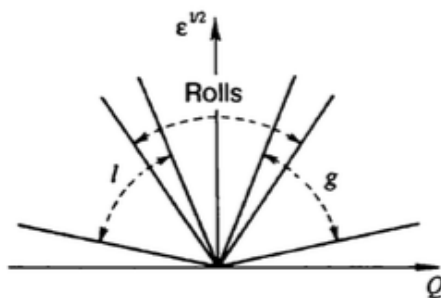


Figura 2.4. In figura i campi di stabilità in funzione di (Q, ϵ) per i rolls e le celle esagonali.

i rolls che le celle esagonali sono stabili; in generale questo può accadere per altre strutture convettive ed in altri range di parametri ed in tal caso è possibile osservare trasformazioni isteretiche tra le varie configurazioni. In figura 2.5 è presentata una fotografia in cui vi è transizione celle esagonali \leftrightarrow rolls. (Ad essere precisi la stabilità tra le varie configurazioni non è del tutto equivalente poichè ciascuna configurazione ha in generale differente valore per il potenziale di Lyapunov: si avrà sempre una condizione stabile e più stati metastabili)

Per quanto riguarda le celle quadrate, è stata dimostrata la loro instabilità nei casi più comuni di convezione e sono stati definiti (vedi [12], [16]) i campi di stabilità in funzione di Pr, B_ν, B_κ .

Altri fattori che possono provocare la scomparsa dei rolls nel problema ideale e la comparsa di strutture differenti (di norma celle convettive esagonali), sono la presenza di particelle solide nel fluido (si è osservato sperimentalmente che a parità di altre condizioni favoriscono l'apparizione degli esagoni in regime trans-critico), una eventuale curvatura del profilo di temperatura nel fluido (che può essere dovuta a un riscaldamento variabile nel tempo dello strato fluido) ed una asimmetria delle condizioni al contorno o un loro discostamento dalle condizioni ideali: in particolar modo per i bordi laterali che possono avere una forte influenza soprattutto per osservazioni a bassi Γ ([12]).

I fattori descritti fin qui sono in grado di variare la natura delle celle convettive osservabili nella RBC, in regime debolmente supercritico. Non descriveremo in questo lavoro l'analisi della stabilità di queste strutture secondarie, sviluppata da

$$\text{il parametro } Q \text{ è esprimibile come } Q = \sum_{i=0}^4 \gamma_i \mathcal{P}_i \text{ con } \begin{cases} \gamma_0 = \frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}} \\ \gamma_1 = \frac{\Delta(\alpha \rho)}{2\bar{\alpha}\bar{\rho}} \\ \gamma_2 = \frac{\Delta \nu}{\bar{\nu}} \\ \gamma_3 = \frac{\Delta k}{\bar{k}} \\ \gamma_4 = \frac{\Delta c_p}{\bar{c}_p} \end{cases} \text{ ed } \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i(Pr) \text{ dove i } \Delta \bar{\cdot}$$

rappresentano la variazione nello strato fluido e $\bar{\cdot}$ il valore medio.

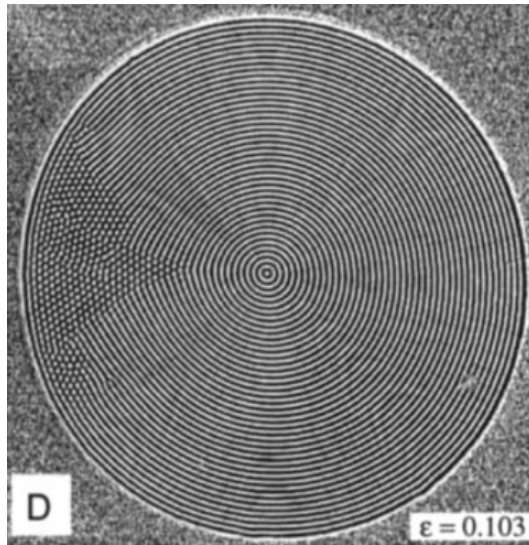


Figura 2.5. In figura è mostrata per $\epsilon = 0.103$, $\Gamma = 86$, $Pr = 1$ una trasformazione in pattern esagonale dei rolls.

Busse negli anni sessanta utilizzando metodi simili a quelli descritti sopra (sviluppo in serie per le grandezze fluide). I suoi risultati sull'instabilità dei rolls si incontrano spesso in letteratura sotto il nome di *Busse balloon* e *Busse windsock*, costituenti la rappresentazione grafica del lavoro teorico: riportano in uno spazio R , k , Pr le curve alle quali i rolls sperimentano i vari tipi di instabilità.

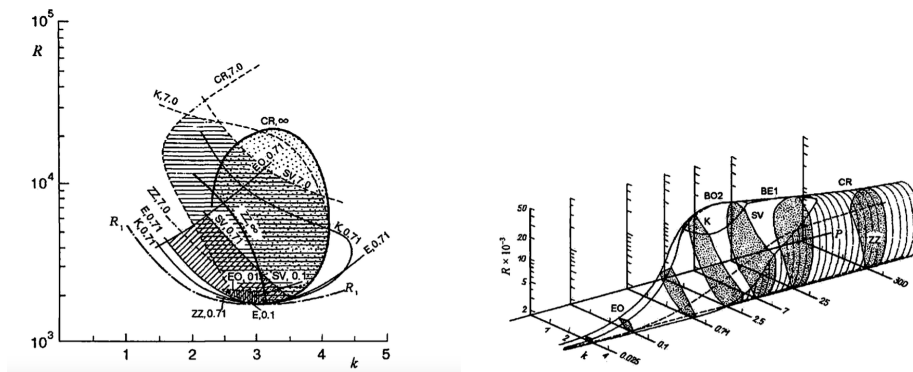


Figura 2.6. A sinistra il palloncino di Busse (Busse balloon), che corrisponde ad un taglio ad un dato Pr della figura a destra. Le varie sigle corrispondono ai differenti tipi di instabilità che può sperimentare una struttura convettiva ideale di rolls.

Figura 2.7. A destra vi è il Busse windsock.

2.3 Scambio termico

L'aspetto termico della RBC è di difficile trattazione teorica e non può prescindere dalla conoscenza della natura del flusso per ogni coppia di valori di Pr e Ra .

A differenza di ciò che avviene in altri regimi convettivi termici qui è il numero di Ra (insieme a Pr) a determinare il campo di velocità e quindi vi sarà una dipendenza del tipo $Nu(Ra, Pr)$, $Re(Ra, Pr)$.

Il numero di Nusselt, indice dello scambio termico tra i piani che circoscrivono il fluido, può essere espresso come: $Nu = \frac{\dot{q}}{\dot{q}_{cond}} = \frac{\langle wT \rangle_{A,t} - \kappa \frac{\partial \langle T \rangle_{A,t}}{\partial z}}{\kappa \Delta T / d}$, dove $\langle \dots \rangle_{A,t}$ indica l'integrazione su un piano a z fisso e nel tempo (essendo alcuni regimi convettivi non stazionari).

In letteratura ([8], [11], [15]) si possono incontrare più modelli teorici molto sofisticati riguardanti lo studio dello scambio termico in alcuni regimi convettivi e parecchi dati e correlazioni empiriche relative ai più diversi fluidi nelle più varie condizioni. Anche la fluidodinamica computazionale è utile nella valutazione quantitativa di flussi termici. L'approccio teorico maggiormente utilizzato consiste nel valutare separatamente la dissipazione termica e la dissipazione viscosa negli strati limite vicino ai bordi e nel fluido e ricavare così con stime i valori di interesse. Questa analisi è laboriosa e complessa e qui non sarà affrontata; si riportano di seguito (tabella 2.3, [15]) semplicemente alcuni dati sperimentali riguardanti la convezione ottenuti con differenti fluidi. Si noti che questi dati sono stati ottenuti in diversi esperimenti per Γ variabile; si è utilizzata una legge di potenza $Nu \sim Ra^\gamma$.

2.3.1 Regimi convettivi

Nello studio dello scambio termico è necessario conoscere il regime convettivo a cui sta lavorando il fluido, ovvero il suo comportamento macroscopico (senza scendere nei dettagli della tipologia di celle come fatto nelle sezioni precedenti). In prima approssimazione questa dipendenza è data dai parametri Ra e Pr , come intuibile dalla forma adimensionale delle equazioni di Navier-Stokes per il problema; in figura 2.8 sono riassunti i risultati sperimentali ottenuti da un buon numero di ricercatori ([12]). La linea I rappresenta la soglia convettiva analizzata nella sezione precedente: essa è indipendente da Pr ed al di sotto si ha lo stato quieto (soluzione primaria). Al di sopra di I si ha la presenza di un regime caratterizzato dai rolls: la regione compresa tra I e II è dove i rolls sono strutture stabili. La linea II dipendente da Pr , a differenza della transizione rappresentata da I: per alti valori si ha stabilità fino a $Ra \approx 2 \times 10^4$ mentre a bassi Pr i rolls manifestano immediatamente l'instabilità rappresentata dalla linea III. Per $Pr > 50$ i rolls manifestano alla soglia della linea II instabilità di tipo *cross-roll* (CR): appaiono strutture simili ai rolls in direzioni

fluido	Pr	intervallo Ra	γ
SF ₆	1-93	$10^9 - 10^{14}$	0.30 ± 0.03
H ₂ O	5.5	$10^7 - 3 \times 10^9$	0.293
H ₂ O	6.8	$3 \times 10^7 - 4 \times 10^9$	0.290
H ₂ O	6.5	$10^9 - 2 \times 10^{11}$	0.333
H ₂ O	≈ 7	$2 \times 10^8 - 2 \times 10^{10}$	0.28
H ₂ O	≈ 7	$2 \times 10^8 - 2 \times 10^{10}$	0.28 ± 0.06
H ₂ O	≈ 7	$8 \times 10^7 - 7 \times 10^9$	0.281 ± 0.015
He	0.8	$4 \times 10^5 - 2 \times 10^9$	0.280
He	0.7-1	$< 10^{11}$	0.282 ± 0.006
He	0.6-1.2	$4 \times 10^7 - 10^{12}$	0.285
He	0.6-0.73	$3 \times 10^7 - 10^{11}$	0.294
aria	≈ 1	$< 10^8$	0.25
Hg	0.025	$2 \times 10^2 - 5 \times 10^5$	0.247
Hg	0.025	$10^6 - 10^8$	0.27
Hg	0.025	$5 \times 10^6 - 5 \times 10^8$	0.26 ± 0.02
Hg	0.025	$4 \times 10^8 - 2 \times 10^9$	0.20
Hg	0.025	$2 \times 10^5 - 8 \times 10^{10}$	0.29 ± 0.01
Na	0.005	$< 10^6$	0.25

Tabella 2.3. La tabella riporta le correlazioni logaritmiche $Nu \sim Ra^\gamma$ ottenute in vari esperimenti condotti per diversi Γ (per approfondimenti vedere [15]); non si riportano i prefattori delle espressioni fortemente dipendenti dall'*aspect ratio*.

Si noti che entro gli errori sperimentali è ampiamente rispettato il limite teorico $Nu \leq cRa^{\frac{1}{2}}$

perpendicolari ai primi; queste strutture diventano a loro volta instabili alla linea III, transizione associata a instabilità oscillatoria. L'instabilità oscillatoria è in ordine il primo regime convettivo non stazionario: gli assi dei rolls manifestano oscillazioni sempre maggiori (la distinzione tra IIIa e IIIb è piuttosto sottile: è stato osservato che la transizione indicata dalla linea III dipende particolarmente dalla nucleazione di difetti nei pattern convettivi e la biforcazione è dovuta alla regione in cui si possono nucleare tali difetti). La linea IV non corrisponde ad una ulteriore transizione, quanto più all'apparizione di armoniche di ordine maggiore nelle oscillazioni dei rolls. L'ultima linea, indicata con V, fornisce il limite oltre il quale la convezione è completamente turbolenta.

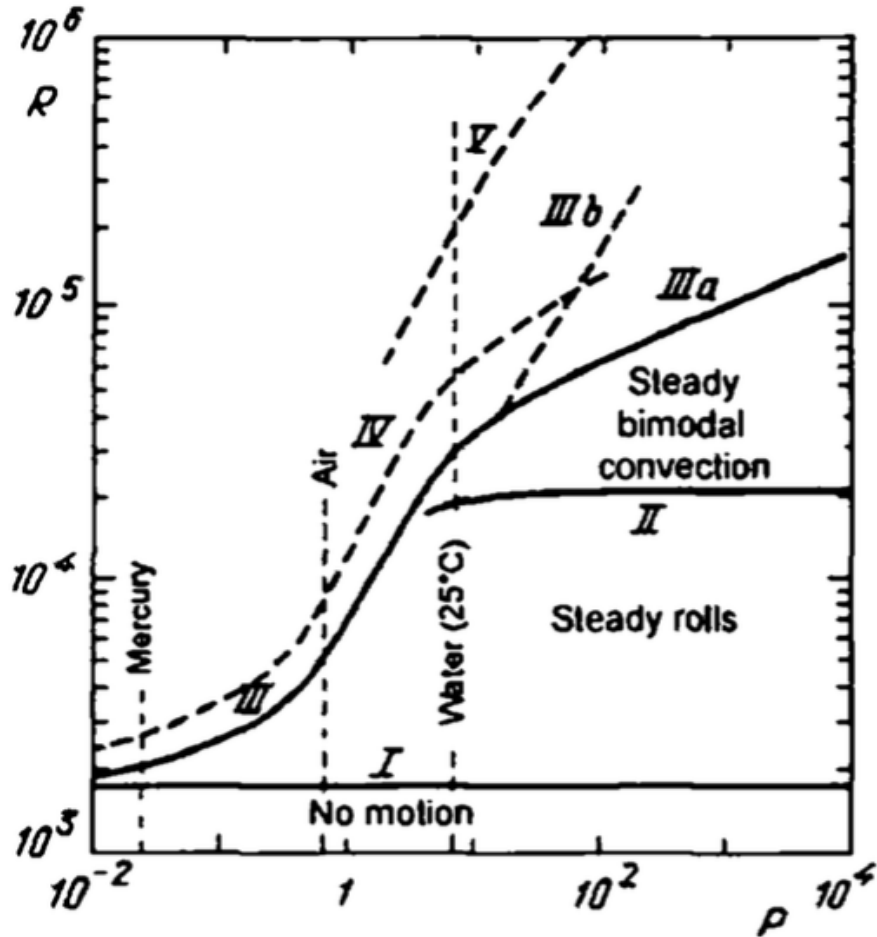


Figura 2.8. Diagramma dei regimi convettivi. In ascissa vi è il numero di Prandtl ed in ordinata il numero di Rayleigh. Sul piano sono indicati i diversi regimi convettivi: a partire dal basso (modesti Ra) si ha lo stato di quiete che evolve attraverso varie fasi fino ad un regime turbolento (sopra la linea V); è da notare come la fenomenologia sia sostanzialmente simile ai diversi Pr , ma vari notevolmente l'intervallo di parametri in cui si presenta ciascun tipo di convezione.

Capitolo 3

Metodi sperimentali e numerici

Come ogni fenomeno fisico, anche la convezione Rayleigh-Benard è stata studiata sperimentalmente e numericamente. Dopo oltre cento anni di esperimenti molti aspetti sono stati spiegati ma sicuramente rimangono altrettanti interrogativi aperti. Ad oggi la ricerca si concentra sugli aspetti di frontiera della RBC, per i quali si hanno poche informazioni o non sono chiari meccanismi e modelli validi alla loro spiegazione. Questi spaziano dallo studio dei pattern deterministici e alla loro evoluzione, all'influenza delle fluttuazioni statistiche, da analisi del flusso turbolento agli studi sullo scambio termico e gli strati limite, nell'ambito dei sistemi dissipativi non lineari.

Nei paragrafi che seguono si descriveranno alcuni apparati sperimentali tipici utilizzati nell'investigazione della convezione Rayleigh-Bénard, evidenziando i principali limiti legati allo studio sperimentale e le più diffuse tecniche di misurazione dei campi di velocità e temperatura. Per quanto riguarda i metodi numerici si introdurranno le principali tecniche utilizzate nella simulazione di flussi convettivi evidenziandone vantaggi e svantaggi.

3.1 Tipici apparati sperimentali

In questa sezione descriviamo un tipico apparato sperimentale utilizzato per lo studio della convezione Rayleigh-Bénard, in dettaglio in [18]. L'apparato descritto di seguito è stato utilizzato per lo studio della RBC in gas ad alta pressione (dell'ordine delle decine di *bar*) con tecniche interferometriche, ma si rivela per caratteristiche costitutive molto simile agli strumenti utilizzati per lo studio in liquidi o in condizioni criogeniche (con gli opportuni accorgimenti e modifiche dei casi).

Una rappresentazione schematica è data in figura 3.1: (a) rappresenta il contenitore principale nel quale sono contenute la cella convettiva (con il gas di lavoro), ed un bagno termico che ha lo scopo di controllare le temperature delle piastre; (b) e (c) sono due contenitori utilizzati per pressurizzare rispettivamente il bagno

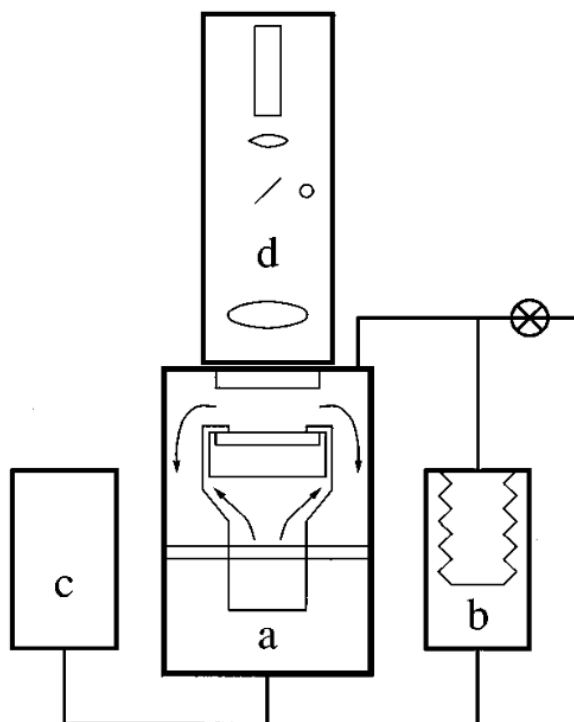


Figura 3.1. Schematizzazione dell'apparato.

termico e la cella, in (d) è infine schematizzato il sistema ottico dedicato alle misure dell'indice di rifrazione ed alle misure preliminari agli esperimenti.

La cella convettiva, cuore del sistema, è mostrata in dettaglio nella figura 3.1: le piastre inferiore e superiore sono composte di un materiale con alta conducibilità termica (rispetto al fluido di lavoro), per assicurare omogeneità delle condizioni al contorno e assenza di gradienti termici laterali; inoltre, per minimizzare l'influenza delle pareti laterali, queste devono avere diffusività termica quanto più possibile simile al fluido (in alcuni casi si utilizzano geometrie particolari appositamente studiate per ridurre gli effetti di bordo, figura 3.3, [18]).

Va inoltre ricordato che per ovvie ragioni la piastra superiore deve essere trasparente. Nell'esperimento in esempio, che utilizzava CO_2 quale fluido di lavoro ($\lambda_{CO_2} \approx 0.02W/Km$), si sono utilizzate una piastra di alluminio sotto ($\lambda_{Al} \approx 240W/Km$) ed una piastra di vetro zaffiro sopra ($\lambda_{zaff} \approx 35W/Km$); per le pareti laterali si sono provate varie soluzioni (carta, ceramica, ...) aventi dalle 10 alle 50 volte la conducibilità del gas. La cella è inoltre costruita in maniera tale da poter aggiustare il parallelismo delle piastre prima e dopo la pressurizzazione: ciò è reso possibile da alcune viti regolatrici e alcuni trasduttori piezoelettrici in grado di autoregolarsi (le piastre sono precisamente meccanizzate, con una planarità di $\pm 3\mu m$). Il tutto

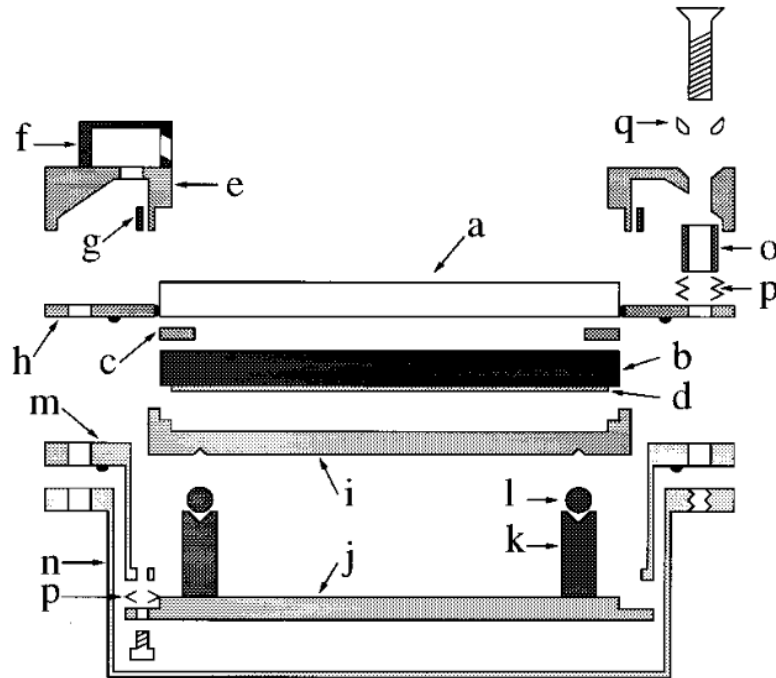


Figura 3.2. Disegno schematico esploso della cella convettiva: il fluido è delimitato da (a), (b) e (c). (d) rappresenta una piastra riscaldante ed (e), (f) hanno il compito di distribuire il bagno termico sulla piastra superiore. La piastra inferiore giace sulla piastra in acciaio inossidabile (i) la quale può essere regolata grazie al sistema di gambe e sfere (k) ed (l) (meccaniche o piezoelettriche); questo tipo di costruzione minimizza gli stress meccanici e quindi le relative deformazioni della cella una volta pressurizzata. Il sistema rappresentato dalla vite, la molla e la boccola (q), (p), (o) permette la regolazione in orientazione dell'anello (h), solidale alla piastra in zaffiro. Il complessivo è contenuto in (n).

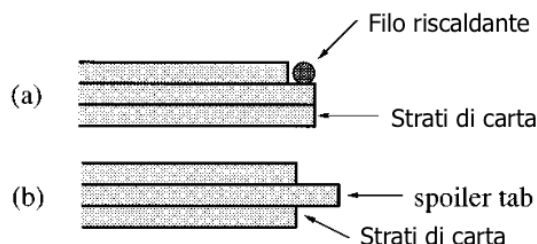


Figura 3.3. In figura è mostrato un dettaglio sulla costituzione delle pareti laterali nella cella convettiva. Sopra (a) è mostrato come sia possibile inserire un filo elettrico (capace di riscaldare il fluido) nella parete per svolgere esperimenti con particolari condizioni al contorno laterali. Sotto (b) è mostrata una geometria molto utilizzata nella pratica per la ridotta influenza delle pareti laterali: la 'spoiler tab' contribuisce ad attenuare gli effetti di bordo come mostrato dalle analisi di campi di temperatura.

è immerso nel contenitore principale (marca (a) in figura 3.1) nel quale si trovano due camere separate, contenenti i bagni termici a temperatura controllata, e alcune pompe che permettono la circolazione dell'acqua. La regolazione è elettronica e ha precisione di circa $\pm 1mK$ sul lungo termine. La pressione massima che l'apparato può sopportare è di circa 100 *bar*, con buon fattore di sicurezza. La regolazione della pressione della cella è operata con un trasduttore e le fluttuazioni non superano lo 0.01%.

E' necessario tenere conto che gli esperimenti si possono protrarre per alcuni giorni o diverse settimane ed è quindi necessario assicurare fini sistemi di regolazione e prevedere i possibili disturbi ambientali nel progetto del sistema, in maniera da assicurarne la stabilità delle condizioni. A titolo informativo è da sottolineare che anche le condizioni del locale in cui si trovava l'apparato erano tenute in osservazione e regolate.

Interessante è la misura dell'altezza della cella convettiva e del parallelismo delle piastre, operata con tecnica interferometrica. La precisione nel parallelismo così ottenibile è di alcuni μm così come la misura della profondità della cella d che ha errore di $\pm 1\mu m$.

Opzionalmente, tutto l'apparato può essere montato su una piattaforma rotante per studiare gli effetti della forza di Coriolis sulla RBC.

Qualora si volesse misurare lo scambio termico, sarebbe necessaria una sorta di bomba calorimetrica come descritto in figura 3.4 e più in dettaglio in [19].

3.1.1 Scelta del fluido di lavoro

Senza ombra di dubbio la costituzione dell'apparato sperimentale è fortemente legata alle condizioni di lavoro di questo, e quindi alla scelta del fluido di lavoro.

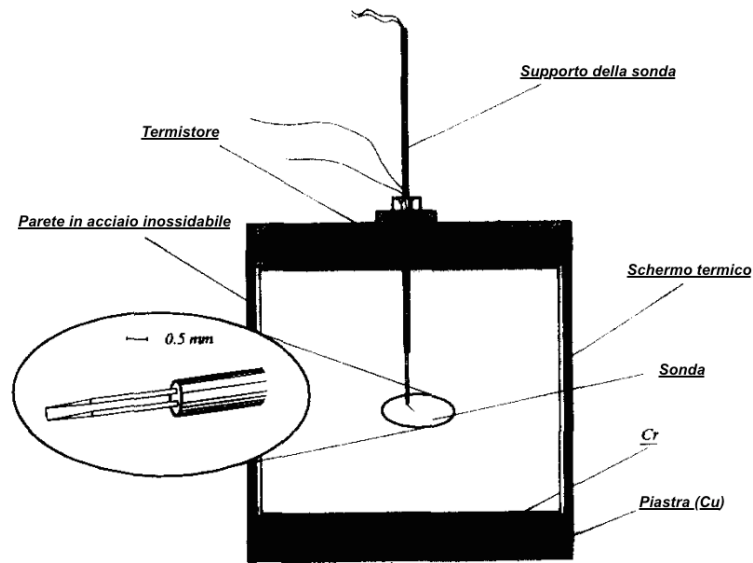


Figura 3.4. In figura si mostra schematicamente una cella convettiva utilizzata per le misure dello scambio termico nella RBC utilizzata in [19]. Si caratterizza per le pareti isolate da strati di neoprene (si è stimato sperimentalmente che le perdite siano trascurabili rispetto allo scambio termico sotto-sopra) ed è corredata di termistori, sensori termici resistivi in grado di misurare la temperatura nel fluido e nelle piastre permettendo perciò di valutare lo scambio termico. A causa dell'uso di mercurio liquido nell'esperimento, le pareti interne sono rivestite di cromo per evitare l'amalgama dei metalli.

I fluidi costituiscono in natura una categoria molto varia ed eterogenea per caratteristiche e proprietà fisiche. Ciò consente con opportune scelte di poter studiare sperimentalmente per ampi intervalli dei parametri di controllo (Ra , Pr) la convezione Rayleigh-Bénard ottenendo riscontri sulla teoria già sviluppata e permettendo di comprendere meglio tutti quei fenomeni ad oggi noti solo in maniera qualitativa, ma privi di spiegazione.

La scelta del fluido di lavoro è quindi dettata in primo luogo dal parametro Pr , tipicamente dell'ordine dell'unità per i gas ($Pr \approx 0.7$ ma leggermente dipendente da pressione e temperatura), e molto variabile per i liquidi: per i metalli liquidi si può arrivare a valori molto bassi ($Pr \approx 0.025$ per il mercurio a $20^\circ C$) mentre per gli oli si hanno valori ben più elevati ($Pr \sim 10 \div 10^4$ in vari intervalli di temperatura); per l'acqua si ha $Pr \approx 13 \div 2$ tra $0^\circ C$ e $80^\circ C$. Altro fattore fondamentale nella scelta del fluido è la corrispondenza, nell'intervallo di temperature sperimentali, all'approssimazione di Boussinesq, sulla quale si basano la stragrande maggioranza degli studi teorici sulla convezione; come già detto si richiede che le proprietà del fluido siano pressochè costanti nelle condizioni di lavoro del fluido. Tale corrispondenza è valutabile con il parametro Q introdotto in 2.2.3 (è ritenuta valida l'approssimazione di

Boussinesq-Oberbeck quando $Q^2 \ll Ra_C$).

Ultimo ma non meno importante requisito è la compatibilità del fluido al metodo di misurazione scelto per il campo di temperatura o di velocità: appare evidente che in fluidi opachi (come i metalli liquidi) sia impossibile utilizzare alcune tecniche come l'ombrografia o la Particle Image Velocimetry, descritte più in dettaglio nel paragrafo successivo.

Ad oggi una delle maggiori limitazioni sperimentali legate alla scelta del fluido è quella di poter scandire ad arbitrari valori di Ra l'intervallo per Pr piccoli (molto inferiori all'unità), per i quali si hanno esigui studi sperimentali. Questo problema è stato in parte risolto grazie all'utilizzo di miscele gassose di varia natura ($He - CO_2$, $He - SF_6$, $He - Xe$, $Ne - Ar$, $Ar - CO_2$, $H_2 - Xe$) per le quali è possibile mostrare (in virtù della differenza in massa tra le molecole) che in opportune concentrazioni si ha una forte diminuzione del valore di Pr complessivo della miscela rispetto ai singoli gas. Sebbene l'utilizzo di miscele di gas permetta di scegliere valori arbitrari di Pr in intervalli altrimenti inesplorabili (vedi figura 3.5), introduce nuovi effetti legati alla segregazione delle specie chimiche causa dei gradienti di temperatura e viceversa [25].

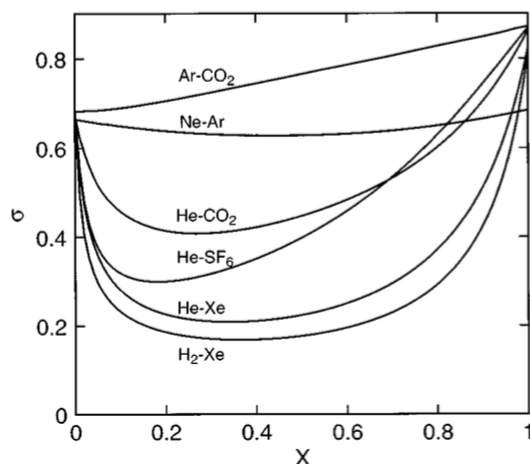


Figura 3.5. In figura è riportato in funzione della concentrazione X il numero di Prandtl assunto da alcune miscele di gas: il minimo si raggiunge per $H_2 - Xe$ in $Pr = 0.16$ (dati a $p = 22bar$ e $T = 25^\circ C$).

Particolare menzione merita una tecnica diffusasi negli ultimi decenni con la quale è possibile esplorare in maniera pressochè continua il campo da ~ 1 a ∞ per il numero di Prandtl. Tale tecnica fa leva sulla forte dipendenza dalla temperatura dei parametri del fluido nell'intorno del punto critico grazie alla quale, regolando la temperatura media di lavoro $\tau = \frac{\bar{T} - T_c}{T_c}$ è possibile decidere arbitrariamente il Pr e controllare il parametro Q che misura le deviazioni dalla approssimazione di Boussinesq. I vantaggi di questo sistema spaziano dalla possibilità di ottenere

convezione in strati di fluido molto sottili (raggiungendo elevati Γ più facilmente), alla possibilità già citata di variare Pr e Q quasi arbitrariamente (vedi figura 3.6). A questi forti vantaggi si legano però i problemi delle elevate fluttuazioni termiche nell'intorno del punto critico dovute all'interazione tra i gradi di libertà microscopici e macroscopici che possono rendere la descrizione idrodinamica stessa dell'apparato opinabile. Nella referenza [26] è possibile trovare aspetti più dettagliati su questa tecnica applicati sul gas SF_6 .

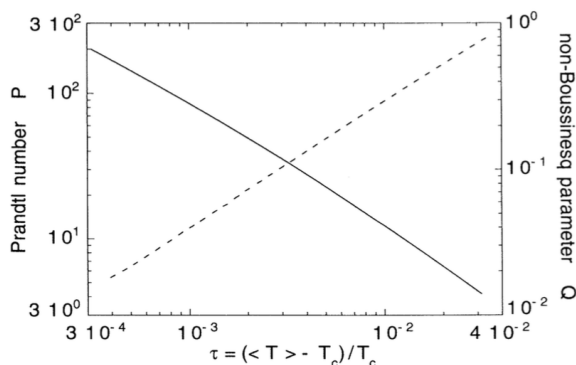


Figura 3.6. In figura sono riportati Pr (linea piena) e Q (linea tratteggiata) assunti da SF_6 nell'intorno del punto critico, in funzione di τ , quando la densità è pari a quella del punto critico ($\rho = \rho_c$). È evidente l'ampio intervallo di valori che possono assumere Pr e Q .

Nella pratica sperimentale sulla RBC è inoltre impiegato, per una serie di vantaggi elencati di seguito, lo studio con elio criogenico, sia allo stato gassoso che liquido (per temperature dell'ordine dei $5K$ circa). L'utilizzo di He a temperature criogeniche permette l'esplorazione di vari intervalli per Ra (fino a 2×10^{14}), sotto le ipotesi di Boussinesq. In queste condizioni si possono effettuare misure calorimetriche molto precise, dato il quasi totale isolamento della cella calorimetrica di lavoro, misure del campo di velocità utilizzando particelle galleggianti e misure di temperatura molto precise (con sensibilità di $20\mu K$ per piccoli ΔT , utilizzando termocoppie [27]). Il vantaggio di questa tecnica risiede nei coefficienti di trasporto molecolare dell'elio, ν , κ , e la elevatissima variabilità di condizioni dell'elio in un ristretto intervallo di temperature (da $10g/m^3$ in fase gassosa a $135kg/m^3$ in fase liquida), grazie al quale si possono raggiungere con piccoli ΔT valori per Ra molto elevati (rispettando al contempo le condizioni di Boussinesq).

3.1.2 Tecniche di visualizzazione

Altro aspetto interessante della convezione Rayleigh-Bénard riguarda la visualizzazione del flusso convettivo e la misura sperimentale dei campi di temperatura e velocità. A causa delle peculiari caratteristiche dei flussi convettivi, ovvero grandi

gradienti di temperatura e basse velocità, le tecniche solitamente utilizzate per i flussi isotermi (anemometria laser Doppler, anemometria a filo caldo, ...) si adattano difficilmente alle misurazioni, fornendo risultati scarsi e poco soddisfacenti. Per queste ragioni per la visualizzazione qualitativa del pattern convettivo si preferisce l'ombrografia (esempio in figura 3.7), tecnica basata sulla variazione dell'indice di rifrazione n con la temperatura in fluido. Un fascio di luce idealmente monocromatico, per evitare fenomeni di aberrazione e dispersione ottica nel fluido, viene inviato nella cella di lavoro dove verrà rifratto in maniera differenziale a seconda del campo locale di temperatura. L'elaborazione delle immagini può misurare variazioni dell'indice dell'ordine 10^{-9} con la tecnologia attuale che corrispondono a pochi μK secondo il fluido impiegato. La sensibilità di questa tecnica non invasiva è perciò dipendente da $n_T = -\frac{dn}{dT}|_p$. Tipicamente nei liquidi si ha $n_T = \mathcal{O}(10^{-4} K^{-1})$ mentre nei gas questo parametro è variabile con la pressione, da $n_T = \mathcal{O}(10^{-6} K^{-1})$ ad 1 bar fino a $n_T = \mathcal{O}(10^{-4} K^{-1})$ a 30 bar (il che giustifica l'utilizzo di celle di lavoro ad alta pressione ¹). [18]

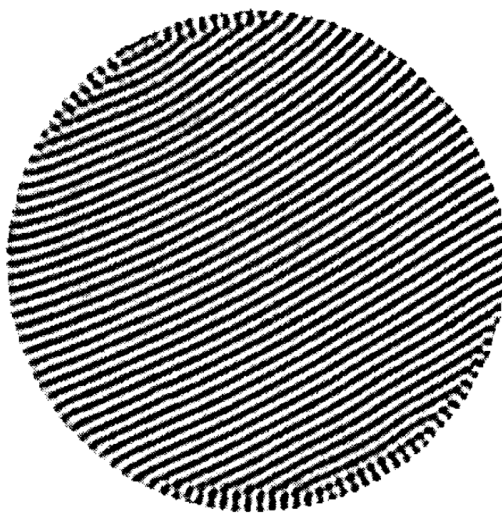


Figura 3.7. In figura è riportata una immagine ottenuta con ombrografia del pattern convettivo di CO_2 in condizioni di Boussinesq, $\Gamma = 41$, $\epsilon = \frac{Ra}{Ra_c} - 1 = 0.04$. Le parti scure rappresentano fluido caldo che si muove verso l'alto mentre le parti chiare il fluido più freddo che si muove verso il basso. Sono evidenti i rolls presenti nella cella.

La determinazione del campo di velocità è solitamente affidata alla 'particle image velocimetry' (PIV), tecnica basata sull'utilizzo di particelle galleggianti nel fluido che vengono tracciate attraverso un sistema di fotocamere in grado di coprire

¹Per alcuni fluidi nell'intorno del punto critico si può arrivare a valori $n_T = \mathcal{O}(10^{-1} K^{-1})$ che rende molto favorevole l'uso dell'ombrografia

diverse angolazioni nella cella. Dalle immagini ottenute, opportunamente filtrate da rumori e riflessi, si ricostruirà con un algoritmo tomografico la traiettoria di ciascuna delle particelle che, sotto opportune ipotesi, può essere considerata la medesima delle particelle fluide (deve accadere infatti che l'inerzia delle particelle sia trascurabile rispetto alle forze convettive agenti sulle stesse). Le misurazioni ottenibili con questa tecnica per la RBC sono delicate, in quanto occorre scegliere opportunamente le particelle in maniera che siano il più affidabili possibili nei dati e che influenzino al minimo il debole flusso convettivo. In figura 3.8, a titolo esemplificativo, è riportato il campo di velocità ottenuto con PIV in una cella cubica $77 \times 77 \times 77 \text{mm}^3$ in metanolo ($Pr = 7.24$, $Ra = 6.74 \times 10^8$).

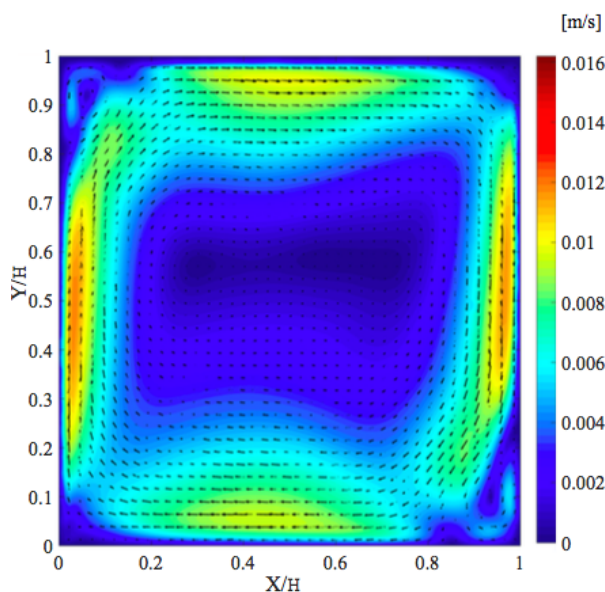


Figura 3.8. Nella figura sopra, tratta da [22], è mostrata una rielaborazione al computer del campo di velocità ottenuto in una cella cubica a metà della sua profondità (spesso la PIV è planare per semplicità di elaborazione e il campo di velocità viene studiato solamente in un piano mediano della cella).

Tra le altre tecniche sperimentali utilizzate è da citare, nello studio dell'evoluzione dei pattern convettivi, la possibilità di imporre arbitrarie condizioni iniziali al fluido in esame attraverso un riscaldamento disomogeneo dello strato fluido nella cella convettiva, operato con un forte fascio di luce attraverso maschere aventi la periodicità desiderata.

3.2 Risultati sperimentali

I risultati sperimentali ottenuti nell'ultimo secolo sulla convezione Rayleigh-Bénard sono innumerevoli e recensirli nel dettaglio tutti va oltre le possibilità di questo testo.

Per continuità con il capitolo precedente verranno riportati gli esiti riguardanti uno dei primissimi studi empirici del campo di velocità in una cella convettiva appena sopra la soglia critica, sulla base degli esperimenti condotti da Dubois e Bergé negli anni settanta. Gli articoli che vengono qui ripresi, [20] [21], riportano uno studio condotto con anemometria laser su olio silconico ($Pr \approx 930$ a $25^\circ C$) contenuto in una cella a forma di parallelepipedo di dimensioni $100\text{ mm} \times 30\text{ mm} \times d = 10\text{ mm}$ ($\Gamma_X = 10$, $\Gamma_Y = 3$). In questa, grazie al sistema di misurazione sono state raccolte le misure di velocità delle componenti V_X e V_Z nel piano mediano $Y = \frac{1}{2}l$, dove si può supporre il moto convettivo piano, ovvero $V_Y = 0$ (vedi figura 3.9).

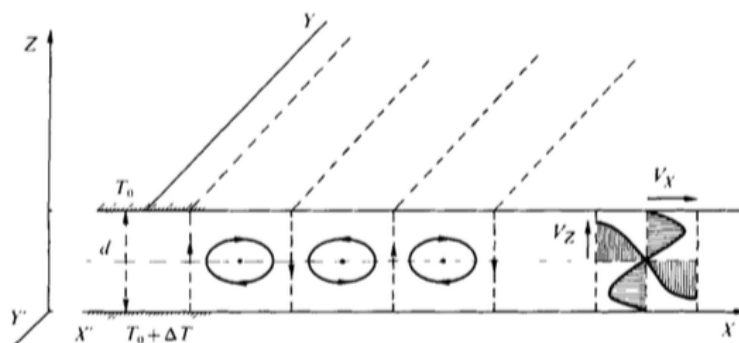


Figura 3.9. Sistema di riferimento nell'apparato sperimentale: i rolls tendono a formarsi parallelamente al lato corto del parallelepipedo, poichè riscontrano meno attrito da parte delle pareti.

Innanzitutto la regolarità del pattern convettivo è stata verificata accuratamente: V_X e V_Z si sono rivelati indipendenti da Y e lo studio si è quindi rivolto alla determinazione delle funzioni $V_X(X, Z, \epsilon)$ e $V_Z(X, Z, \epsilon)$. Questa dipendenza è stata studiata sulla base delle teorie sviluppate da Busse e Normand sul campo di velocità dei rolls, perciò analizzata nella sua periodicità lungo X , utilizzando una somma in sviluppo di seni delle prime tre armoniche fondamentali (V^1 , V^2 , V^3 , figura 3.10); detta λ_c la lunghezza d'onda critica si è scomposto:

$$V_X = V_X^1(Z) \sin \frac{2\pi X}{\lambda_c} + V_X^2(Z) \sin \frac{4\pi X}{\lambda_c} \pm \pi + V_X^3(Z) \sin \frac{6\pi X}{\lambda_c} \quad (3.1)$$

$$V_Z = V_Z^1(Z) \cos \frac{2\pi X}{\lambda_c} + V_Z^2(Z) \cos \frac{4\pi X}{\lambda_c} + V_Z^3(Z) \cos \frac{6\pi X}{\lambda_c} \quad (3.2)$$

In figura 3.11 sono riportati i risultati numerici dell'analisi di Fourier per V_X e V_Z con $\epsilon = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} = 5.7$; nell'analisi non sono state individuate in maniera apprezzabile armoniche di ordine superiore. La dipendenza da Z ed ϵ delle velocità è stata studiata separatamente per ciascuna armonica ottenendo una descrizione accurata del flusso convettivo. In particolare, si sono ottenute leggi di potenza per la dipendenza delle armoniche dal numero di Rayleigh ridotto ϵ , in quasi completo

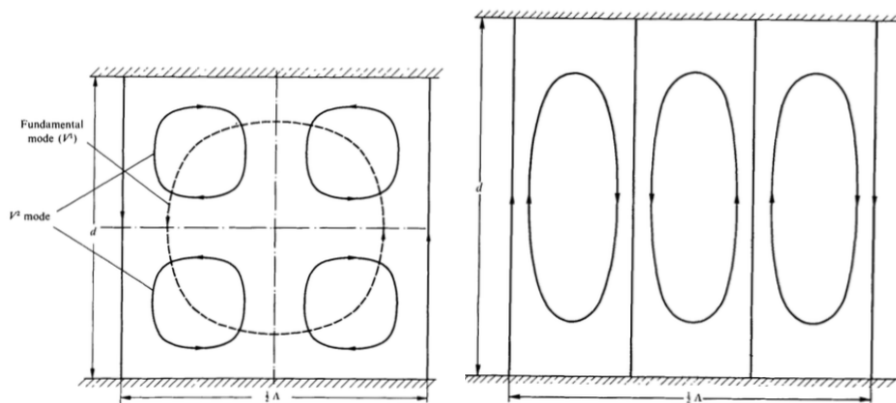


Figura 3.10. A sinistra, rappresentazione schematica dei modi V^1 e V^2 ; a destra, rappresentazione schematica del modo V^3

accordo con i risultati numerici predetti dal calcolo teorico alle perturbazioni finite (con accuratezza elevata soprattutto per le prime armoniche). Nella referenza [21] è possibile trovare un paragone accurato tra risultati teorici e sperimentali, ulteriori grafici ed informazioni numericamente più dettagliate sulle dipendenze ottenute.

Questo esperimento rappresenta perciò la conferma di quanto predetto teoricamente nel capitolo precedente, riguardo la natura periodica del fenomeno convettivo.

Considerazioni analoghe si possono fare analizzando alcune immagini ottenute con la tecnica dell'ombrografia e la loro trasformata di Fourier ([3], [17]). Da queste è evidente come sia i pattern convettivi esagonali (caratteristici dei fluidi non approssimabili con Boussinesq), sia i rolls siano caratterizzati da precisi vettori d'onda il cui modulo è prevedibile con l'analisi lineare di stabilità. Nella figura 3.12 sono mostrati un pattern convettivo esagonale ed uno a rolls con i rispettivi vettori d'onda ottenuti dalle immagini nel piano complesso. L'ampiezza di questi è in accordo con la teoria e rispecchia sostanzialmente quanto predetto riguardo rolls e pattern esagonali scomponibili come sovrapposizione di questi.

Posteriori sviluppi sperimentali che possono essere considerati una conferma dell'analisi lineare di stabilità: riguardano le fluttuazioni statistiche del campo di temperatura fluido nell'intorno (ma sempre al di sotto) della soglia critica convettiva. Questo aspetto è stato trascurato nel capitolo precedente ma risulta analizzabile sulla base delle equazioni stocastiche idrodinamiche linearizzate, anziché deterministiche, quanto le interazioni sono sufficientemente deboli da non influenzarsi vicendevolmente. Nuovamente si ha avuto un ottimo riscontro sperimentale riguardo le fluttuazioni di temperatura $\langle \delta T^2(\epsilon) \rangle$ riassunto in figura 3.13: si è chiaramente dimostrato che queste hanno preciso numero d'onda $k \approx 3.117$.

Ulteriori sviluppi sui risultati sperimentali finora ottenuti nel campo della RBC riguardanti regimi convettivi e formazione dei patterns sono riassunti in [3], [17] e approfondibili nelle referenze lì citate; in [11] si può trovare una introduzione

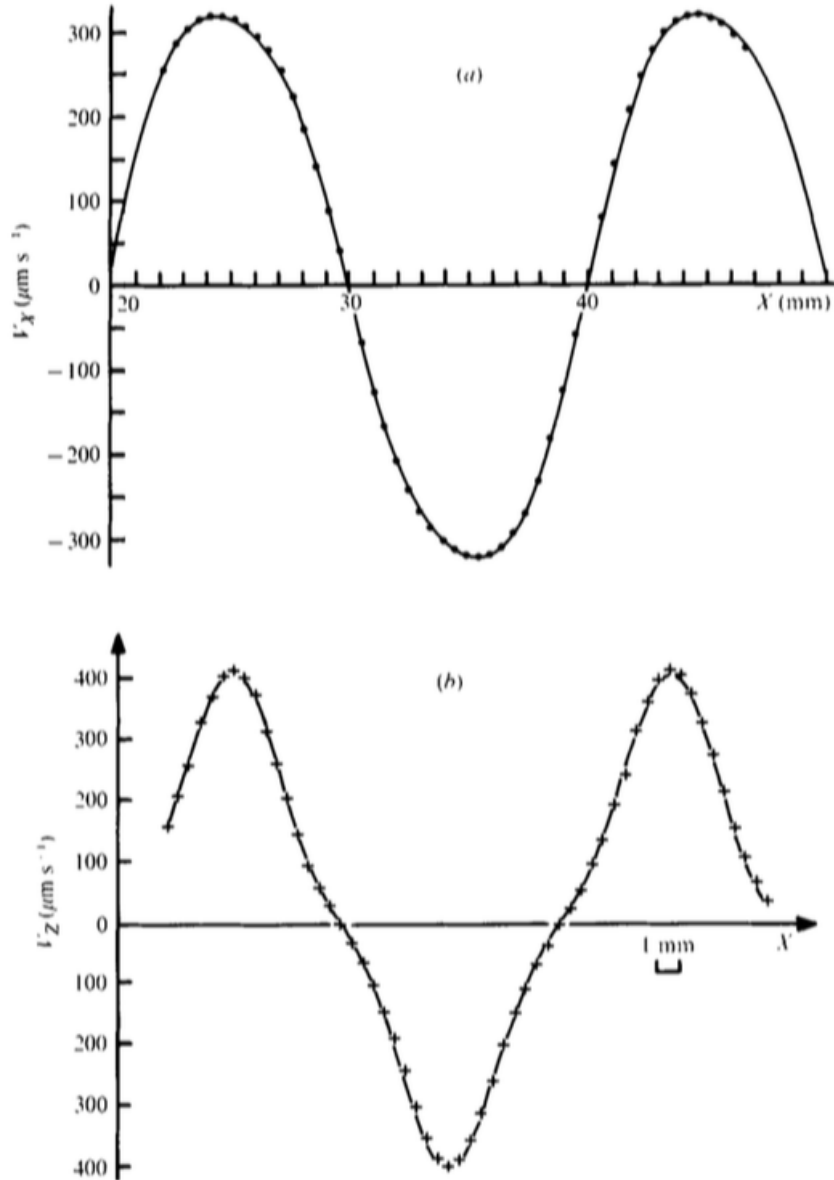


Figura 3.11. Per V_X e V_Z si sono ottenuti in funzione di X i grafici sopra riportati, rispettivamente a $Z = Z^* = 0.22d$ e $Z = Z^{**} = 0.5d$, laddove si hanno i valori massimi. Lo sviluppo in seni ha fornito i seguenti risultati:
 $V_X^1(Z^*) = 337 \pm 10 \mu\text{m s}^{-1}$ $V_X^2(Z^*) = 13.7 \pm 1 \mu\text{m s}^{-1}$ $V_X^3(Z^*) = 19 \pm 1 \mu\text{m s}^{-1}$
 $V_Z^1(Z^{**}) = 340 \pm 10 \mu\text{m s}^{-1}$ $V_Z^2(Z^{**}) = 1.7 \pm 2 \mu\text{m s}^{-1}$ $V_Z^3(Z^{**}) = 58 \pm 4 \mu\text{m s}^{-1}$

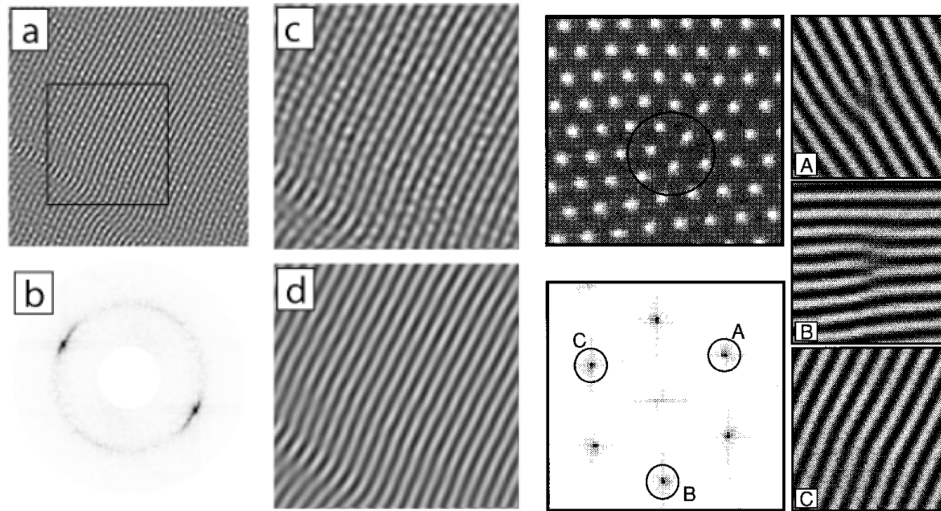


Figura 3.12. Nelle quattro miniature a sinistra è mostrato un pattern convettivo di rolls (a) e la sua analisi mediante trasformata di Fourier (b) dove è evidente il preciso vettore d'onda. Le miniature (c) e (d) rappresentano uno zoom di (a) e la stessa dopo l'applicazione di un filtro passa-banda per eliminare i rumori nell'immagine. A destra è invece mostrato un pattern convettivo esagonale e la sua rispettiva trasformata di Fourier (sotto). Nelle miniature (A)(B)(C) a lato sono inoltre mostrate le trasformate inverse dei contributi di ogni pattern di rolls. E' inoltre possibile notare evidenziato un difetto che risulta essere una dislocazione per (A) e (B).

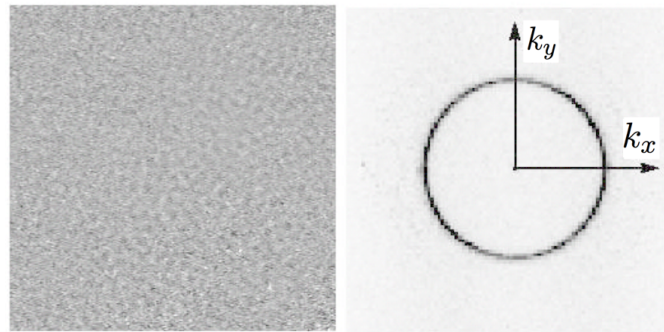


Figura 3.13. A sinistra è mostrata l'immagine ottenuta con ombrografia delle fluttuazioni appena sotto la soglia convettiva ($\epsilon = -3 \times 10^{-4}$). A destra vi è la trasformata di Fourier di 64 immagini analoghe a quella a sinistra. L'anello evidenzia la simmetria rotazionale della convezione Rayleigh-Bénard.

riguardo gli ultimi risultati ottenuti sull'aspetto termico della convezione naturale. Per approfondimenti ulteriori, inoltre, la monografia [12] riporta, con una visione di ampie prospettive sulla RBC, una moltitudine di argomenti di interesse investigativo legati ad essa.

3.3 Cenni di analisi numerica

L'analisi al calcolatore è un ausilio ibrido tra teorico e sperimentale volto a simulare numericamente il comportamento del sistema in esame partendo da un modello ben definito. Per quanto riguarda i sistemi fluidi, i metodi numerici sono numerosi ma si possono classificare in due principali categorie: i metodi alle differenze finite ed i metodi spettrali. I primi utilizzano le equazioni differenziali del modello per descrivere le caratteristiche locali del fluido in esame: il dominio viene quindi discretizzato sia spazialmente che temporalmente in parti sufficientemente piccole perchè non vi sia eccessiva propagazione degli errori nel passaggio dalla descrizione locale a quella globale (dovendo descrivere anche le più piccole scale del movimento vi è spesso necessità di grandi quantità di punti che appesantiscono notevolmente il calcolo). Per la RBC si utilizzano solitamente simulazioni numeriche dirette, a partire dalle equazioni di Navier-Stokes adimensionalizzate nell'approssimazione di Boussinesq (questa è la via più onerosa dal punto di vista del calcolo ma permette adattamento alle geometrie del problema e analisi dettagliata in zone scelte del dominio, come ad esempio gli strati limite).

Altra famiglia di metodi è quella dei metodi spettrali (metodi di Galerkin) per i quali la discretizzazione non avviene a livello del dominio bensì delle soluzioni che il problema può assumere: i campi di velocità e temperatura saranno rappresentati da somme di funzioni base arbitrariamente scelte (ad esempio in serie di Fourier). In generale i metodi di Galerkin sono più adatti a problemi con geometrie semplici essendo da questo punto di vista meno flessibili, per i quali si rivelano più accurati e meno onerosi dal punto di vista computazionale; d'altra parte è necessaria una adeguata scelta delle funzioni base ben più complicata della discretizzazione del dominio spazio-temporale del problema.

Solitamente nello studio della RBC l'utilizzo di codice di calcolo è dedicato allo studio di grandezze non accessibili sperimentalmente, come in alcuni casi, campi di velocità o temperatura (particolarmente per i problemi di scambio termico), e di verifica della teoria sviluppata (per lo studio di formazione e stabilità dei pattern convettivi). In ogni caso il calcolo è sempre validato attraverso un confronto con esperimenti effettuati in laboratorio, senza il quale sarebbe privo di significatività.

Ad esempio in [23] e [24] sono riportati due esempi di utilizzo di codice numerico nello studio della RBC: nel primo si vuole studiare a precisi valori di Ra , Pr il profilo di temperatura media nella convezione turbolenta, dato altrimenti non accessibile sperimentalmente con facilità; nel secondo si riassume un estensivo lavoro numerico mirato ad ottenere e verificare correlazioni tra i parametri della convezione, in particolare la dipendenza $Re(Ra, Pr)$. In entrambi i casi si utilizzano metodi numerici diretti data la specifica forma della cella convettiva ed i risultati forniti dal calcolatore sono almeno in parte verificati sperimentalmente. A titolo dimostrativo in figura 3.14 è riportato come appare il campo di velocità in alcuni calcoli condotti

in [24].

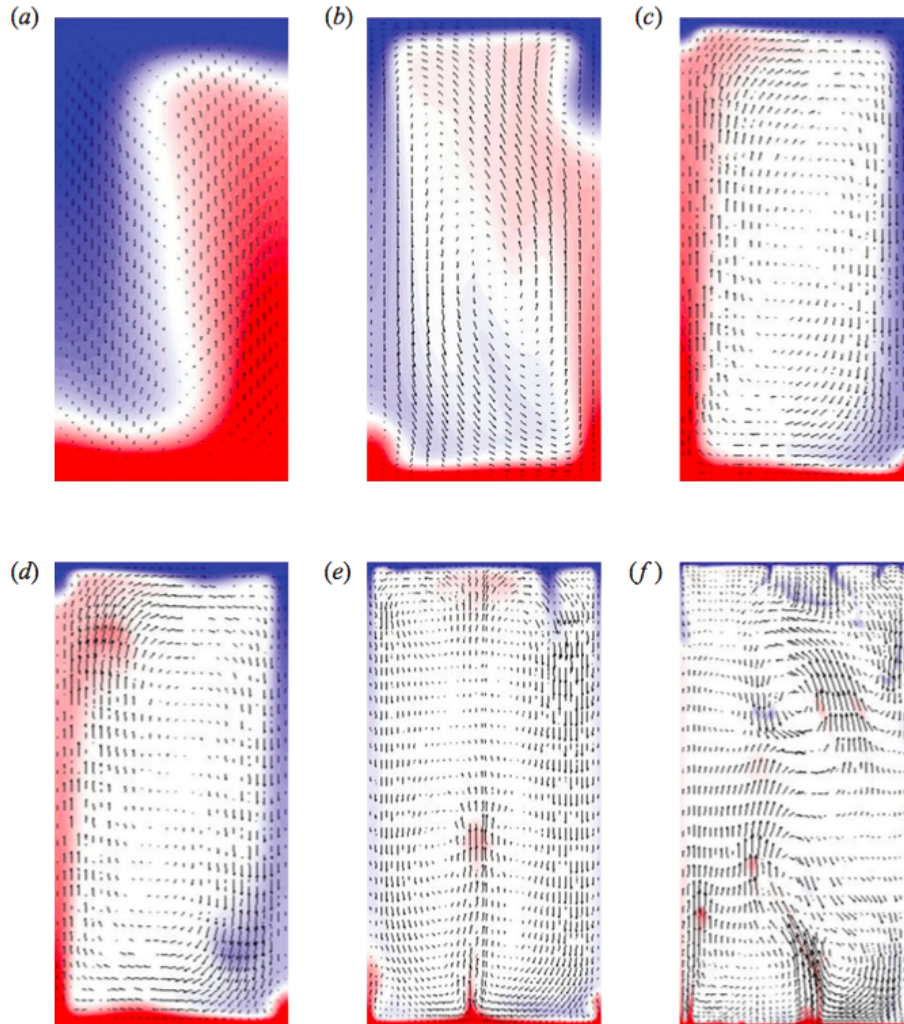


Figura 3.14. In figura si riportano alcune delle strutture fluide ottenute con simulazione numerica diretta in [24], per un fluido con $Pr = 10^3$ in una cella cilindrica avente $\Gamma = \frac{1}{2}$. (a) $Ra = 10^5$, (b) $Ra = 2 \times 10^6$, (c) $Ra = 7 \times 10^6$ (d) $Ra = 8 \times 10^6$, (e) $Ra = 10^8$, (f) $Ra = 10^9$. Il colore rappresenta la temperatura ($0 < T < 0.2$ blu, $0.2 < T < 0.8$ scala blu-bianco-rosso, $0.8 < T < 1$ rosso) mentre le frecce il campo di velocità tangente alla sezione verticale.

Capitolo 4

Conclusioni

Quanto descritto nei capitoli precedenti rappresenta una sommaria panoramica sulla convezione Rayleigh-Bénard. In questo documento abbiamo percorso l'evoluzione storica della RBC, partendo dalle prime osservazioni sperimentali di Henry Bénard (1896) e riportando la prima interpretazione teorica del fenomeno dovuta a Lord Rayleigh (1916); da allora, enormi passi avanti sono stati svolti nel mondo della ricerca riguardo questo affascinante fenomeno, rivelatosi più complesso e ricco di quanto potesse inizialmente sembrare. Nei capitoli precedenti sono riportati alcuni spunti sulle successive evoluzioni della convezione Rayleigh-Bénard riguardo alcuni cenni di analisi non lineare e risultati sulla convezione nell'intorno della soglia critica. Ciò si potrebbe approfondire dal punto di vista teorico con quanto ottenuto da Busse nel 1967 ([28]) e nei lavori successivi, riguardo modelli della soluzione secondaria della convezione e lo studio delle loro stabilità, i meccanismi di selezione del numero d'onda ed i differenti pattern convettivi possibili. Numerose sono le osservazioni sperimentali a questo riguardo, anche se molti aspetti attendono di essere compresi a pieno.

Lo studio dell'evoluzione caotica di sistemi deterministici, l'analisi delle fluttuazioni statistiche legate agli stati microscopici della materia e lo studio della formazione di strutture regolari a partire dal disordine, sono solamente alcuni dei campi in cui la convezione Rayleigh-Bénard ricopre un ruolo importante come problema modello ed in cui la ricerca è ancora fortemente attiva. A questi bisogna aggiungere tutte le possibili interpretazioni fisiche dei moti atmosferici, oceanici, del mantello terrestre, delle convezioni stellari alle quali la RBC può essere ricondotta. Dal punto di vista più pratico, inoltre, si sono elaborati modelli molto sofisticati e precisi sullo scambio termico, in continuo approfondimento oggi.

Sostanzialmente la varietà di fenomeni legati alla RBC unita all'immensa variabilità di condizioni in cui può manifestarsi, lo rendono un problema ancora vivo dopo più di un secolo di intensa ricerca.

Bibliografia

- [1] C. Normand, Yves Pomeau, M. G. Velarde, *Convective Instability: A Physicist's approach*, Reviews of Modern Physics Vol. 49 No. 3 (pp. 581-624), July 1977
- [2] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press, 1961
- [3] E. Bodenschatz, W. Pesch, G. Ahlers, *Recent Developments in Rayleigh-Bénard Convection*, Annu. Rev. Fluid Mech. 2000. 32 (pp. 709-778)
- [4] P. G. Drazin, *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, 2002
- [5] D. Goluskin, *Internally Heated Convection and Rayleigh-Bénard Convection*, Springer, 2015
- [6] R. Hoyle, *Pattern Formation: an Introduction to Methods*, Cambridge University Press, 2006
- [7] T. Alboussière, Y. Ricard, *Rayleigh-Bénard stability and the validity of quasi-Boussinesq or quasi-anelastic liquid approximations*, J. Fluid Mech. vol. 817, (pp. 264-305), 2017
- [8] S. Grossmann D. Lohse, *Thermal Convection for Large Prandtl Numbers*, Physical Review Letters vol. 87 no. 15, April 2001
- [9] G. Ahlers, *Low-Temperature Studies of the Rayleigh-Benard Instability and Turbulence*, Physical Review Letters vol. 33 no. 20, November 1974
- [10] Xiaochao Xu, Kapil M. S. Bajaj, G. Ahlers, *Heat Transport in Turbulent Rayleigh-Bénard Convection*, Physical Review Letters vol. 84 no. 19, May 2000
- [11] F. Chilla, J. Schumacher, *New perspectives in turbulent Rayleigh-Bénard convection*, European Physics Journal E (2012) 35: 58
- [12] A. V. Getling, *Rayleigh-Bénard Convection: Structures and Dynamics*, New York, World Scientific 1998
- [13] Debasish Mishra, K. Muralidhar, P. Munshi, *Experimental study of Rayleigh-Benard convection at intermediate Rayleigh numbers using interferometric tomography*, Elsevier, Fluid Dynamics Research 25 (1999) 231-255
- [14] P. K. Kundu, I. M. Cohen, D. R. Dowling, *Fluid Mechanics*, 2012 Elsevier
- [15] S. Grossmann, D. Lohse, *Scaling in thermal convection: a unifying theory*, J. Fluid Mech. (2000), vol. 407, pp. 27-56, 2000 Cambridge University Press

-
- [16] H. L. Swinney, J. E Gollub, *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence* Springer-Verlag, New York 1985
- [17] Guenter Ahlers, *Experiments with Rayleigh-Bénard convection*
- [18] John R. de Bruyn, Eberhard Bodenschatz, Stephen W. Morris, Steven P. Trainoff, Yuchou Hu, David S. Cannell, Guenter Ahlers, *Apparatus for the study of Rayleigh-Bénard convection in gases under pressure*, Review of Scientific Instruments 67, 2043 (1996)
- [19] S. Cioni, S. Ciliberto, J. Sommeria, *Experimental study of high-Rayleigh-number convection in mercury and water*, Dynamics of Atmospheres and Oceans 24 (1996) 117-127
- [20] P. Berge, M. Dubois, *Convective Velocity Field in the Rayleigh-Benard Instability: Experimental Results*, Physical Review Letters vol. 32 no. 19, May 1974
- [21] M. Dubois, P. Berge, *Experimental study of the velocity field in Rayleigh-Benard convection*, J. Fluid Mech. (1978), vol. 85, part 4, pp. 641-653
- [22] Valentina Valori, Gerrit Elsinga, Martin Rohde, Mark Tummens, Jerry Westerweel, Tim van der Hagen, *Experimental velocity study of non-Boussinesq Rayleigh-Bénard convection*, Physical Review E 95, 053113 (2017)
- [23] O. Shishkina, A. Thess, *Mean temperature profiles in turbulent Rayleigh-Bénard convection of water*, J. Fluid Mech. (2009), vol. 633, pp. 449-460
- [24] G. Silano, K. R. Sreenivasan, R. Verzicco, *Numerical simulations of Rayleigh-Bénard convection for Prandtl numbers between 10^1 and 10^4 and Rayleigh numbers between 10^5 and 10^9* , J. Fluid Mech. (2010), vol. 662, pp. 409-446
- [25] Jun Liu, Guenter Ahlers, *Rayleigh-Bénard convection in binary-gas mixtures: Thermophysical properties and the onset of convection*, Physical Review E Vol. 55, no. 6, June 1997
- [26] Michel Assenheimer, Victor Steinberg, *Rayleigh-Bénard Convection near the Gas-Liquid Critical Point*, Physical Review Letters vol. 70 no. 25, June 1993
- [27] X. Chavanne, F. Chillà, B. Chabaud, B. Castaing, B. Hébral, *Turbulent Rayleigh-Bénard convection in gaseous and liquid He* Physics of Fluids 13, 1300 (2001)
- [28] F. H. Busse, *On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below* J. Math. and Phys. 46(2), 140-150 (1967)